2 J. XV. 12. 16. nur dieser 2te Band:
~~der 4te Theilheft~~

Ma
0
2

Mathematiſches Wörterbuch

oder

Erklärung

der

Begriffe, Lehrſätze, Aufgaben und Methoden

der Mathematik

mit den nöthigen Beweiſen

und litterariſchen Nachrichten begleitet

in alphabetiſcher Ordnung

von

Georg Simon Klügel

Profeſſor der Mathematik und Phyſik auf der Friedrichs-Univerſität zu Halle, Mitgliede der Akademien und Societäten der Wiſſenſchaften zu Petersburg, Berlin, Göttingen und Frankfurt an der Oder, Ehrenmitgliede der ökonomiſchen Geſellſchaft zu Leipzig.

ÖFFENTLICHE BIBLIOTHEK BAMBERG

Erſte Abtheilung

Die reine Mathematik.

Zweyter Theil

von E bis J

mit ſechs Kupfertafeln.

Leipzig

im Schwickertſchen Verlage 1805.

Staats-
Bibliothek
Bamberg

Mathematiſches Wörterbuch,

oder

Erklärung der Begriffe, Lehrſätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik, mit literariſchen Nachrichten in alphabetiſcher Ordnung.

Erſte Abtheilung.

Arithmetik, Analyſis und Geometrie, die niedere und die höhere.

E.

Ebene iſt eine Fläche, auf welcher jede, durch irgend zwey Puncte derſelben gezogene gerade Linie mit allen ihren Puncten liegt. Sie iſt allenthalben, in größern wie in kleinern Theilen, gleichförmig ausgedehnt, weil auf der geraden Linie die Theile durchgehends eine gleichförmige Lage haben.

Euklides ſagt: Eine ebene Fläche iſt, welche zwiſchen jeden in ihr befindlichen geraden Linien auf einerley Art liegt. Dieſe Erklärung iſt ſeiner von der geraden Linie gegebenen analog. Die gerade Linie iſt nach ihm diejenige, welche zwiſchen jeden in ihr befindlichen Puncten auf einerley Art liegt. Er deutet durch jene Erklärung die Gleichförmigkeit der Ausdehnung an einer Ebene an. Wie auch eine Ebene durch gerade Linien begränzt seyn mag, ſo iſt die Form der Fläche ſelbſt dieſelbe, nur die Größe und die äußere Geſtalt mögen verſchieden ſeyn. Euklides ſetzt in der That voraus, daß ſich in einer Ebene allenthalben gerade Linien ziehen laſſen.

A

Proklus in ſeinem weitſchweifigen Commentar über das erſte Buch des Euklides verſteht die Erklärung der Ebene bey demſelben ſo, daß die Ebene zwiſchen zwey geraden Linien einen Raum einnehme, der ſo groß iſt als der Raum zwiſchen dieſen Linien. Auf ähnliche Art verſteht er auch die Erklärung von der geraden Linie, welche Euklides giebt. Schwerlich hat Euklides dieſes ſagen wollen. Proklus führt auch noch die hier gegebene Erklärung an; ferner dieſe, daß ſie unter allen zwiſchen denſelben Gränzen eingeſchloſſenen Flächen die kleinſte Ausdehnung habe, und, daß ſie eine ſolche iſt, deren mittlere Theile die äußern verdecken.

In dieſem Artikel wird ſich die wichtige Lehre von der Lage der Ebenen gegen einander, und der geraden Linien gegen Ebenen am ſchicklichſten abhandeln laſſen. Der Kürze wegen beziehe ich mich in Abſicht der Beweiſe auf die Elemente des Euklides im 11ten Buche.

1. Drey Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen beſtimmen die Lage einer Ebene. Denn man verbinde die drey Puncte durch gerade Linien, und begränze durch dieſe eine Fläche, in welche alle gerade Linien fallen, die von einem Puncte einer der Linien zu einem Puncte einer der beiden andern gezogen ſind. Dieſe Fläche iſt eine Ebene. Die Verlängerungen aller jener Linien fallen in die erweiterte Ebene des Dreyecks, die alſo auch beſtimmt iſt.

3 Zwey gerade Linien, die ſich ſchneiden, liegen in einer Ebene. Folgt aus (1.).

2. Zwey Ebenen ſchneiden einander in einer geraden Linie.

4 Der Winkel zweyer ſich ſchneidenden Ebenen iſt der Winkel der in ihnen auf die gemeinſchaftliche Durchſchnittlinie durch denſelben Punct gezogenen ſenkrechten. Die Ebenen (Fig. 1 Tab. IX.) ſeyn CABE, DABF, ihr Durchſchnitt AB, die auf AB in den beiden Ebenen durch A gezogenen ſenkrechten ſeyn CA, DA, ſo iſt der Winkel CAD der Winkel der beiden Ebenen. Wegen der gleichförmigen Ausdehnung ebener Flächen iſt es gleichgültig, durch welchen Punct

der Durchſchnittslinie die Perpendikel gezogen werden. Sind EB und FB ſenkrecht auf AB durch B, jene in der Ebene CABE, dieſe in DABF, ſo iſt der Winkel EBF = CAD. Dieſes läßt ſich aber auch ſtreng erweiſen, ſ. 13.

Die Linien CA, DA müſſen ſenkrecht auf AB ſeyn, weil ihre Neigung gegen AB Einfluß auf die Größe des W. CAD hat. Bey der ſenkrechten Lage gegen AB hängt der W. CAD bloß von der Lage der Ebenen ab. S. unten, 8.

5. Eine Ebene iſt ſenkrecht auf eine andere, wenn der Winkel der durch einen Punct ihrer Durchſchnittslinie in den beiden Ebenen auf jene ſenkrecht gezogenen ein Rechter iſt. Euklides ſetzt: Wenn die geraden Linien, die in der einen Ebene ſenkrecht auf den gemeinſchaftlichen Durchſchnitt gezogen werden, auf die andere Ebene ſenkrecht ſtehen.

6. Eine gerade Linie iſt auf eine Ebene ſenkrecht, wenn ſie mit allen geraden Linien, die in dieſer Ebene durch den Punct, worin ſie dieſelbe trifft, gezogen werden, einen rechten Winkel macht.

7. Wenn eine gerade Linie auf zwey einander ſich ſchneidende gerade Linien ſenkrecht iſt, ſo iſt ſie auf jede durch deren Durchſchnitt in ihrer Ebene gezogene gerade Linie ſenkrecht, und daher ſenkrecht auf die Ebene ſelbſt. In Fig. 1, iſt BA ſenkrecht auf AC und AD, daher auch ſenkrecht auf jede AG, die in der Ebene CAD liegt, und daher iſt BA ſenkrecht auf dieſe Ebene.

8. Wenn der W. CAG = GAD, und BA ſenkrecht auf die Schenkel dieſer Winkel iſt, ſo haben die Ebenen CAB, GAB ganz dieſelbe Lage gegen einander wie GAB und DAB. Darum werden die Winkel der Ebenen durch die Winkel der auf ihren Durchſchnitt in einem Puncte derſelben ſenkrechten gemeſſen.

9. Drey durch einen Punct A (Fig. 1.) gezogene gerade AC, AD, AG ſind in derſelben Ebene, wenn eine gerade BA auf alle drey ſenkrecht iſt.

10. Zwey auf eine Ebene DAC (Fig. 1.) ſenkrechte BA, EC ſind parallel.

11. Wenn von den zwey Parallellinien, BA, EC, die eine, BA, ſenkrecht auf die Ebene DAC iſt, ſo iſt auch die andere, EC, ſenkrecht auf dieſe Ebene.

12. Gerade Linien EC, FD, welche der Linie BA, die nicht in der Ebene jener beiden liegt, parallel ſind, ſind einander parallel.

13. Zwey in verſchiedenen Ebenen liegende Winkel CAD, EBF, die von den parallelen, AC und BE, AD und BF, eingeſchloſſen werden, ſind einander gleich.

14. Aufg. Auf eine gegebene Ebene von einem über derſelben gegebenen Puncte, A, eine ſenkrechte zu ziehen.

In der gegebenen Ebene MN (Fig. 2.) ziehe man willkührlich die gerade BC, und fälle auf ſie die ſenkrechte AD. Iſt dieſe nicht ſenkrecht auf die Ebene, ſo ziehe man in derſelben durch D die ſenkrechte ED auf BC, und auf dieſe in der Ebene ADE die ſenkrechte AF. Dieſe iſt auf die Ebene der Linien, BC, ED, oder die Ebene MN, ſenkrecht.

15. Aufg. Auf eine gegebene Ebene durch einen in derſelben gegebenen Punct eine ſenkrechte zu errichten.

Die Ebene (Fig. 3.) ſey MN, in derſelben der gegebene Punct, A. Über der Ebene nehme man irgend einen Punct B, und fälle von dieſem die ſenkrechte BC auf die Ebene. Mit BC ziehe man durch A die parallele AD, ſo iſt dieſe die geſuchte ſenkrechte.

16. Parallele Ebenen ſind, welche nie zuſammen treffen, ſo weit ſie auch nach jeder Richtung fortgeſetzt werden.

17. Ebenen, auf welche eine gerade Linie ſenkrecht iſt, ſind parallel. Als in Fig. 1. ſind die Ebenen CAD, EBF, parallel, wenn AB auf beide ſenkrecht iſt.

18. Die Ebenen zweyer Winkel ſind parallel, wenn die Schenkel der Winkel parallel ſind. In Fig. 1. ſey

BE parallel mit AC, und BF parallel mit AD, ſo ſind die Ebenen der Winkel CAD, EBF, parallel.

19. Die Durchſchnitte paralleler Ebenen mit einer ſie ſchneidenden ſind einander parallel.

20. Wenn zwey gerade Linien durch parallele Ebenen geſchnitten werden, ſo ſind die Theile der Linien, welche zwiſchen einerley Ebenen liegen, proportional.

21. Iſt eine gerade Linie AB (Fig. 1.) auf eine Ebene CAD ſenkrecht, ſo ſind alle durch die AB gelegten Ebenen, wie CAB, DAB, auf dieſelbe Ebene, CAD, ſenkrecht.

22. Sind zwey einander ſchneidende Ebenen, EA, FA, (Fig. 1.) auf eine Ebene CAD ſenkrecht, ſo iſt ihr Durchſchnitt, AB, auf dieſelbe Ebene ſenkrecht.

23. Die Folge der Sätze iſt, wie bey Euklides im 11ten Buche. Der erſte Satz daſelbſt, daß eine gerade Linie nicht zum Theil in einer Ebene, zum Theil auſſer ihr befindlich seyn könne, iſt eine unmittelbare Folgerung aus der hier angenommenen Erklärung einer Ebene. Der Beweis, den Euklides von dem Satze giebt, ſcheint das zu beweiſende vorauszuſetzen. Der zweyte Satz daſelbſt iſt zweytheilig. Der eine Theil iſt hier der Satz in (2.); der zweyte Theil: Jedes Dreyeck liegt in einer Ebene, iſt in (1.) enthalten. Der 7te Satz bey Euklides iſt eine Folge unſerer Erklärung der Ebene, und iſt hier weggelaſſen.

24. Wenn man zu dem Hülfsſatze (Eukl. 13.), daß durch einen Punct einer Ebene nur eine einzige ſenkrechte Linie auf ſie möglich iſt, noch den analogen Satz fügt, daß durch eine gerade Linie auf einer Ebene nur eine ſenkrechte Ebene auf ſie geſetzt werden kann, ſo läßt ſich der Satz (10; Eukl. 6.) leichter erweiſen, als es von E. geſchehen iſt.

Die Sätze, 21 und 22, ſollten wegen ihres Inhalts auf (11.) folgen. Der erſtere läßt ſich vermöge der hier in (5.) gegebenen Erklärung leichter erweiſen. Anſtatt des indirecten Beweiſes von (22.) bey Euklides, 19.

Satz, wird beſſer ein directer geſetzt. Man ſehe Segners Anfangsgründe, §. 517.

25. Wenn zwey Ebenen auf einander ſenkrecht ſtehen, ſo iſt die in einer derſelben auf den gemeinſchaftlichen Durchſchnitt ſenkrecht gezogene gerade Linie auf die andere Ebene ſenkrecht.

Die Ebene DAFE (Fig. 3.) ſey ſenkrecht auf die Ebene MN, ihr Durchſchnitt AF, in jener ſey BC ſenkrecht auf AF. Man ziehe in der Ebene MN die GC ſenkrecht auf AF, ſo iſt BCG ein rechter Winkel, da die Ebenen ſenkrecht auf einander ſind, und BC ſteht auf zwey Linien, AF, GC, in der Ebene MN ſenkrecht, alſo auf die Ebene.

Der Satz fehlt bey Euklides, fließt aber unmittelbar aus ſeiner in (5.) angeführten Erklärung.

26. Eine gerade Linie iſt **geneigt** gegen eine Ebene, wenn ſie mit irgend einer Linie in der Ebene einen ſchiefen Winkel macht, wie die Linie AD (Fig. 2.) mit DF, die in der Ebene MN durch den Punct D, worin AD ſie trifft, gezogen iſt.

27. Die **Neigung** der Linie AD gegen die Ebene MN iſt der Winkel ADF, welchen AD mit der DF macht, die durch den Punct D in der Ebene und der Linie AD nach dem Puncte F gezogen iſt, worin die ſenkrechte AF von einem Puncte A der AD die Ebene trifft.

Da die Ebene des Dreyecks ADF ſenkrecht auf die Ebene MN iſt (21.), ſo iſt die gerade BC, die auf DF ſenkrecht iſt, auf die Ebene des Dreyecks ſenkrecht (25.), alſo ſenkrecht auf AD. Solchergeſtalt wird die Neigung der AD gegen die Ebene, nach der in der Erklärung angegebenen Art ſie zu meſſen, ohne Einmiſchung einer Neigung gegen BC gefunden.

Die Ebene des Dreyecks ADF nenne man die **Neigungs-Ebene.**

28. Eine gerade Linie iſt einer Ebene parallel, wenn ſie, unbeſtimmt weit verlängert, dieſelbe nicht trifft. Sie kann ſie nicht treffen, wenn ſie mit irgend einer geraden Linie in derſelben parallel iſt. Sie liegt nämlich ganz in

der Ebene, die durch dieſe Linie und einen ihrer Puncte gelegt iſt. S. Parallelen.

29. Die Linie AB (Fig. 1.) ſey parallel mit der Ebene CEFD. Man lege durch AB zwey Ebenen, ABEC, ABFD, welche jene Ebene in CE, DF ſchneiden, ſo ſind dieſe Durchſchnittslinien mit der AB und unter ſich parallel. Denn da AB die Ebene CF nicht trifft, alſo auch CE nicht ſchneidet, und mit derſelben in einer Ebene AE liegt, ſo iſt ſie der CE parallel. Eben ſo verhält es ſich mit AB und DF. Da nun CE mit AB parallel iſt, ſo iſt ſie auch der Ebene AF parallel, (28.), daher auch der Linie DF, die mit ihr in einer Ebene liegt, und von ihr nicht geſchnitten wird.

30. Zwey gerade Linien, CE, DF (Fig. 1.) ſind parallel, ſo iſt der Durchſchnitt AB zweyer durch ſie gelegten Ebenen, CEBA, DFBA, jeder derſelben parallel. Denn EC iſt parallel der Ebene DB (28.), ſchneidet alſo AB nicht, und iſt, da ſie mit dieſer in einer Ebene CEBA liegt, ihr parallel. Eben ſo wird erwieſen, daß DF der AB parallel iſt.

31. Wenn eine gerade Linie zweyen ſich ſchneidenden Ebenen parallel iſt, ſo iſt ſie der Durchſchnittslinie derſelben parallel. Es ſey nämlich die gerade AB (Fig. 4.) den Ebenen CDFE, CDHG parallel, deren Durchſchnittslinie CD iſt. Man lege durch AB die beiden Ebenen, ABFE, ABHG, deren erſtere die Ebene CF in EF, die andere die Ebene CH in GH ſchneide. Dieſe Linien ſind, da AB mit den Ebenen parallel iſt, der Linie AB parallel, alſo auch einander ſelbſt (12). Der Durchſchnitt CD der durch EF und GH gelegten Ebenen iſt ihnen parallel (30.); alſo auch der AB, die mit eben denſelben parallel iſt (12.).

Die Sätze 28 — 31. fehlen bey Euklides. Noch eine Zugabe ſind folgende Sätze.

32. Die Ebene des Neigungswinkels zweyer Ebenen ſteht ſenkrecht auf jede derſelben.

In (Fig. 1.) iſt der Winkel CAD der Neigungswinkel der Ebenen CAB, DAB, ſo daß AB auf die

Schenkel AC, AD ſenkrecht iſt. Daher iſt AB ſenkrecht auf die Ebene des Neigungswinkels, alſo ſind die durch AB gelegten Ebenen CAB, DAB ſenkrecht auf jene Ebene.

33. Wenn zwey parallele Ebenen von einer Ebene geſchnitten werden, ſo ſind ihre Neigungswinkel gegen ſie gleich groß.

Man ziehe in der ſchneidenden Ebene, A, eine ſenkrechte auf die einander parallelen Durchſchnittslinien der parallelen Ebenen, P, P und ſetze durch dieſe ſenkrechte eine auf A ſenkrechte Ebene, B, ſo ſind jene Durchſchnittslinien ſenkrecht auf die Ebene B, nach (25.), und daher ſind die Ebenen P, P, ſenkrecht auf die Ebene B, aus (21.) Die Durchſchnittslinien der Ebene B mit der A und den parallelen Ebenen machen den Neigünswinkel der letztern mit der Ebene A (32.). Da dieſe Durchſchnittslinien ſich parallel ſind, ſo ſind die Neigungswinkel ſich gleich.

34. Parallellinien haben gegen dieſelbe Ebene einerley Neigung.

Wenn zwey Linien, wie AD: (Fig. 2.), parallel ſind, ſo ſind es auch die ſenkrechten von irgend einem Puncte derſelben auf eine gegebene Ebene. (10.), alſo auch die Ebenen der Winkel, wie DAF, (18), folglich auch die Grundlinien, wie DF, in der Ebene, daher ſind die Winkel wie ADF gleich (13.), oder die Neigungswinkel (27.) in den Neigungsebenen ſind ſich gleich.

Effectio iſt die geometriſche Auflöſung oder Conſtruction einer Aufgabe oder Gleichung. Das Kunſtwort wird gegenwärtig ſelten gebraucht.

Eilferprobe, ſ. Rechnungsprobe.

Einfach iſt, was nicht zuſammengeſetzt oder verwickelt iſt. Eine einfache Aufgabe iſt eine ſolche, welche nur einen Werth der geſuchten Größe zuläßt. Ein einfacher Bruch iſt, worin Zähler und Nenner ganze Zahlen ſind. Eine einfache Größe iſt, die nicht aus

andern beſtimmten Theilen oder Factoren zuſammengeſetzt iſt, ob ſie gleich, wie jede Größe, auf unendliche Arten theilbar bleibt. Man möchte ſie eine formloſe Größe nennen. Eine einfache ganze Zahl iſt, die keine ganze Zahl-Factoren enthält, was man auch eine Primzahl nennt.

Einer ſind in dem dekadiſchen Zahlenſyſtem die erſten neun Zahlen; in dem dodekadiſchen die erſten eilf Zahlen; überhaupt in jedem Zahlenſyſtem die erſten ganzen Zahlen von Eins bis zu der nächſten vor der Grundzahl.

Eingebildete Größe, ſ. unmögliche Größe.

Einheit iſt der Begriff, welcher beym Zählen wiederholt wird, oder das Gemeinſame in der Vielheit. Die Einheit iſt entweder eine benannte oder unbenannte (allgemeine). Z. B. zwölf Menſchen, ſieben Thaler, vier Jahre ſind eine Vielheit mit der benannten Einheit, Menſch, Thaler, Jahr; aber zwölf, ſieben, vier ſind eine Vielheit mit einer unbeſtimmten Einheit, oder einzelne Dinge. Wenn die Einheit getheilt wird, aber ſo, daß der Theil eine Beziehung auf das Ganze, die urſprüngliche Einheit, behält, ſo muß man die neue Einheit durch die Benennung, Bruch-Einheit, unterſcheiden. Z. B. bey Dreyviertel Jahr, iſt ein Vierteljahr die Bruch-Einheit. Neun Monate ſind eine Vielheit für ſich, mit der abſoluten Einheit, Monat. — Die Einheit beym Zählen iſt willkührlich. Bey einerley Größe, Menge oder Werth, verhält ſich die Anzahl der Einheiten umgekehrt wie die Einheit.

Einmahleins iſt eine Tafel der Producte je zweyer Zahlen unter Zehn, und zwar in dem dekadiſchen Syſtem. Folgendes iſt ein Stück aus einem Einmahleins in der Dodekadik, worin die Ziffern vor dem Punkte Zwölfer bedeuten.

7 mahl	7	iſt	4 . 1		8 mahl	8	iſt	5 . 4
7 :	8	:	4 . 8		8 :	9	:	6 . 0
7 :	9	:	5 . 3		8 :	10	:	6 . 8
7 :	10	:	5 . 10		8 :	11	:	7 . 4
7 :	11	:	6 . 5		8 :	12	:	8 . 0
7 :	12	:	7 . 0					

Einrichten der Brüche iſt, ſie auf einerley Nenner bringen, ohne ihre Größe zu verändern. S. Bruchrechnung.

Eins iſt die erſte in der Folge der ganzen Zahlen.

Einſchalten, Interpoliren, heißt, aus einigen gegebenen Gliedern einer Fortſchreitung, die mit den Gliedern einer andern Fortſchreitung auf irgend eine Art verknüpft ſind, ein Glied in jener ſo beſtimmen, daß es aus dem zugehörigen Gliede der andern Fortſchreitung vollkommen oder nahe genug auf dieſelbe Art zuſammengeſetzt werde, wie die gegebenen Glieder aus den zu ihnen gehörigen Größen. Die Glieder der zugeordneten Reihe werden als bloße Zahlen betrachtet, und ſind entweder urſprünglich Stellenzahlen für die Glieder der Reihe, oder werden als ſolche gebraucht. Man nennt ſie auch die Wurzeln, und die durch ſie zu beſtimmenden Größen die Functionen der Wurzeln.

1. Wenn jedes Glied der gegebenen Reihe eine algebraiſche Function ſeiner Stelle iſt, ſo iſt die Einſchaltung nichts anders als in dieſer Function für ihre Wurzel ſtatt ganzer Zahlen gebrochene ſetzen, welche die Stelle des einzuſchaltenden Gliedes bezeichnen. So iſt $a^{\frac{n}{m}}$ das nte Glied einer geometriſchen Reihe, die aus der Reihe, $1 : a : a^2 : a^3 : a^4 :$ etc. entſtanden iſt, indem zwiſchen je zwey Gliedern dieſer Reihe, $m - 1$ Glieder in geometriſcher Fortſchreitung eingeſchaltet ſind. Da $(a + b^{\frac{n}{m}}$ auch ein ſolches eingeſchaltetes Glied iſt, ſo hat man in dem

entwickelten Werthe von $(a + b)^n$ ſtatt n nur $\frac{n}{m}$ zu ſetzen, weil dadurch für jeden Terminus des Werthes der Potenz eben ſo der Werth eines eingeſchalteten erhalten wird, ſ. Binomiſcher Lehrſatz, Th. I. S. 328. Gleichfalls wird der für ganze Stellenzahlen gefundene Werth des Gliedes einer arithmetiſchen Reihe irgend einer Ordnung für gebrochne Stellenzahlen eingerichtet, wenn man dieſe ſtatt jener nimmt, ſ. arithm. Reihen höherer Ordn. Th. I. S. 210.

2. Wenn die Glieder einer Reihe durch eine transſcendente Function gegeben werden, oder auch durch eine verwickelte algebraiſche, ſo betrachtet man ein Stück der Reihe als eine arithmetiſche einer höhern Ordnung, in welcher man zwiſchen zwey berechneten Gliedern eine beliebige Anzahl Glieder, in gleichen Abſtänden von einander, mittelſt der Anfangsglieder der Differenzreihen einſchiebt. Die allgemeinen Formeln für dieſe Anfangsglieder ſind in der Differenzenrechnung (48.), und in dem Artikel, Differentiale, S. 823 in einer etwas veränderten Geſtalt, angegeben. Beyſpiele dazu ſind an dem erſtern Orte, und in dem Artikel, Cyklotechnie, S. 692. anzutreffen. Hat man in jedem einzelnen Falle die numeriſchen Werthe der Anfangsglieder in den Differenzreihen berechnet, ſo iſt es leicht, durch die ſucceſſive Addition (mit Beobachtung der Vorzeichen) aus den Gliedern einer Differenzreihe die in der vorhergehenden Reihe zu finden, bis daß man auf die Hauptreihe ſelbſt kommt. Da dieſe Berechnung nur bis zu einer gewiſſen beſtimmten Gränze genau iſt, wenn nämlich die Differenzen nicht zuletzt conſtant werden, ſo entfernen ſich die berechneten eingeſchalteten Glieder immer etwas mehr von dem wahren Werthe. Darum müſſen in der Hauptreihe einige Glieder in größern Abſtänden unmittelbar aus der analytiſchen Formel für dieſelben berechnet, und dieſe hinlänglich genauen Werthe mit denen, welche die Einſchaltung in ihren Stellen liefert, verglichen werden. Fände ſich ein bedeutender Unterſchied, ſo hätte man der Differenzreihen zu

wenige, oder das Intervall der Einſchaltung zu groß genommen.

3. Exempel. In dem Artikel, Differenzenrechnung (50.) iſt für die Sinus der Winkel, 42°; 42° 1′; 42° 2′; 42° 3′; u. ſ. f. der Centeſimaltheilung, gefunden das Anfangsglied der erſten Differenzreihe = + 124109698 Billiontheilchen für den Halbmeſſer als Einheit; der zweyten = — 15126; der dritten = — 3.

Nach den Callerſchen Tafeln, oder nach Hobert und Ideler in der Einleitung, S. XXIX. iſt sin 42° = 612907 053653 ſolcher Theilchen. Hieraus werden nun die Sinus von 42° 1′; 42° 2′, u. ff. gefunden.

III.	II.	I.
— 3	— 15126	+ 124109698
	— 15129	+ 124094572
	— 15132	+ 124079443
	— 15135	+ 124064311
	— 15138	+ 124049176
	— 15141	+ 124034038
		+ 124018897

Aus den erſten Differenzen werden nun gefunden die

Sinus		Bogen	
612907	053653	42°	0′
613031	163351	42	1
613155	257923	42	2
613279	337366	42	3
613403	401677	42	4
613527	450853	42	5
613651	484891	42	6
613775	503788	42	7

Der Sinus von $42^\circ 7'$ iſt in dem von Hobert und Ideler a. a. O. berechneten Beyſpiele 0,613775 503781 22.. Die Rechnung iſt daſelbſt bis zu den ſechsten Differenzen und bis auf die 28ſte Decimalſtelle getrieben. Die Werthe der auf dieſe Art berechneten Sinus werden allmählig immer mehr von den wahren abweichen. Wollte man ſie bis in die zehnte Decimalſtelle genau haben, ſo muß man die Sinus von Grad zu Grad, nach den Umſtänden auch für größere oder kleinere Intervalle der Winkel, hinlänglich genau berechnen, und bey jedem Abſchnitte von Einſchaltungen die dazu gehörigen Anfangsglieder der Differenzreihen ſuchen. So verfährt man in jedem andern Falle.

4. Wenn für die Größen einer Reihe keine Formel ihrer Zuſammenſetzung aus den Stellenzahlen vorhanden iſt, wie es ſich oft ereignet, wenn ſie durch Beobachtung gegeben werden, oder wenn es Zahlen in Tafeln ſind, die durch eine ſehr verwickelte Rechnung gefunden worden, ſo iſt das allgemeinſte Mittel zur Einſchaltung, daß man die gegebenen Größen als Glieder einer arithmetiſchen Reihe einer gewiſſen Ordnung anſehe, ſie mögen gleiche oder ungleiche Abſtände von einander haben. Je näher dieſe Vorausſetzung der Wahrheit kommt, deſto weiter dürfen die gegebenen Größen von einander abſtehen, und man wird ſelbſt noch auſſerhalb ihres Bezirks die Einſchaltung fortſetzen können; in dem gegenſeitigen Falle wird man nur die zwiſchen den gegebenen Größen liegenden ſuchen, und den Abſtand der äuſſerſten unter ihnen nur mäßig ſeyn laſſen dürfen.

5. Bey der Interpolation berechneter Tafeln kann man dieſes Verfahren immer anwenden, weil die Abſtände und die Unterſchiede der darin angegebenen Größen klein genug ſind, daß der Fehler, den man dabey begehen mag, ganz unbedeutend wird, und weil man, wo zwey oder drey gegebene Größen nicht Genüge thun, mehrere nehmen kann. Allein bey Größen, die durch Beobachtung gegeben werden, iſt es oft nicht genügend, eine individuelle Größe zu finden, ſondern man will eine ſolche allgemeine Formel

haben, welche die Verknüpfung der veränderlichen Größen in der Natur möglichſt genau darſtelle, und ſelbſt die Anomalien der Beobachtungen und zuſammengeſetzter Wirkungen zu verbeſſern diene. Darum wird man auf Formeln von verſchiedener Geſtalt bedacht ſeyn müſſen, um die in jedem Falle am beſten zutreffende wählen zu können. So wie man durch eine gegebene Anzahl Puncte vielerley krumme Linien ziehen kann, ſo kann man auch mancherley hypothetiſche Formeln für die gegebenen und die einzuſchaltenden Größen anwenden. Die gegebenen Größen ſind als gegebene Ordinaten einer Curve in gegebenen Abſtänden, oder für gegebene Abſciſſen zu betrachten. Es kommt hier theils auf die Form der Verbindung, theils auch auf die Wahl der Größe an, welche die Stellenzahl vertritt. Gegenwärtig wollen wir die gegebenen und die einzuſchaltenden Größen als Glieder einer arithmetiſchen Reihe einer gewiſſen Ordnung, oder als Ordinaten an einer paraboliſchen Linie, betrachten,

Anwendung der arithmetiſchen Reihen zur Einſchaltung.

6. Die Abſtände der gegebenen Größen von einander, ſeyn gleich groß, die Anfangsglieder der Differenzreihen ſeyn a, b, c, d, etc. Das Anfangsglied, oder das zu der Stellenzahl o gehörige, ſey A, die Stelle irgend eines Gliedes, x, das Glied ſelbſt, A + y, ſo iſt (Arithm. Reihen höh. Ordn. 7. u. 25.)

$$y = ax + \frac{bx(x-1)}{1.2} + \frac{cx(x-1)(x-2)}{1.2.3} + \frac{dx(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Sind die gegebenen Größen, A; $A+\alpha$; $A+\beta$; $A+\gamma$; $A+\delta$; etc. ſo iſt

$a=\alpha$; $b=\beta-2\alpha$; $c=\gamma-3\beta+3\alpha$; $d=\delta-4\gamma+6\beta-4\alpha$; u. ſ. f.

7. Exempel. Aus den größern logarithmiſchen Tafeln ſind

Zahlen	Logarithmen	Unterſchiede
10000	4,00000 00000	
10002	4,00008 68502	868502
10004	4,00017 36831	868329
10006	4,00026 04985	868154.

Hier iſt $a = 868502$ Zehntauſendmilliontheilchen; $b = -173$; $c = -2$ dergleichen. Man ſucht log. 100003, ſo iſt $x = \frac{3}{2}$; $ax = +1302753$;

$$\frac{bx(x-1)}{1.2} = -65, \quad \frac{cx(x-1)(x-2)}{1.2.3} = +\frac{2}{10};$$

und folglich log. $10003 = 4,0001302688$, wie in den Tafeln.

8. In der obigen Formel ſind 1; 2; 3; 4; u. ſ. f. die Abſtände der Glieder von dem Anfangsgliede. Setzt man die Unterſchiede derſelben ungleich, und die Abſtände von dem Anfangsgliede, m, n, p, q, etc. ſo entſteht die allgemeinere, aber jener analoge Formel,

$$y = \frac{Px}{m} + \frac{Qx(x-m)}{mn} + \frac{Rx(x-m)(x-n)}{mnp}$$
$$+ \frac{Sx(x-m)(x-n)(x-p)}{mnpq} + \text{etc.}$$

wo die Coefficienten P, Q, R, S, etc. durch die gegebenen Werthe von y zu beſtimmen ſind. Dieſe ſeyn für die

Abſtände m, n, p, q, etc.
α, β, γ, δ, etc.

Das Anfangsglied, für welches $x = 0$ iſt, ſey A, alſo das Glied in dem Abſtande m ſey $A + \alpha$, u. ſ. f. in dem Abſtande x ſey es $A + q$. Nun iſt

$$\alpha = P;\ \beta = \frac{Pn}{m} + \frac{Qn.n-m.}{mn};$$

$$\gamma = \frac{Pp}{m} + \frac{Qp.p-m.}{mn} + \frac{Rp.p-m.p-n}{mnp};$$

$$\delta = \frac{Pq}{m} + \frac{Qq.q-m.}{mn} + \frac{Rq\ q-m.q-n.}{mnp}$$

$$+ \frac{Sq.q-m\ q-n.q-p.}{mnpq};$$

u. ſ. f.

Mittelſt dieſer Gleichungen wird der Werth jedes Coeffi=cienten durch die vorhergehenden gefunden. Werden dieſe durch die gegebenen Werthe von α, β, etc. und durch die Abſtände nach der Reihe zuſammengeſetzt, ſo wird gefunden:

$$P = \alpha$$

$$Q = \frac{m\beta}{n-m} + \frac{n\alpha}{m-n}$$

$$R = \frac{mn\gamma}{p-m.p-n.} + \frac{mp\beta}{n-m.n-p.} + \frac{np\alpha}{m-p.m-n.}$$

$$S = \frac{mnp\delta}{q-m.q-n.q-p.} + \frac{mnq\gamma}{p-m.p-n.p-q.}$$

$$+ \frac{mpq\beta}{n-m.n-p.n-q.} + \frac{npq\alpha}{m-n.m-p.m-q.}$$

u. ſ. w.

Die Art der Zuſammenſetzung iſt offenbar und übereinſtimmend. In den binomiſchen Factoren der Nenner iſt immer derjenige Abſtand vorangeſetzt, der zu dem in dem Zähler befindlichen Factor aus den Größen α, β, γ, δ, etc. gehört, um die Formen ganz übereinſtimmig zu machen.

Die Abſtände der Glieder von dem Anfangsgliede können auch zum Theil negativ genommen werden, ſo wie auch die Unterſchiede α, β, γ, etc von dem Anfangsgliede. Die Werthe von m, n, p, q, etc. brauchen nicht der Größe nach auf einander zu folgen.

9. Wenn die Abſtände der gegebenen Größen von einander gleich groß und $= m$ ſind, wenn ferner $n = 2m$; $p = 3m$; $q = 4m$; u. ſ. f. ſo verwandeln ſich die Werthe von P, Q, R, S, etc. in die von a, b, c, d, etc. in (6.).

10. Wenn die Glieder der Formeln für y entwickelt, und nach den Potenzen von x geordnet werden, ſo geht eine Formel, wie

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{etc.}$$

hervor. Die Coefficienten von x können mittelſt der für P, Q, etc. gefundenen Werthe beſtimmt werden. Unabhängig von dieſen liefert ſie folgendes Verfahren.

Es ſeyn in den

Stellen: o, m, n, p, q, r, etc.

die Werthe von y: o, α, β, γ, δ, ε, etc.

Zu der Stelle x gehöre der durch y bezeichnete Werth, und es ſey

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{etc.}$$

wo a, b, c, d, e, etc. irgend welche Größen ſeyn mögen. Werden für x die Werthe m, n, p, etc. geſetzt, ſo iſt, wenn die Gleichung für y nicht mehr als fünf Glieder hat

$$\text{I.} \quad \alpha = am + bm^2 + cm^3 + dm^4 + em^5$$

$$\text{II.} \quad \beta = an + bn^2 + cn^3 + dn^4 + en^5$$

u. ſ. f. indem für die Buchſtaben α, β, etc. wie auch m, n, etc. nach der Reihe der nächſtfolgende geſetzt wird.

Es ſey $\frac{\alpha - o}{m - o}$ oder $\frac{\alpha}{m} = A$; $\frac{\beta - \alpha}{n - m} = A'$; $\frac{\gamma - \beta}{p - n} = A''$; $\frac{\delta - \gamma}{q - p} = A'''$, u. ſ. f. wo man den Werth von A mit dem obigen, als Anfangsgliede, nicht verwechſeln wird, ſo iſt

$$\text{I. } A = a + bm + cm^2 + dm^3 + em^4$$

$$\text{II. } A' = a + b(m+n) + c(m^2 + mn + n^2) + d(m^3 + m^2n + mn^2 + n^3) + e(m^4 + m^3n + m^2n^2 + mn^3 + n^4)$$

u. ſ. f. für A'', A''', etc.

Ferner ſetze man $\frac{A'-A}{n} = B$; $\frac{A''-A'}{p-m} = B'$; $\frac{A'''-A''}{q-n} = B''$, u. ſ. f. ſo iſt

$$\text{I. } B = b + c(m+n) + d(m^2 + mn + n^2) + e(m^3 + m^2n + mn^2 + n^3)$$

$$\text{II. } B' = b + c(m+n+p) + d(m^2 + mn + mp + n^2 + np + p^2) + e(m^3 + m^2n + m^2p + mn^2 + mnp + mp^2 + n^3 + n^2p + np^2 + p^3)$$

u. ſ. f.

Man ſetze nun $\frac{B'-B}{p} = C$; $\frac{B''-B'}{q-m} = C'$; $\frac{B'''-B''}{r-n} = C''$, ſo iſt

$$\text{I. } C = c + d(m+n+p) + e(m^2 + mn + mp + n^2 + np + p^2).$$

$$\text{II. } C' = c + d(m+n+p+q) + e(m^2 + mn + mp + mq + n^2 + np + nq + p^2 + pq + q^2)$$

und ſo auch C''.

Ferner ſetze man $\frac{C'-C}{q} = D$; $\frac{C''-C'}{r-m} = D'$;

ſo iſt

$$\text{I. } D = d + e(m+n+p+q)$$

$$\text{II. } D' = d + e(m+n+p+q+r).$$

Noch ſey $\frac{D'-D}{r} = E$, ſo iſt

$$E = e.$$

Die Größen A, B, C, D, E, ſind die Anfangsglieder der Differenzreihen, ſo fern die Differenzen durch die Abſtände der Glieder auf die gezeigte Art modificirt werden. Das Geſetz, wie die mit a, b, c, d, etc. ver-

bundenen Factoren gebildet werden, iſt offenbar. Sie beſtehen aus den Combinationen der Stellenzahlen m, n, p, etc. mit Wiederholungen, aber ohne Verſetzungen. In dem erſten Differenzgliede jeder Ordnung iſt die Anzahl der combinirten Größen um Eins kleiner als in den folgenden Gliedern, weil der Abſtand des Gliedes Null vom Anfang $= 0$ iſt.

11. Hieraus ergeben ſich die Werthe der Coefficienten in der Formel für y. Es iſt

$$e = E$$
$$d = D - (m + n + p + q) E$$
$$c = C - (m + n + p) D + (mn + mp + mq + np + nq + pq) E$$
$$b = B - (m + n) C + (mn + mp + np) D - (mnp + mnq + mpq + npq) E$$
$$a = A - mB + mnC - mnpD + mnpqE$$

Das Geſetz der Formation iſt auch hier einleuchtend. Die Combinationen ſind hier ohne Wiederholungen.

12. Ordnet man die Glieder der Formel für y nach den Anfangsgliedern der Differenzreihen, ſo iſt

$$y = Ax + Bx(x - m) + Cx(x^2 - (m + n)x + mn) + Dx(x^3 - (m + n + p)x^2 + (mn + mp + np)x - mnp) + Ex(x^4 - (m + n + p + q)x^3 + (mn + mp + mq + np + nq + pq)x^2 - (mnp + mnq + mpq + npq)x + mnpq).$$

Die Factoren zu Bx, Cx, Dx, Ex, werden aus den Factoren $x - m$; $x - n$; $x - p$; $x - q$, zuſammengeſetzt, ſo daß

$$y = Ax + Bx(x - m) + Cx(x - m)(x - n) + Dx(x - m)(x - n)(x - p) + Ex(x - m)(x - n)(x - p)(x - q)$$

u. ſ. w. wenn noch mehrere Glieder der Reihe gegeben ſind.

13. Hier haben wir dieſelbe Form für y, welche in (8.) gefunden iſt. Dort werden aber die Coefficienten P, Q, R, S, etc. aus den Größen α, β, γ, δ, etc. unmittelbar zuſammengeſetzt; hier ſind A, B, C, D. etc. Anfangsglieder von Differenzreihen mit Rückſicht auf die

Abſtände der Glieder von einander, ſowohl der nächſten als der entferntern. Die Form für y nach der Zuſammenſetzung in (12) hat Newton in den Princip. Philoſ. nat. L. III. Lemma 5. caſ. 2. angegeben, und in caſ 1. die Form für y in (6.), bey gleich großen Abſtänden der Glieder von einander.

14. Wo nur zwey Größen, A und $A+\alpha$, in dem Abſtande m gegeben ſind, iſt der Unterſchied der interpolirten, $A+y$, von A der arithmetiſche oder einfache Proportionaltheil $y=\frac{\alpha x}{m}$, oder es iſt $m:x=\alpha:y$. Dieſe Interpolation findet nur Statt bey Functionen, deren Veränderungen ſehr nahe den Unterſchieden ihrer Wurzeln oder Stellenzahlen proportional ſind, oder dient nur zu einer ungefähren Beſtimmung des eingeſchalteten Werthes.

15. Es ſeyn drey Größen, A, $A+\alpha$, $A+\beta$, mit den Stellenzahlen, o, m, n, gegeben; das Glied $A+y$ iſt in der Stelle x einzuſchalten, ſo iſt nach der Formel in (8.)

$$y=\frac{x-n}{m-n}\cdot\frac{\alpha x}{m}+\frac{x-m}{n-m}\cdot\frac{\beta x}{n}.$$

Nimmt man zum erſten Theile den einfachen Proportionaltheil $\frac{\alpha x}{m}$, ſo iſt

$$y=\frac{\alpha x}{m}+\frac{x-m}{n-m}\left(\frac{\beta x}{n}-\frac{\alpha x}{m}\right).$$

Nimmt man aber zum erſten Theile den Proportionaltheil $\frac{\beta x}{n}$, ſo iſt

$$y=\frac{\beta x}{n}+\frac{x-n}{m-n}\left(\frac{\alpha x}{m}-\frac{\beta x}{n}\right).$$

Die Function $A+y$ verändert ſich ungleichförmig. Nimmt ſie ſtarker zu als nach dem Verhältniſſe $m:x$, ſo iſt für einen Werth zwiſchen den beiden, $A+\alpha$, und

$A+\beta$, wenn n größer als m iſt, der Proportionaltheil $\frac{\alpha x}{m}$ kleiner als y, aber $\frac{\beta x}{n}$ größer als y, daher die Verbeſſerung jenes additiv, des zweyten ſubtractiv iſt; in dem entgegengeſetzten Falle umgekehrt.

16. Es ſeyn vier Größen, A, $A+\alpha$; $A+\beta$, $A+\gamma$, gegeben, mit den Stellenzahlen, o, m, n, p; das Glied $A+y$ in der Stelle x ſey einzuſchalten. Nach der Formel (8) iſt, wenn dieſelbe nach den drey einfachen Proportionaltheilen geordnet wird,

$$y = \frac{x-n.x-p.}{m-n.m-p.} \cdot \frac{\alpha x}{m}$$
$$+ \frac{x-m.x-p.}{n-m.n-p.} \cdot \frac{\beta x}{n}$$
$$+ \frac{x-m.x-n.}{p-m.p-n} \cdot \frac{\gamma x}{p}.$$

Die Theile von y müſſen aus dem einfachen Proportionaltheile und aus den Abſtänden m, n, p, x auf gleichförmige Art gebildet werden. Daher braucht man nur einen der Theile zu finden, um die andern durch gehörige Vertauſchungen daraus herzuleiten.

Wie die Abſtände, m, n, p, und x, der Größe nach auf einander folgen, iſt willkührlich. Es iſt hier nur auf die Symmetrie der Zuſammenſetzung geſehen. Einige derſelben mögen negativ genommen werden, ſo wie die Werthe von α, β, γ.

Das Geſetz der Formation für mehr als drey Unterſchiede von dem Anfangsgliede A erhellt ſchon vollkommen.

17. Nimmt man zum erſten Theile den Proportionaltheil $\frac{\alpha x}{m}$, ſo muß dieſer durch die Unterſchiede deſſelben von den beiden andern verbeſſert werden, auf ähnliche Art wie bey der zweyten Formel in (15.). Zu dem Ende ziehe man von dem Bruche $\frac{x-n.x-p.}{m-n.m-p.}$ erſtlich die Einheit

ab, ſo bleibt $\frac{x-m}{m-n} \,.\, \frac{x+m-n-p}{m-p}$, oder $\frac{x-m}{n-m}$ $\frac{x+m-n-p}{p-m}$. Dazu addire man den Factor des zweyten Proportionaltheils, nämlich $\frac{x-m}{n-m} \,.\, \frac{x-p}{n-p}$, ſo iſt, nach den gehörigen Reductionen, die Summe $= \frac{x-m\,.\,x-n.}{p-m\,.\,n-p.}$, oder $= - \frac{x-m\,.\,x-n.}{p-m\,.\,p-n.}$.

Alſo iſt $\frac{x-m}{n-m} \,.\, \frac{x+m-n-p}{p-m} = - \frac{x-m\,.\,x-p.}{n-m\,.\,n-p.}$ $- \frac{x-m\,.\,x-n.}{p-m\,.\,p-n.}$, und

$$y = \frac{\alpha x}{m} + \frac{x-m\,.\,x-p.}{n-m\,.\,n-p.} \left(\frac{\beta x}{n} - \frac{\alpha x}{m}\right)$$
$$+ \frac{x-m\,.\,x-n.}{p-m\,.\,p-n.} \left(\frac{\gamma x}{p} - \frac{\alpha x}{m}\right).$$

Folgen die Abſtände m, n, p der Ordnung nach auf einander, und wird x zwiſchen m und n, genommen, ſo iſt

$$y = \frac{\alpha x}{m} + \frac{x-m\,.\,p-x.}{n-m\,.\,p-n.} \left(\frac{\beta x}{n} - \frac{\alpha x}{m}\right)$$
$$- \frac{x-m\,.\,n-x.}{p-m\,.\,p-n.} \left(\frac{\gamma x}{p} - \frac{\alpha x}{m}\right).$$

Die beiden Verbeſſerungen ſind, bey dieſer Annahme, von entgegengeſetzter Beſchaffenheit, wenn die Proportionaltheile zunehmen oder abnehmen.

18. Nimmt man zum erſten Theile der Formel den Proportionaltheil $\frac{\beta x}{n}$, ſo braucht man nur α und β, ſo wie m und n mit einander zu vertauſchen. Es iſt

$$y = \frac{\beta x}{n} + \frac{x-n.x-p.}{m-n.m-p.}\left(\frac{\alpha x}{m} - \frac{\beta x}{n}\right) + \frac{x-n.x-m.}{p-n.p-m.}\left(\frac{\gamma x}{p} - \frac{\beta x}{n}\right)$$

oder

$$y = \frac{\beta x}{n} - \frac{n-x.p-x.}{n-m.p-m.}\left(\frac{\beta x}{n} - \frac{\alpha x}{m}\right) - \frac{n-x.x-m.}{p-n.p-m.}\left(\frac{\gamma x}{p} - \frac{\beta x}{n}\right).$$

Wollte man $\frac{\gamma x}{p}$ zum erſten Theile der Formel nehmen, ſo hätte man α und γ, ſo wie m und p mit einander zu vertauſchen.

19. Es ſey $p = n + m$, und $\gamma = \beta + \delta$, ſo iſt

$$y = \frac{\beta x}{n} - \frac{n-x.p-x.}{n-m.p-m.}\left(\frac{\beta x}{n} - \frac{\alpha x}{m}\right) - \frac{n-x.x-m.}{n.n+m.}\left(\frac{\delta x}{n} - \frac{\beta x}{n}\right)$$

Dieſe Formel iſt in den Ephemeriden zur Interpolation der Länge und Breite des Mondes ſehr brauchbar.

20. Exempel I. Aus dem aſtronomiſchen Jahrbuche für 1803 iſt, nach bürgerlicher Zeit,

	Länge des Mondes	
26. Febr. Mittern.	47° 33′ 38″	
- - - 1 Uhr	48. 8. 39.	0° 35′ 1″ = α
27. Febr. Mittern.	61. 21. 21.	13. 47. 43 = β
- - - 1 Uhr	61. 55. 21.	14. 21. 43 = γ

Es ſoll die Länge des Mondes für 12 Uhr Mittags am 26. Febr. gefunden werden. Man nehme bloß die drey erſten Angaben, und gebrauche die dritte Formel in (15.). Es iſt

$$\frac{\alpha x}{m} = 7^\circ 0' 12''$$

$$\frac{\beta x}{n} = 6.53.51$$

$$\frac{\beta x}{n} - \frac{\alpha x}{m} = -0.6.21.$$

$$m = 1$$

$$n = 24$$

$$x = 12$$

$$\frac{n-x}{n-m} = \frac{12}{23}$$

Bewegung des Mondes in 12 Stunden,

$y = 6^\circ 53' 51'' + 0^\circ 3' 19'' = 6^\circ 57' 10''$

Länge des Mondes zu Mittag 54. 30. 48.

Nimmt man die Länge am 27. Febr. Mitternacht zum Anfangsgliede, ſo iſt

$$\alpha = +\ 0^\circ 34' 0''$$

$$\beta = -\ 13.47.43.$$

$$\frac{\beta x}{n} = -\ 6.53.51.$$

$$\frac{\alpha x}{m} = -\ 6.48.0.$$

$$m = +1$$

$$n = -24$$

$$x = -12$$

$$\frac{n-x}{n-m} = +\frac{12}{25}$$

Bewegung des Mondes in 12 St. rückwärts genommen,

$$y = -6^\circ 53' 51'' + 2' 48'' = -6^\circ 51' 3''$$

Länge des Mondes am 26 Febr Mittag, 54 30. 18.

Der Unterſchied beider Reſultate iſt beträchtlich; es iſt aber auch die Ungleichheit der Bewegung des Mondes ihrer größten Gränze nahe. Gewöhnlich iſt die Zeit, für welche der Ort des Mondes geſucht wird, nicht über acht Stunden von der einen oder der andern Mitternacht entfernt, daher dann die eine oder die andere Rechnung mit mehrerer Richtigkeit gebraucht werden kann. Für den Fall, da man rückwärts rechnet, ſetze man die Bewegung in der 25ſten Stunde $= \delta$, und nehme alle Bezeichnungen abſolut, ſo iſt

$$y = \frac{\beta x}{n} - \frac{n}{n+m}\ \frac{x}{} \left(\frac{\beta x}{n} - \frac{\delta x}{m}\right),$$

welcher Werth ſubtractiv iſt.

Nach der Formel (19.) wird der Unterſchied der mittlern Bewegung von einer Mitternacht zur andern und

der wirklichen, um jede dieſer Zeiten, zugleich in Rechnung gebracht, daher ſie ein ſehr genaues Reſultat giebt. In unſerm Beyſpiele iſt

$$y = 6^\circ 53' 51'' + \frac{12.13}{23.24}(0^\circ 6' 21'')$$
$$+ \frac{12.11}{24.25}(0^\circ 5' 51'')$$
$$= 6^\circ 53' 51'' + 1' 47'' + 1' 17''$$
$$= 6^\circ 56' 55''.$$

Länge des Mondes zu Mittag, $54^\circ 30' 33''$, welche gerade das Mittel zwiſchen den beiden vorher gefundenen iſt.

Die Formel (19.) habe ich in dem aſtronomiſchen Jahrbuche für 1788 zur Berechnung des Mondslaufes, in der dazu ſchicklichen Form, mitgetheilt. Die Vorſchrift, welche Lambert in dem Jahrbuche für 1776 S. 42. gegeben hat, entſteht aus der erſten Formel in (15.), wenn daſelbſt ſtatt des Factors $\frac{x-m}{n-m}$ geſetzt wird $\frac{x}{n}$, und bey rückwärts angeſtellter Berechnung β, n, x, y negativ genommen werden. Um die Zeit des Mittags herum giebt dieſe Abkürzung ein genaüeres Reſultat.

21. Exempel II. Boſſut führt in ſeinem Traité d'Hydrodynamique, T. II. ch. 8 à Paris an. IV. Verſuche über die Waſſermengen an, die aus einem Behälter durch horizontale Röhren von verſchiedener Länge in einer gewiſſen Zeit ausfloſſen. Unter dieſen ſind folgende. Die Höhe des Waſſers in dem Behälter über der Axe der Röhre war ein Fuß; der Durchmeſſer der Röhre 16 Lin. Die ausgeflloſſene Waſſermenge in einer Minute war wie folget:

Länge der Röhre	Waſſermenge
30 F.	2778 Cub. Zoll
60 =	1957
90 =	1587
120	1351
130	1178
180	1052

Die Waſſermenge bey einer kurzen Anſatzröhre von zwey Zoll ſetzt Boſſut zu 6330 Cub. Zoll an. Dieſe bezeichne man durch M, den Unterſchied derſelben von der Waſſermenge durch eine Röhre von der Länge 30 x durch y, und nehme den erſten, dritten und ſechſten Verſuch heraus, um durch dieſe eine empiriſche Formel für die Waſſermenge zu finden. Es ſey dieſe = M — y und

$$y = ax + bx^2 + cx^3.$$

Nun iſt für

x	1	3	6
y	3552	4743	5278

Man ſuche zufolge (10.) die gehörig dividirten Anfangs-Differenzen. Es iſt

$$A = 3552;\; A' = \frac{1191}{2} = 595,5;$$

$$A'' = \frac{535}{3} = 178,33. \text{ Daraus}$$

$$B = -\frac{2956,5}{3} = -985,5;\; B'' = -\frac{417,17}{5} = -83,43.$$

Hieraus

$$C = +\frac{902,07}{6} = +150,34.$$

Dieſe geben nach (11.)

$$a = A - B + 3C = +4988,52$$
$$b = B - 4C = -1586,86$$
$$c = C = +150,34;$$

alſo

$$y = + 4988{,}52x - 1536{,}86x^2 + 150{,}34x^3.$$

Die Rechnungsprobe iſt, daß man für x ſetze 1 oder 3, oder 6, wodurch y die angeführten Werthe erhalten muß, wie es auch genau oder ſehr nahe geſchieht. Allein für die nicht zum Grunde gelegten Werthe von x weichen die Rechnungswerthe von y weit von den berechneten ab. Denn für $x = + 2$ iſt $y = 4832$, und die Waſſermenge $M = 1498$ ſtatt 1957. Für $x = + 4$ iſt $= 4186$, und $M = 2144$ ſtatt 1351. Für $x = 5$ iſt $y = 4064$ und $M = 2266$ ſtatt 1178. Die Formel für y hat ein Größtes und ein Kleinſtes, jenes für x zwiſchen + 2 und + 3; dieſes für x nahe = + 5. Sie iſt daher der vorgegebenen Reihe nicht angemeſſen, in welcher die Werthe von y ohne Wechſel zunehmen. Dieſer Fall iſt daher zur Anwendung der arithmetiſchen Reihen nicht geſchickt. Auch bleiben die Differenzen in den Reihen derſelben ſehr ungleich. Vielmehr müßte man die Reihe als eine rücklaufende betrachten. Boſſut hat dies nicht beachtet, auch nicht der Verfaſſer des Artikels, Interpolation, in dem mathematiſchen Theile des Dictionaire encyclopédique.

22. Wenn in einer Reihe die Unterſchiede der Glieder von dem Anfangsgliede für gleiche entgegengeſetzte x gleich und gleichnamig ſind; oder als ſolche ſchicklich angenommen werden, ſo hat y die Form

$$y = ax^2 + bx^4 + cx^6 + dx^8 + \text{etc.}$$

und nach der Formel in (8.)

$$y = \frac{Px^2}{m^2} + \frac{Qx^2(x^2-m^2)}{m^2n^2} + \frac{Rx^2(x^2-m^2)(x^2-n^2)}{m^2n^2p^2} + \text{etc.}$$

In den entwickelten Formeln iſt x^2, m^2, n^2, p^2, etc. ſtatt x, m, n, p, etc. zu ſetzen.

23. Sind aber die Unterſchiede der Glieder von dem Anfangsgliede für gleiche entgegengeſetzte x gleich und ungleichnamig, ſo muß

$$y = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + \text{etc.}$$

genommen werden. Die Formel in (8.) erhält die Geſtalt

$$y = \frac{Px}{m} + \frac{Qx(x^2 - m^2)}{mn^2} + \frac{Rx(x^2-m^2)(x^2-n^2)}{mn^2p^2}$$
$$+ \frac{Sx(x^2-m^2)(x^2-n^2)(x^2-p^2)}{mn^2p^2q^2} + \text{etc.}$$

Aus der letztern Formel wird auf gleiche Art wie in (15.), bey zwey gegebenen Unterſchieden, $\pm\alpha$, $\pm\beta$, erhalten

$$y = \frac{x^2-n^2}{m^2-n^2} \cdot \frac{\alpha x}{m} + \frac{x^2-m^2}{n^2-m^2} \cdot \frac{\beta x}{n}.$$

Bey drey gegebenen Unterſchieden, $\pm\alpha$; $\pm\beta$; $\pm\gamma$, wie in (16.)

$$y = \frac{x^2-n^2 . x^2-p^2.}{m^2-n^2 . m^2-p^2.} \cdot \frac{\alpha x}{m}$$
$$+ \frac{x^2-m^2 . x^2-p^2.}{n^2-m^2 . n^2-p^2.} \cdot \frac{\beta x}{n}$$
$$+ \frac{x^2-m^2 . x^2-n^2}{p^2-m^2 . p^2-n^2} \cdot \frac{\gamma x}{p}.$$

Die Ähnlichkeit dieſer Formeln mit denen in (15. 16.) entſteht daher, daß hier doppelt ſo viele Glieder, auſſer dem Anfangsgliede, gegeben ſind, als Unterſchiede von dieſem gegeben werden. Daher kommen auſſer den Factoren (oder Diſtanzunterſchieden), $x-m$, $x-n$, $x-p$, etc. auch $x+m$, $x+n$, $x+p$, etc. vor, ſo auch nebſt $m-n$, $m-p$, $n-m$, $n-p$, etc. die Abſtände $m+n$, $m+p$, $n+m$, $n+p$, etc.

Es kann auch die Reihe für y aus zwey Reihen, einer mit geraden Potenzen von x, der andern mit ungeraden Potenzen, zuſammengeſetzt werden müſſen. Man ſehe Lambert vom Einſchalten, in dem dritten Theile der Beyträge zur Mathem. §. 36. ff.

Anwendung der rücklaufenden Reihen zum Einſchalten.

24. Eine rücklaufende Reihe iſt, worin jedes Glied aus einem, zweyen, dreyen, oder mehrern der Ordnung nach vorhergehenden Gliedern, durch die Multiplication eines jeden mit einer unveränderlichen beſondern Größe zuſammengeſetzt wird. Die geometriſche Reihe iſt die einfachſte dieſer Art. Eine rücklaufende Reihe der zweyten Ordnung iſt die Reihe.

$$A, B, C, D, E, F \ldots P, Q, R, \text{ etc.}$$

wenn, nach dem A, B willkührlich beſtimmt ſind, die folgenden Glieder durch je zwey vorhergehende auf die gedachte Art zuſammengeſetzt werden; nämlich $C = \alpha B - \beta A$; $D = \alpha C - \beta B$; $E = \alpha D - \beta C$; ... $R = \alpha Q - \beta P$, u. ſ. f. Die Multiplicatoren, α, β mögen auch negativ genommen werden. Dieſe mit ihrem Vorzeichen verbunden machen die Scale der Relation aus, nämlich $+\alpha$; $-\beta$.

25. Sind in einer rücklaufenden Reihe der zweyten Ordnung die vier Glieder, A, B, C, D, gegeben, ſo iſt durch dieſe die Scale der Relation beſtimmt. Nämlich aus den Gleichungen, $C = \alpha B - \beta A$, und $D = \alpha C - \beta B$, folgt

$$\alpha = \frac{AD - BC}{AC - BB}; \quad \beta = \frac{BD - CC}{AC - BB}.$$

Nun formire man die quadratiſche Gleichung, $1 - \alpha z + \beta z^2 = 0$, und ſuche deren Wurzeln, welche $\frac{1}{p}$ und $\frac{1}{q}$ ſeyn. Sind dieſe mögliche Größen, wenn nämlich $\alpha\alpha > 4\beta$ iſt, ſo nehme man $a = \frac{Aq - B}{q - p}$; $b = \frac{B - Ap}{q - p}$, und es iſt das n te Glied nach dem Anfangsgliede, $F = ap^n + bq^n$.

26. Hat die Gleichung $1 - \alpha z + \beta z^2 = 0$ zwey gleiche und gleichnamige Wurzeln, weil $\alpha^2 = 4\beta$ iſt, ſo iſt $P = ((n+1)a + b)\, p^n$, wo $a = \frac{B - Ap}{p}$;

$b = \frac{2Ap - B}{p}$ iſt. In dieſem Falle iſt $p = q = \frac{1}{2}\alpha$; und $p^2 = \beta$.

27. Hat die Gleichung, $1 - \alpha z + \beta z^2 = 0$, zwey unmögliche Wurzeln, weil $\alpha\alpha < 4\beta$ iſt, ſo iſt

$$P = \frac{a \sin(n+1)\varphi + b \sin n\varphi}{\sin\varphi} p^n, \text{ wo } p = \sqrt{\beta};$$

$$\cos\varphi = \frac{\alpha}{2p}, \ a = A; \ b = \frac{B}{p} - 2A\cos\varphi \text{ iſt.}$$

28. Die Herleitung dieſer Formen des allgemeinen Gliedes wird in dem Artikel, rücklaufende Reihen, gezeigt. Inzwiſchen bemerke man, daß aus den Werthen des Gliedes P und des nächſt folgenden Q das auf dieſes folgende R mittelſt der Relationsſcale, $+\alpha$; $-\beta$, entſteht. In dem erſten Falle (25.) iſt $\alpha = p + q$, und $\beta = pq$; in dem zweyten iſt $\alpha = 2p = 2q$, und $\beta = p^2$; in dem dritten (27.) iſt $\alpha = 2p\cos\varphi$; $\beta = p^2$. Für den Fall (27.) iſt zu erinnern, daß $2\sin m\varphi . \cos\varphi = \sin(m+1)\varphi + \sin(m-1)\varphi$ iſt.

29. Bey der Anwendung einer rücklaufenden Reihe der zweyten Ordnung zur Interpolation leite man aus vier auf einander in gleichen Abſtänden folgenden, gegebenen Gliedern erſtlich die Glieder der Scale, α und β her, woraus ſich p und q, und ferner a und b ergeben. Für ein einzuſchaltendes Glied ſetzt man nun in dem allgemeinen Ausdruck eines Gliedes die Stellenzahl deſſelben, n, ſo wird dadurch der Werth jenes Gliedes gefunden, mehr oder weniger genau, nachdem die Vorausſetzung einer rücklaufenden Reihe mehr oder weniger der wirklichen Reihe angemeſſen iſt.

30. Wenn von den möglichen Wurzeln eine, als p, negativ iſt, ſo ſind die geraden Potenzen von p poſitiv, die ungeraden negativ, und zwiſchen zwey nächſt auf einander folgenden ganzen Potenzen iſt ein Wechſel des Poſitiven und Negativen. Um dieſen Wechſel bey der Interpolation zu erhalten, ſetze man zu p^n den Factor $\cos n\pi$, wo

π die halbe Peripherie des Kreiſes, oder 3,141... bedeutet. So darf p als eine abſolute Zahl, ohne Rückſicht auf Qualität, betrachtet werden, indem für ein gerades n das Product $p^n \cos n\pi = p^n$ und poſitiv, aber für ein ungerades n dieſes Product $= - p^n$ iſt, durch die Beſchaffenheit des Coſinus. Iſt n eine gebrochne Zahl, $\frac{2m+1}{2}$, ſo iſt $\cos n\pi = 0$, und es iſt der Wechſel des Poſitiven und Negativen da. Fällt n zwiſchen $\frac{4m-1}{2}$ und $\frac{4m+1}{2}$, ſo iſt $\cos n\pi$ poſitiv; fällt es zwiſchen $\frac{4m+1}{2}$ und $\frac{4m+3}{2}$, ſo iſt $\cos n\pi$ negativ. Die Wurzel p oder q iſt nur bey wechſelnder Zunahme und Abnahme der Function negativ.

31 In einer rücklaufenden Reihe mit einer dreygliedrigen Scale, $+\alpha$, $-\beta$; $+\gamma$, wird jedes Glied aus drey nächſt vorhergehenden Gliedern zuſammengeſetzt, nämlich $S = \alpha R \quad \beta Q + \gamma P$. Durch die drey Glieder der Scale, und drey nächſte Glieder der Reihe iſt dieſe ganz gegeben. Sind ſechs auf einander folgende Glieder gegeben, ſo ſind dadurch die Glieder der Scale beſtimmt. Eine rücklaufende Reihe der dritten Ordnung dient eine Folge von ſechs, in gleichen Abſtänden von einander befindlichen Größen zu interpoliren, in gewiſſen Fällen auch zu erweitern. Das allgemeine Glied hat viererley Formen, nachdem die Wurzeln der Gleichung, $1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 = 0$, entweder alle drey möglich und ungleich, oder zwey gleich und gleichnamig, oder alle drey gleich und gleichnamig, oder zwey unmöglich ſind. In dem erſtern Falle iſt das allgemeine Glied, in der Stelle n nach dem Anfangsgliede, $= ap^n + bq^n + cr^n$, wo p, q, r die reciproken der Wurzeln jener Gleichung ſind, und a, b, c auf ähnliche Art, wie a, b in (25.) beſtimmt werden.

Die Coefficienten α, β, γ werden aus den drey Gleichungen

$$\text{I. } \alpha C - \beta B + \gamma A = D$$
$$\text{II. } \alpha D - \beta C + \gamma B = E$$
$$\text{III. } \alpha E - \beta D + \gamma C = F$$

hergeleitet, wo A, B, C, D, E, F, ſechs auf einander folgende gegebene Glieder in den Stellen 0, 1, 2, 3, 4, 5, ſind. Sind die drey Wurzeln der Gleichung $1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 = 0$ gefunden, ſo hat man zur Beſtimmung der Coefficienten a, b, c in dem allgemeinen Gliede die Gleichungen,

$$1)\ a + b + c = A$$
$$2)\ ap + bq + cr = B$$
$$3)\ ap^2 + bq^2 + cr^2 = C$$

Die Formen für die andern Fälle werden in dem Artikel, rücklaufende Reihen, entwickelt werden.

32. **Prony** hat zuerſt ſich der rücklaufenden Reihen zum Einſchalten bedient, um das Geſetz der Expanſivkraft der Dämpfe kochenden Waſſers oder andrer elaſtiſchen Flüſſigkeiten dadurch zu beſtimmen. In ſeiner Architecture hydraulique, II. Th. Note zu §. 1371. hat er einen Abriß ſeiner Interpolations-Methode mitgetheilt, welche ausführlicher in den Mémoires des Savans étrangers enthalten iſt. Die Gründe hat er in dem Auszuge nicht angegeben. In demſelben Werke, §. 1609-1612. beſchäftigt er ſich nochmals mit der Interpolirungs Methode für die Erſcheinungen bey elaſtiſch-flüßigen Maſſen. Sein Vortrag und ſeine Bezeichnungsart machen Mühe. Zum Beyſpiel der Formel in (25.) nehme ich aus der von ihm mitgetheilten Tafel der Ausdehnungskraft kochenden Waſſers (§. 1324, 1368, 1522) vier Glieder, oder vier Unterſchiede von einem fünften.

33. Nach Betancourts Verſuchen iſt die Höhe der Queckſilberſäule, welche der Elaſticität kochenden Waſſers im luftleeren Raume das Gleichgewicht hält, für die hier ausgezeichneten Temperaturen (Reaumurſche Scale) folgende in alten Pariſer Zollen und Hunderttheilen.

Temperatur	Höhe der Queckſilber-ſäule	Temperatur	Höhe der Queckſilber-ſäule
0	0,00	60	9,95
10	0,15	70	16,90
20	0,65	80	28,00
30	1,52	90	46,40
40	2,92	100	71 80
50	5,35	110	98,00

34. Man nehme hieraus die vier Höhen,

$2{,}92 = A$; $28{,}00 = C$
$9{,}95 = B$; $71{,}80 = D$

und bezeichne ihre Stellen durch 0, 1, 2, 3; die Stelle einer andern durch n, die zu derſelben gehörige Temperatur durch x Grade, ſo iſt $x = 40 + 20\,n$, und $n = \frac{x - 40}{20}$.

Nun iſt

$AD = 209{,}656$; $BD = 714{,}41$
$BC = 278{,}600$; $CC = 69{,}59$
$AC = 81{,}76$; $BB = 99{,}0025$.

Daraus iſt

$$\alpha = \frac{689440}{172425};\quad \beta = \frac{695900}{172425}.$$

Die Wurzeln der Gleichung, $1 - \alpha z + \beta z^2 = 0$, ſind $\frac{\alpha \pm \sqrt{(\alpha\alpha - 4\beta)}}{2\beta}$. Hier iſt $\alpha\alpha < 4\beta$; inzwiſchen iſt die Form der Glieder in (27.) hier nicht anwendbar, weil die Expanſivkraft eine mit der Temperatur ſtetig zunehmende Größe iſt. Da $\alpha\alpha$ ſehr wenig kleiner als 4β iſt, ſo mag es von einem Fehler in der Beobachtung, oder von zufälligen Unregelmäßigkeiten der Verſuche herrühren, daß die Wurzeln der Gleichung unmöglich werden. Es iſt α nahe $= 4$, und β wenig größer als 4. Setzt man beide $= 4$, ſo ſind die Wurzeln der Gleichung jede $= \frac{1}{2}$, alſo $p = q = 2$, und das allgemeine Glied der rücklaufenden Reihe iſt hier, $P = ((n + 1)\,a + b)\,2^n$. Die Größe

a, b, mag man aus A und B, oder B und C, oder C und D beſtimmen. Nimmt man B und C, ſo iſt

$$(2a + b)2 = 9{,}95,$$
$$(3a + b)4 = 28{,}00,$$

woraus $a = 2{,}025$; $b = 0{,}925$, und das Maaß der Expanſivkraft die Höhe, $(2{,}025\,n + 2{,}950)2^n$. Für $n = 3$ giebt die Formel die Höhe 72,2 ſtatt 71,8. Für $n = \frac{7}{2}$ oder $x = 110$ giebt ſie die Höhe 113,56 ſtatt 98,00. Es iſt zu merken, daß bey der Temperatur 100 bis 110 Gr. die Elaſticität ſehr wenig zunimmt.

35. Man nehme die Unterſchiede der vorher gebrauchten Höhen von der 0,65 Zoll bey 20 Gr. Temperatur. So iſt

$$2{,}27 = A \quad ; \quad 27{,}35 = C$$
$$9{,}30 = B \quad ; \quad 71{,}15 = D.$$

Es iſt

$$AD = 161{,}5105; \quad BD = 661{,}6950$$
$$BC = 254{,}3550; \quad CC = 748{,}0225$$
$$AC = 62{,}0845; \quad BB = 86{,}4900$$
$$\alpha = \frac{928445}{244055}; \quad \beta = \frac{863275}{244055}$$
$$\log \alpha = 0{,}5802684; \quad \log \beta = 0{,}5486614$$

Die Wurzeln der Gleichung, $1 - \alpha z + \beta z^2 = 0$, umgekehrt genommen, ſind

$$p = 1{,}6178; \qquad \log p = 0{,}2089219;$$
$$q = 2{,}1865 \qquad \log q = 0{,}3397500.$$

Ferner iſt

$$a = -7{,}6256; \qquad \log a = 0{,}8822762$$
$$b = +9{,}8956; \qquad \log b = 0{,}9954400$$

Solchergeſtalt wird der Werth der Formel der Expanſivkraft, $P = ap^n + bq^n$, erhalten. Die Probe der Rechnung iſt, daß ſie für $n = 0$; $n = 1$; $n = 2$ und $n = 3$ vollkommen oder ſehr nahe zutrifft. Für $n = \frac{3}{2}$, oder $x = 70$, giebt ſie 16,303. Dazu 0,65 addirt wird die Höhe des Drucks $= 16{,}953$, die nach der Tafel $= 16{,}90$ iſt. Aber für $n = \frac{7}{2}$ oder $x = 110°$ iſt $P = -41{,}068 + 152{,}955 = 111{,}887$. Wird dazu die Höhe 0,65 ge-

ſetzt, ſo iſt das Maaß der Expanſivkraft = 112,54, da die Erfahrung nur 98,00 giebt. Prony hat in §. 1522 eine dreygliedrige Formel aufgeſtellt zu welcher auch die Druckhöhe bey 110° Temperatur angewandt iſt. In dem erſten Theile, §. 1325 iſt eine viergliedrige Formel gegeben, welche auch in Langsdorfs Lehrbuche der Hydraulik §. 402. nachgeſehen werden kann.

Interpolationsformeln mit transſcendenten Größen.

36. Charles, ehemals Mitglied der Akademie der Wiſſenſchaften zu Paris, hat in dem mathematiſchen Theile der Encyclopédie eine Interpolationsformel angegeben, welche insbeſondere dazu geeignet ſeyn wird, unregelmäßige Größenfolgen darzuſtellen. Die Bezeichnung daſelbſt iſt nicht faßlich; auf gewöhnliche Art iſt ſie in der Nouvelle Archit. hydraulique par Prony, T. II. Anmerk. zu §. 1373.

Es bezeichnen a, b, c, d, etc die Werthe einer Function y, welche den Werthen 0, 1, 2, 3, etc. der Wurzel oder Stellenzahl zugehören, auch ſeyn p, q, r, etc. noch andere Größen, die zufolge anderer gegebenen Werthe zu beſtimmen ſind; π iſt die Zahl 3,141.. für den halben Umfang eines Kreiſes; die Interpolationsformel iſt

$$y = p\,\frac{a \sin \pi x}{\sin p \pi x} + q\,\frac{b \sin \pi (x-1)}{\sin q \pi (x-1)}$$

$$+ r\,\frac{c \sin \pi (x-2)}{\sin r \pi (x-2)} + \text{etc.}$$

Wenn x = 0 genommen wird, ſo ſind die Zähler alle = 0, und in dem erſten Terminus iſt auch der Nenner = 0. Den Werth von $\frac{\sin \pi x}{\sin p \pi x}$ für x = 0 zu finden, verfahre man, wie in dem Artikel, berührende Linie (24.), und Differentialgleichung (5.). Es iſt nämlich dieſer

$$\text{Werth} = \frac{\partial \sin \pi x}{\partial \sin p \pi x} = \frac{\pi \partial x . \cos \pi x}{p \pi \partial x . \cos p \pi x}.$$

Für $x = 0$ werden beide Coſinus $= 1$, und es iſt der verlangte Werth $= \frac{1}{p}$, daher für $x = 0$ iſt $y = a$, wie es ſeyn ſoll.

Für $x = 1$ ſind die Zähler wiederum alle $= 0$, und in dem zweyten Terminus iſt auch der Nenner $= 0$. Ganz auf dieſelbe Art, wie bey dem erſten, iſt nun der Werth von $y = b$. Eben ſo geht es bey dem dritten, und jedem folgenden Terminus. Aber die Größen p, q, r. etc. zu beſtimmen wird Schwierigkeit machen. Die Bogen zu den Sinus in den Nennern dürfen keine Vielfache von π ſeyn.

37. Eine andere von Charles angegebene Formel iſt folgende:

$$\pi y = p \frac{a \sin \pi x}{h^{px} - 1} + q \frac{b \sin \pi (x-1)}{h^{q(x-1)} - 1}$$
$$+ r \frac{c \sin \pi (x-2)}{h^{r(x-2)} - 1} + \text{etc.}$$

wo h die Baſis der natürlichen Logarithmen iſt, ſo daß $\log h = 1$. Für $x = 0$ werden alle Zähler $= 0$, und in dem erſten Terminus auch der Nenner. Um den Werth des Bruches $\frac{0}{0}$ zu erhalten, verfährt man, wie vorher geſchehen iſt. Es iſt $\partial (h^{px} - 1) = \partial h^{px} = h^{px} p \partial x$ (Differential-Formeln, 16.). Nun iſt $\frac{\partial \sin \pi x}{\partial (h^{px} - 1)}$ $= \frac{\pi \partial x . \cos \pi x}{p dx . h^{px}}$, welches $\frac{\pi}{p}$ für $x = 0$ iſt. Dadurch wird der erſte Terminus $= \pi a$. Um den Factor π zu heben, iſt y mit demſelben verbunden worden. Der zweyte Terminus erhält für $x = 1$ den Werth πb, da die andern $= 0$ werden, alſo iſt $y = b$. Auf gleiche Art giebt die Formel $y = c$ für $x = 2$, u. ſ. f.

38. Noch eine Formel von Charles iſt folgende:

$$\pi^2 y = \sin \pi x^2 \left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-2)^2} + \frac{d}{(x-3)^2} + \text{etc.}\right).$$

Für $x = 0$ wird das erſte Glied der Reihe, $\frac{\sin \pi x^2}{x^2} a = \frac{0}{0}$ und die andern werden alle Null. Es iſt $\frac{\partial \sin \pi x^2}{\partial . x^2} = \frac{2 \sin \pi x . \cos \pi x . \pi \partial x}{2 x \partial x} = \frac{\pi \sin 2 \pi x}{2 x}$, welcher Bruch für $x = 0$ wiederum $\frac{0}{0}$ iſt. Man differentiire Zähler und Nenner aufs neue, ſo iſt $\frac{\partial . \pi \sin 2 \pi x}{2 \partial x} = \frac{2 \pi^2 \partial x . \cos 2 \pi x}{2 \partial x} = \pi^2 \cos 2 \pi x$, welches $= \pi^2$ für $x = 0$ iſt. Daher iſt $y = a$. Eben ſo iſt $y = b$, für $x = 1$; $y = c$, für $x = 2$, u. ſ. f.

39. Lambert nimmt für den Fall, da die erſten Unterſchiede abwechſelnd poſitiv und negativ ſind, die Interpolations-Formel

$$y = a + b \sin \frac{m + x}{n} + c \sin \frac{p + x}{q} + \text{etc.}$$

zeigt aber nicht, wie die unveränderlichen Größen beſtimmt werden. Über das Einſchalten, in den Beyträgen zur Mathematik. Th. III. §. 5.

La Grange giebt dem allgemeinen Gliede einer Reihe die Geſtalt

$$y = a \sin(\alpha + x \varphi) + b \sin(\beta + x \chi) + c \sin(\gamma + x \psi) + \text{etc.}$$

und zeigt wie die Coefficienten a, b, c, etc. nebſt den Winkeln α, β, γ, etc. und φ, χ, ψ, etc. aus gegebenen Werthen von y in den Werthen 0, ± 1; ± 2; ± 3;

etc. von x gefunden werden können. Aſtronomiſches Jahrbuch für 1783. S. 41.

Interpolation einer Reihe von Producten aus Factoren, in arithmetiſcher Progreſſion.

40. Eine Reihe beſtehe aus Producten, deren Factoren die auf einander folgenden Glieder einer arithmetiſchen Reihe ſind, nämlich

$$\overset{0}{1};\ \overset{1}{a};\ \overset{2}{a(a+b)};\ \overset{3}{a(a+b)(a+2b)};$$

$$\overset{4}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}\ldots \overset{m}{M};\ \overset{m+1}{M(a+mb)};\ \text{etc.}$$

wo die übergeſchriebenen Zahlen die Stellen und die Anzahl der Factoren anzeigen. Das Glied in der Stelle o iſt = 1, damit für die Stelle 1 das Glied der Reihe = a werde, nach der allgemeinen Form, in welcher für die Stelle 1 der Factor m = o iſt.

41. Die Form eines Gliedes in dieſer Reihe gehört zu einer beſondern Gattung von transſcendenten Functionen, welche Euler inexplicabiles nennt. Die Glieder ſind keine ſolche Function ihrer Stelle, die allen gemein wäre. Die Interpolation ſolcher Reihen lehrt Euler in den Inſtitt. Calc. diff. P. II. c. 17. Ich werde hier einen leichtern Weg dazu nehmen.

42. Es ſey $m+\omega$ die Stelle des einzuſchaltenden Gliedes, m die Stelle des nächſt vorhergehenden, alſo eine ganze Zahl, und ω der Abſtand jenes von dieſem, ein eigentlicher Bruch. Setzen wir nach jedem Gliede in dem Abſtande ω ein Zwiſchenglied, ſo müſſen dieſe Zwiſchenglieder jedes aus dem vorhergehenden auf dieſelbe Art gebildet werden, wie die Glieder der urſprünglichen Glieder aus einander entſtehen, damit, wenn $\omega = 0$ oder $= 1$ iſt, die Glieder dieſer Reihe hervorgehen. Dieſes iſt der Analogie der Interpolation geometriſcher und arithmetiſcher Reihen gemäß.

43. Es ſey nun die Reihe der eingeſchalteten Glieder:

$$\begin{matrix} \omega & 1+\omega & 2+\omega & 3+\omega & 4+\omega & \\ u\,; & \alpha u\,; & \beta u\,; & \gamma u\,; & \delta u\,; & \text{etc.} \end{matrix}$$

ſo iſt

$$\alpha u = (a+\omega b)u$$
$$\beta u = (a+\omega b)(a+b+\omega b)u$$
$$\gamma u = (a+\omega b)(a+b+\omega b)(a+2b+\omega b)u$$
$$\delta u = (a+\omega b)\ldots(a+3b+\omega b)u$$

und, wenn μu das interpolirte Glied in der Stelle $m+\omega$ iſt,

$$\mu u = (a+\omega b)(a+b+\omega b)\ldots(a+(m-1)b+\omega b)u.$$

Dieſes Glied fällt zwiſchen die Glieder,

$a(a+b)\ldots\ldots(a+(m-1)b)$, und

$a(a+b)\ldots\ldots(a+mb)$,

alſo fällt u zwiſchen die Brüche,

$$\frac{a(a+b)(a+2b)\ldots\ldots(a+(m-1)b)}{(a+\omega b)(a+b+\omega b)\ldots(a+(m-1)b+\omega b)}$$

und

$$\frac{a(a+b)(a+2b)\ldots\ldots(a+mb)}{(a+\omega b)(a+b+\omega b)\ldots(a+(m-1)b+\omega b)},$$

welchen Werth auch m haben mag. Daher iſt

$$u = \frac{a(a+b)(a+2b)(a+3b)\ldots\text{in infin.}}{(a+\omega b)(a+b+\omega b)(a+2b+\omega b)\ldots\text{in infin.}}.$$

Denn wenn man hier zu einer Anzahl Factoren im Nenner entweder eben ſo viele oder einen mehr im Zähler nimmt, ſo erhält man eben ſolche Partialwerthe wie dort für u. Dieſes Schwanken der unvollſtändigen Werthe von u darf nicht befremden. Es iſt ein ſolcher Fall, wie mit dem Werthe einer Reihe, die, ohne zu convergiren, in ihren Gliedern abwechſelnde Vorzeichen hat. Die Partialwerthe von u gehen rückwärts und vorwärts, über 1 und über a hinaus. Es iſt hier nicht ſowohl von der Annäherung zu einem gewiſſen beſtimmten Werthe, als von der Form dieſes Werthes die Frage. Unten wird ſich

doch ein Mittel zur Annäherung an den wahren Werth von u zeigen.

44. Nun iſt

$$\alpha u = a \cdot \frac{(a+b)(a+2b). \text{ etc.}}{(a+b+\omega b)(a+2b+\omega b). \text{ etc.}}$$

$$\beta u = a(a+b) \cdot \frac{(a+2b)(a+3b). \text{ etc.}}{(a+2b+\omega b)(a+3b+\omega b). \text{ etc.}}$$

$$\gamma u = a(a+b)(a+2b) \cdot \frac{(a+3b). \text{ etc.}}{(a+3b+\omega b). \text{ etc.}}$$

$$\delta u = a(a+b)(a+2b)(a+3b) \cdot \frac{(a+4b). \text{ etc.}}{(a+4b+\omega b). \text{ etc.}}$$

und das Glied in der Stelle $m+\omega$ iſt

$$a(a+b)\ldots(a+(m-1)b) \cdot \frac{(a+mb). \text{ etc.}}{(a+mb+\omega b). \text{ etc.}}.$$

Wenn $\omega = 0$ iſt, ſo verwandelt ſich das eingeſchaltete Glied in das nächſtvorhergehende Glied der urſprünglichen Reihe; wenn $\omega = 1$ iſt, in das nächſtfolgende, wie es ſeyn muß.

Nimmt man in dem Bruchfactor zu dem Gliede der urſprünglichen Reihe im Zähler und Nenner gleich viele Factoren, ſo wird das eingeſchaltete Glied kleiner als das nächſte vorhergehende; nimmt man im Zähler einen Factor mehr als im Nenner, ſo wird das eingeſchaltete Glied größer als das nächſte folgende. In dem erſten Falle nämlich wird das nächſte vorhergehende Glied mit einer Reihe eigentlicher Brüche multiplicirt; in dem zweyten das nächſte folgende mit einer Reihe uneigentlicher Brüche. Der Multiplicator wird dort immer kleiner, hier immer größer, wiewohl die einzelnen Brüche ſich der Einheit immer mehr nähern.

45. Euler giebt a. a. O. §. 401. für ein in der Stelle ω (es ſey ω ein eigentlicher oder uneigentlicher Bruch) eingeſchobenes Glied Σ die Formel,

$$\Sigma = a^\omega \cdot \frac{a^{1-\omega}(a+b)^\omega}{a+b\omega} \cdot \frac{(a+b)^{1-\omega}(a+2b)^\omega}{a+b+b\omega}$$

$$\times \frac{(a+2b)^{1-\omega}(a+3b)^\omega}{a+2b+\omega}. \text{ etc.}$$

Man ſieht, daß dieſe Formel für $\omega < 1$ mit der hier für u gefundenen übereinkommt, nur daß in derſelben die Factoren des Zählers in zwey Wurzelgrößen zerlegt ſind. Aus jener Formel, $\omega < 1$ geſetzt, leitet Euler die hier in (44) gefundenen her. Sofern es hier bloß auf die Form eines eingeſchalteten Gliedes ankommt, geben dieſe Formeln eine ſehr faßliche Darſtellung.

46. Die gegebene Reihe ſey

$$\overset{0}{1};\ \overset{1}{\frac{a}{b}};\ \overset{2}{\frac{a(a+b)}{b(b+c)}};\ \overset{3}{\frac{a(a+c)(a+2c)}{b(b+c)(b+2c)}};\ \text{etc.}$$

Das mte Glied (deſſen Stelle m iſt) ſey $= M$, ſo iſt das nächſte $= M. \frac{a+mc}{b+mc}$. Darum iſt das Glied in der Stelle $0 = 1$.

Um die Reihe zu interpoliren, ſetze man in dem Abſtande ω von 1 vor $\frac{a}{b}$ das Glied u, und laſſe auf dieſes in den Stellen $1+\omega$; $2+\omega$; $3+\omega$; etc. die Glieder αu, βu, γu, etc. folgen, ſo iſt nach dem Geſetze für die Hauptglieder,

$$\alpha u = \frac{a+\omega c}{b+\omega c}\, u$$

$$\beta u = \frac{(a+\omega c)(a+c+\omega c)}{(b+\omega c)(b+c+\omega c)}\, u$$

$$\gamma u = \frac{(a+\omega c)(a+c+\omega c)(a+2c+\omega c)}{(b+\omega c)(b+c+\omega c)(b+2c+\omega c)}\, u$$

u. ſ. w.

Nach derſelben Schlußart wie in (43.) iſt

$$u = \frac{a(a+c)(a+2c)\ldots}{b(b+c)(b+2c)\ldots} \times \frac{(b+\omega c)(b+c+\omega c)\ldots}{(a+\omega c)(a+c+\omega c)\ldots}$$

und das eingeſchaltete Glied in der Stelle $m + \omega$ iſt

$$\frac{a(a+c)(a+2c)(a+3c)\ldots \text{in inf.}}{b(b+c)(b+2c)(b+3c)\ldots \text{in inf.}}$$

$$\times \frac{(b+mc+\omega c)(b+(m+1)c+\omega c)\ldots \text{in inf.}}{(a+mc+\omega c)(a+(m+1)c+\omega c)\ldots \text{in inf.}}$$

Die Bruchfactoren jedes dieſer beiden Brüche nähern ſich immer mehr der Einheit. Wenn $\omega = 0$ genommen wird, ſo verwandelt ſich das eingeſchaltete Glied in das mte der urſprünglichen Reihe; wenn $\omega = 1$ geſetzt wird, in das $(m+1)$te. Euler hat dieſelbe Formel, a. a. O. §. 400. ohne Zerlegung in Potentialgrößen.

47. Exempel. In der Reihe

$$1;\ \frac{2}{3};\ \frac{2.4}{3.5};\ \frac{2.4.6}{3.5.7};\ \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9};\ \text{etc.}$$

zwiſchen je zwey nächſten Gliedern eines einzuſchalten.

Hier iſt $a = 2$, $b = 3$, $c = 2$, $\omega = \frac{1}{2}$, alſo

$$u = \frac{2.4.6.8.\ \text{etc.}}{3.5.7.9.\ \text{etc.}} \times \frac{4.6.8.10.\ \text{etc.}}{3.5.7.\ 9.\ \text{etc.}},$$

als das zwiſchen 1 und $\frac{2}{3}$ eingeſchaltete Glied. Oder

$$u = \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{64}{63} \cdot \frac{100}{99} \cdot \text{etc.}$$

oder

$$u = 1 \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{80}{81} \cdot \text{etc.}$$

Man ſieht, wie der partielle Werth von u ſich einer gewiſſen Größe nähern könne.

Das zwiſchen $\frac{2}{3}$ und $\frac{2.4}{3.5}$ eingeſchaltete Glied iſt

$$= \frac{2.4.6.8.\text{ etc.}}{3.5.7.9.\text{ etc.}} \times \frac{6.8.10.12.\text{ etc.}}{5.7.9.11.\text{ etc.}},$$

$$\text{oder} = \frac{2}{3} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{80}{81} \cdot \text{ etc.}$$

$$\text{oder} = \frac{2.4}{3.5} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{64}{63} \cdot \frac{100}{99} \cdot \text{ etc.}$$

48. Die Glieder der hier zum Beyſpiele genommenen Reihe ſind die Flächenräume einer Curve, deren Gleichung iſt $y = (1-z^2)^m$ für die Abſciſſe $z = 1$. Denn das Differential der Fläche iſt $= y\,\partial z = (1-z^2)^m\,\partial z =$

$$(1 - mz^2 + \frac{m.m-1.}{1.2} z^4 - \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} z^6$$

$+$ etc.$)\,\partial z$. Alſo iſt der Flächenraum $=$

$$z - \tfrac{1}{3} m z^3 + \tfrac{1}{5} \cdot \frac{m.m-1.}{1.2} z^5$$

$$- \tfrac{1}{7} \cdot \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} z^7 + \text{ etc.}$$

welches Integral mit z anfangen ſoll. Für $z = 1$ iſt es $=$

$$1 - \tfrac{1}{3} m + \tfrac{1}{5} \cdot \frac{m.m-1}{1.2} - \tfrac{1}{7} \cdot \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} + \text{ etc.}$$

Setzt man m folgweiſe $= 1; 2; 3; 4;$ etc. ſo ſind die Werthe der Flächenräume die Glieder der Reihe in (47.).

49. Für $m = \frac{1}{2}$ iſt die krumme Linie ein Kreis mit dem Halbmeſſer als Einheit, in welchem die Abſciſſe z vom Mittelpuncte aus genommen wird. Wird $z = 1$ geſetzt, ſo iſt die Reihe der vierte Theil der Kreisfläche. Sie iſt auch das in der Reihe der Producte eingeſchaltete Glied in der Stelle $\frac{1}{2}$. Folglich iſt der vierte Theil der

$$\text{Kreisfläche} = \frac{2.4.6.8.\text{ etc.}}{3.5.7.9.\text{ etc.}} \times \frac{4.6.8.10.\text{ etc.}}{3.5.7.9.\text{ etc.}}.$$

Setzt man den halben Umfang $= \pi$, ſo iſt eben dieſer vierte Theil $= \frac{1}{4}\pi$, und

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.\text{ etc.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.\text{ etc.}}.$$

Das iſt der Werth von $\frac{1}{2}\pi$, der in dem Artikel, Cyklometrie (29.) aus andern Gründen gefunden iſt. Es iſt derjenige, welchen Wallis auch durch eine ihm eigene, künſtliche Einſchaltungsart herausgebracht hat. Arithm. Infin. Prop. 191. Man ſehe noch den Artikel, Cyklotechnie, Th. I. S. 654.

50. Die vorher (47.) zum Beyſpiel gegebene Reihe kann man auch mittelſt der Anfangsglieder der Differenzreihen nach der Formel in (7.) interpoliren. Dieſe Anfangsglieder ſind

$$-\tfrac{1}{3},\ +\tfrac{1}{5},\ -\tfrac{1}{7};\ +\tfrac{1}{9},\ -\text{ etc.}$$

negativ nämlich, wo die folgenden Glieder kleiner ſind als die vorhergehenden. Jene Formel giebt den Unterſchied des eingeſchalteten Gliedes über das in der Stelle o befindliche. Das eingeſchaltete ſey hier $= q$, ſo iſt

$$q = 1 - \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{5}.\frac{x.x-1.}{1.2} - \tfrac{1}{7}.\frac{x.x-1.x-2.}{1.2.3}$$
$$+ \tfrac{1}{9}.\frac{x.x-1.x-2.x-3.}{1.2.3.4} - \text{ etc.}$$

Alſo iſt das in der Stelle $\frac{1}{2}$ eingeſchaltete

$$q = 1 - \frac{1}{3}.\frac{1}{2} - \frac{1}{5}.\frac{1.1}{2.4} - \frac{1}{7}.\frac{1.1.3}{2.4.6}$$
$$- \frac{1}{9}.\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} - \text{ etc.}$$

Dieſe Reihe iſt der vierte Theil der Kreisfläche $= \frac{1}{4}\pi$. Unter den cyklometriſchen Reihen wird ſie noch nicht vorgekommen ſeyn. Sie convergirt nur langſam, da der ſechſte Terminus des ſubtractiven Theils erſt 0,001577 iſt. Darauf kommt es inzwiſchen nicht an, weil man mehr

als eine ſchnell convergirende Reihe für den Umfang des Kreiſes hat.

51. Exempel. In der Reihe 1; 1; 1.2; 1.2.3; 1.2.3.4; etc. zwiſchen je zwey Gliedern eines einzuſchalten.

Hier iſt in (40, 43.) $a = 1$; $b = 1$; $\omega = \frac{1}{2}$, alſo das zwiſchen den beiden erſten eingeſchaltete,

$$u = \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \text{etc.}}{\frac{3}{2}.\ \frac{5}{2}.\ \frac{7}{2}.\ \frac{9}{2}.\ \text{etc.}}$$

Nimmt man immerfort gleich viele Factoren im Zähler und im Nenner, ſo wird der Werth von u immer kleiner; nimmt man im Zähler immer einen Factor mehr als im Nenner, ſo wird der Werth immer größer. Um annähernde Werthe zu erhalten, müſſen die Bruchfactoren abwechſelnd größer und kleiner als die Einheit ſeyn, ſich aber derſelben immer mehr nähern. Dieſes wird erhalten, wenn man den Werth von u^2 nimmt, und zugleich jeden Bruchfactor im Zähler und Nenner mit 2 multiplicirt. So iſt

$$u^2 = 1 . \frac{2}{3} . \frac{4}{3} . \frac{4}{5} . \frac{6}{5} . \frac{6}{7} . \frac{8}{7} . \text{etc.}$$

Da $\frac{1}{4}\pi = \frac{2 . 4 . 4 . 6 . 6 . 8 . 8 . \text{etc.}}{3 . 3 . 5 . 5 . 7 . 7 . 9 . \text{etc.}}$ iſt,

ſo iſt $u = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Die eingeſchalteten Glieder in den Stellen $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, etc. ſind aus (43.) $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; $\frac{3}{2} . \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; $\frac{3 . 5}{2 . 2} . \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; $\frac{3 . 5 . 7}{2 . 2 . 2} . \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$: etc.

52. Auf dieſe Art kann man überhaupt einen convergirenden Werth für u erhalten. Es iſt

$$u^2 = a \cdot \frac{a}{a+\omega b} \cdot \frac{a+b}{a+\omega b} \cdot \frac{a+b}{a+b+\omega b} \cdot \frac{a+2b}{a+b+\omega b} \times$$

$$\frac{a+2b}{a+2b+\omega b} \cdot \frac{a+3b}{a+2b+\omega b} \cdot \text{etc.}$$

wo die Brüche abwechſelnd kleiner und größer als die Einheit ſind, und ſich ihr allmählig nähern.

53. Da zufolge (44.) das $(m+\omega)$te Glied der Reihe daſelbſt iſt

$$a(a+b)\ ..(a+(m-1)b). \frac{(a+mb).\ \text{etc.}}{(a+mb+\omega b).\ \text{etc.}},$$

wo der Unterſchied der Factoren im Zähler und Nenner des Ergänzungsbruches b iſt, wie in der Hauptreihe, ſo kann man für dieſen Bruch auf ähnliche Art einen convergirenden Werth finden. Man hat nur in der Formel für u anſtatt a hier $a+mb$ zu ſetzen Wenn die Differenz b negativ iſt, und die Producte wechſelnd poſitiv und negativ werden, ſo erfordert die Interpolation noch ein beſonderes Verfahren, wie bey einer geometriſchen Reihe mit abwechſelnden Vorzeichen.

54. Das eingeſchaltete Glied in der Reihe (46.) iſt convergirend. Man ſetze nur die Factoren in dem Zähler des zweyten Bruchs wechſelsweiſe zwiſchen die Factoren in dem Zähler des erſten Bruchs, und verfahre eben ſo mit den Nennern, ſo ſind die Bruchfactoren abwechſelnd kleiner und größer als die Einheit, wie vorher in dem Werthe von u^2. Bey der Berechnung des Werthes von u^2 oder jenes Ergänzungsbruches hat man nur aus dem Zähler oder Nenner des letzten Bruchfactors, bey dem man ſtehen bleibt, die Quadratwurzel zu ziehen.

Beyſpiel einer Interpolation aus der mathematiſchen Geographie.

55. Bouguer fand (Figure de la terre p. 290.) daß die Überſchüſſe der in Frankreich und in Lappland

gemeſſenen Grade des Meridians über den in Peru, nämlich 321 und 669 Toiſen ſich nahe wie die Biquadrate der Sinus der Breite verhalten. Das Verhältniß wird folgendergeſtalt gefunden. Die geographiſche Breite des mittlern Punctes des franzöſiſchen Grades ſey, wie Bouguer ſie anſetzt, 49° 23′, des lappländiſchen 66° 19′. Die Länge des peruaniſchen Grades ſey, nach ſeiner Beſtimmung, 56753 Toiſen; des franzöſiſchen 57074 T., des lappländiſchen 57422 T. Es ſey nun $321 = a(\sin 49° 23')^n$;

$669 = a(\sin 66° 19')^n$, ſo iſt $\frac{669}{321} = \left(\frac{\sin 66° 19'}{\sin 49° 23'}\right)^n$,

und $l\,669 - l\,321 = n(l \sin 66° 19' - l \sin 49° 23')$,

alſo $n = \frac{0{,}3189211}{0{,}0815022} = 3{,}913036$.

Hierauf läßt ſich der unveränderliche Factor a beſtimmen. Es iſt $l\,321 = \log a + nl \sin 49° 23'$. Der Logarithme des Sinus als eines eigentlichen Bruchs iſt eine negative Größe, nämlich $l \sin 49° 23' = 9{,}8802887 - 10 = -0{,}1197113$, alſo $nl \sin 49° 23' = -0{,}468434$, und $\log a = 2{,}97494$, ſo daß $a = 943{,}93$. Die Breite des mittlern Punctes eines Grades des Meridians ſey $= \varphi$, ſo iſt durch Einſchaltung die Länge des Grades $= 56753 + 943{,}93 \times \sin \varphi^{3{,}913}$.

56. Nach der neuen Meſſung in Lappland hält der Meridiangrad in der Breite 66° 20′ 12″ nur 57209,28 Toiſen, nach einer vorläufigen Berechnung. Der Überſchuß über den peruaniſchen Grad beträgt alſo nur 456 T. und es iſt $n = 1{,}871$. Das bringt die Figur des Meridians der elliptiſchen ſehr nahe.

57. Da der Überſchuß der Länge eines Grades in der Breite φ auf einem elliptiſchen Meridian durch die Reihe, $A \sin \varphi^2 + B \sin \varphi^4 + C \sin \varphi^6 +$ etc ausgedrückt wird (ſ. Krümmungskreis), wo aber A, B, C, etc. nicht unabhängige Größen ſind, ſondern alle durch die beiden Axen der Ellipſe gegeben werden, ſo läßt ſich dieſer Überſchuß an einer von der elliptiſchen wenig abweichenden

Geſtalt der Meridiane bequem durch eine ähnliche Formel darſtellen, wenn die Coefficienten von einander unabhängig geſetzt, und bloß durch gemeſſene Grade beſtimmt werden. Das iſt eine Erweiterung von Bouguers Hypotheſe, die nur das zweyte Glied der Reihe aufnimmt. Man ſehe meine beiden Aufſätze über die Anwendung dieſer Formel in dem aſtronomiſchen Jahrbuche von Bode für 1787 und 1788. Hier ſoll dies nur zum Beyſpiele dienen, wie man ein einfaches Geſetz den Beobachtungen anpaſſen möge, wenn dieſe, der Natur der Erſcheinungen gemäß, nur durch Nebenwirkungen davon abweichen.

58. Von der Einſchaltung des größten oder kleinſten Werthes einer Function, z. B. bey der größten Declination der Sonne im Sommer oder Winter; bey der Culmination eines Geſtirns, ſ. den Artikel, Größtes und Kleinſtes.

Zur Geſchichte der Theorie des Einſchaltens.

Zur Berechnung der einfachen Proportionaltheile hat ſchon Ptolemäus in ſeinen Tafeln der Chorden eines Kreiſes den zu einer Minute bey jedem halben Grade gehörigen Unterſchied der Chorde beygefügt.

Wie Rhäticus ſich bey dem Einſchalten der Sinus und Coſinus von 10 zu 10 Secunden verhalten hat, iſt in dem Artikel, Cyklotechnie, (Th. 1. S. 672.) erzählt.

Briggs gebrauchte zur Berechnung der Logarithmen die Einſchaltung vieler Glieder in geometriſcher Progreſſion zwiſchen der Einheit und einer wenig von ihr verſchiedenen Zahl. Er verfuhr dabey folgendermaßen.

Es ſey $(1 + u) - 1 = A$; $(1 + A)^{\frac{1}{2}} - 1 = A'$;

$(1 + A)^{\frac{1}{4}} - 1 = A''$; $(1 + A)^{\frac{1}{8}} - 1 = A'''$, u. ſ. f.

Ferner ſey

$\frac{1}{2} A - A' = B$; $\frac{1}{2} A' - A'' = B'$; $\frac{1}{2} A'' - A''' = B''$, u. ſ. f.

$\frac{1}{4}B - B' = C$; $\frac{1}{4}B' - B'' = C'$ u. ſ. f.
$\frac{1}{8}C - C' = D$; $\frac{1}{8}C' - C'' = D'$ u. ſ. f.
$\frac{1}{16}D - D' = E$; $\frac{1}{16}D' - D'' = E'$ u. ſ. f.
$\frac{1}{32}E - E' = F$, u. ſ. f.

Die Größen B, C, D, E, F, etc. werden ſucceſſiv kleiner, und nehmen ſehr ab, wenn A ein kleiner Bruch iſt. Das fand Briggs durch eine individuelle Rechnung, da er den binomiſchen Lehrſatz in ſeiner Allgemeinheit noch nicht kannte. Wird eine der Größen, als F, ſo klein, daß ſie nicht mehr in Betracht kommen kann, ſo iſt $E' = \frac{1}{32}E$ faſt genau. Daraus werden ſucceſſiv D^{II}, C^{III}, B^{IV}, A^{V} gefunden, wenn die Werthe A bis zu dem A^{IV} nebſt den zugehörigen Differenzen gefunden ſind, ſo daß nun die geometriſche Reihe fortgeſetzt werden kann. Das Verfahren iſt aber beſchwerlich, nur ein Behelf in Ermangelung des binomiſchen Lehrſatzes für gebrochne Exponenten.

Briggs giebt noch eine Methode, die Differenzen zu finden, die Hutton in ſeiner Abhandlung von der Conſtruction der Logarithmen, in der Einleitung zu ſeinen mathematiſchen Tafeln, ingenious, but not obvious nennt. Sie beruht auf denſelben Gründen als die erſtere.

Es ſey nämlich $(1 + u) - 1 = A$;
$(1 + u)^2 - 1 = A'$; $(1 + u)^4 - 1 = A''$;
$(1 + u)^8 - 1 = A'''$; $(1 + u)^{16} - 1 = A^{IV}$, u. ſ. f.

Ferner ſey

$\frac{1}{2}A' - A = B$; $\frac{1}{2}A'' - A' = B'$; $\frac{1}{2}A''' - A'' = B''$; u. ſ. f.

$\frac{1}{4}B' - B = C$; $\frac{1}{4}B'' - B' = C'$, u. ſ. f.
$\frac{1}{8}C' - C = D$; $\frac{1}{8}C'' - C' = D'$, u. ſ. f.
$\frac{1}{16}D' - D = E$, u. ſ. f.

Hieraus iſt $B = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}A^2$;
$C = \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{8}u^4$;
$D = \frac{7}{8}u^4 + \frac{7}{8}u^5 + \frac{7}{16}u^6 + \frac{1}{8}u^7 + \frac{1}{64}u^8$, u. ſ. f.

D

Dadurch findet man die Größen A′, A″, A‴, etc. nach der Reihe, auch in dem Falle, wenn A + 1 eine Wurzelgröße iſt, deren Grad eine Potenz der Zwey iſt, als $(1+u)^{\frac{1}{4}}$, $(1+u)^{\frac{1}{8}}$ u. d. gl.

Beide Methoden mit Beyſpielen erläutert giebt Briggs in der Einleitung zu ſeiner Arithmetica logarithmica, 1624, woraus die erſten eilf Capitel in der Arithmetica logarithmica von Blacq eingerückt ſind. In den folgenden beiden Capiteln, die Blacq nicht hätte weglaſſen ſollen, zeigt Briggs, wie mittelſt der Differenzen die Logarithmen durch Einſchaltung gefunden werden. Er betrachtet zweyerley Fälle, erſtlich, wenn die zweyten Differenzen ganz oder nahe gleich groß ſind, zweytens, wenn die Differenzreihen bis zu irgend einer Ordnung fortgehen. Seine Regel für den erſten Fall ſtimmt mit der Formel $y = ax + \frac{bx(x-1)}{1.2}$ überein, die aus der in (6.) entſteht, wenn die Glieder der dritten Differenzreihe und der folgenden alle Null ſind. Für den zweyten ſchwerern Fall ſtimmen ſeine Vorſchriften ganz mit denen überein, die Cotes in ſeiner Canonotechnia gegeben hat, da die Differenzen, welche Briggs mittlere und verbeſſerte nennt, von Cotes runde und viereckte genannt werden, weil er ſie durch Zahlen bezeichnet, die in einen kleinen Kreis und in ein Quadrat eingeſchloſſen ſind. (Hutton in der vorgedachten Abhandlung). In der Trigonometria Britannica, L. 1. cap. 12. giebt Briggs einen Abriß ſeiner Methode des Einſchaltens, und zeigt ihre Anwendung bey der Einſchaltung in einer berechneten Folge von Sinus, deren Winkel eine arithmetiſche Reihe ausmachen. Briggs iſt alſo der Erfinder der Methode durch Differenzen einzuſchalten. Er nimmt in dem gedachten zweyten Falle andere Glieder der Differenzreihen, als bey der Formel in (6.) angewandt ſind.

Wallis fand auf eine ſehr ſinnreiche Art die Interpolation ſolcher Brüche, deren Zähler und Nenner

ſucceſſive Producte aus den Gliedern arithmetiſcher Progreſſionen ſind, die in (47.) auf eine andere Art bewerkſtelligt iſt. Er ſcheint den Ausdruck, Interpolation, zuerſt gebraucht zu haben. Die Arithmetica infinitorum, worin er jene Erfindung vorträgt, erſchien im J. 1655. In dieſem Werke zeigt er auch, wie die figurirten Zahlen zu interpoliren ſind, aus der allgemeinen Form derſelben.

Mouton, ein Geiſtlicher, der zu Lyon lebte (geſt. 1694.), gebrauchte zu aſtronomiſchen Rechnungen eine Interpolations-Methode, die er einem Lyoner Mathematiker, Namens Regnault, verdankt. Er zeigte, wie man dadurch ſowohl zwiſchen den Angaben berechneter Tafeln mittlere Größen finden, als in einer Reihe von Beobachtungen die fehlenden einſchieben könne, und zwar genauer als durch einfache Proportionaltheile. Vermittelſt dieſer Methode berechnete er Tafeln der Declination der Sonne und der ſcheinbaren Größen ihres Durchmeſſers bis zu Secunden und Tertien, in einer Schrift: Obſerv. diametr. Solis et Lunae apparentium. Lugduni 1670. 4. (Montucla hiſt. des Mathem. T. II. p. 640 III. p. 301.)

Leibnitz fand auch, wie die Glieder einer Reihe aus den Anfangsgliedern der Differenzreihen zuſammengeſetzt werden. S. Th. I. S. 839.

Allgemeine, zur Anwendung geeignete Vorſchriften gab Newton in den Principiis Philoſ. natur. L. III. Lemm. 5. für beide Fälle, da die Abſtände der gegebenen Größen von einander gleich groß oder ungleich ſind. Das Lemma hat die Überſchrift: Invenire lineam curvam generis parabolici, quae per data quotcunque puncta tranſit. Die gegebenen und die einzuſchaltenden Größen werden, nach der damahls gewöhnlichen Methode, alle Relationen geometriſch darzuſtellen, als Ordinaten einer paraboliſchen Curve betrachtet, deren Gleichung iſt $y = A + ax + bx^2 + cx^3 +$ etc. In einem kleinen Aufſatze: Methodus differentialis, der 1711. gedruckt iſt, zeigt Newton, wie für irgend eine Anzahl gegebener Größen, die als Ordinaten einer paraboliſchen Curve angeſehen wer-

den, die Gleichung für die Curve beſtimmt wird. Die Rechnung iſt faſt dieſelbe wie die oben in (10. 11) geführte. Er leitet daraus noch einige Formeln zur Berechnung der eingeſchalteten Größe her, welche man in jener Schrift ſelbſt nachzuſehen hat.

Ehe die Newtoniſche Schrift über den Gebrauch der Differenzen zum Einſchalten bekannt gemacht war, ſuchte Cotes, veranlaßt durch das Lemma in den Principien, eine Aufſöſung der Aufgabe, und trug ſie nebſt den dazu gehörigen Sätzen, ſeinen Zuhörern in Cambridge vor. Der Aufſatz iſt der Ausgabe ſeiner Harmonia menſurarum durch Rob. Smith, Cantabr. 1722. beygefügt.

Eben dieſer Schrift iſt angehängt: Canonotechnia, ſive conſtructio tabularum per differentias, worin Cotes Formeln zum Einſchalten angiebt. Die Rechnung nach denſelben aber iſt ſehr zuſammengeſetzt, ob gleich das Verfahren ſehr ſinnreich iſt. Die gegebenen Größen ſetzt er in gleichen Abſtänden von einander, und nimmt das Anfangsglied in der Mitte derſelben, ſo auch die Anfangsglieder der Differenzreihen. Aus den Differenzen aller vorhandenen Ordnungen ſucht er die Anfangsglieder der Differenzreihen für die erweiterte Reihe. Dieſe Anfangsglieder nehmen ebenfalls die mittelſte Stelle in ihren Reihen ein. An der Erfindung der Beweiſe zu jenen Formeln mag man ſeinen Scharfſinn üben. Beide Abhandlungen ſind nebſt noch zwey kleinen dem Hauptwerke beygefügten Schriften deſſelben Verfaſſers, von Matsko, Prof. in Rinteln, zu Lemgo 1768 beſonders herausgegeben unter dem allgemeinen Titel: Opera miſcellanea Rogeri Cotes.

In Jakob Stirlings Methodus differentialis, Lond. 1730. handelt der zweyte Theil von der Interpolation der Reihen. Es wird darin nicht allein gezeigt, wie zwiſchen Größen von der Form der Ordinaten paraboliſcher Linien die Einſchaltung geſchieht, ſondern auch wie es bey continuirlichen Producten ausgeführt wird, bey den leztern nicht ſo kurz als es in dieſem Artikel gewieſen iſt.

Für die Interpolation der erſtern Art giebt der Verfaſſer eigenthümliche Formeln.

F. C. Maier, in Petersburg, zeigte in den Commentariis Acad. Petrop. T. II. a. a. 1727, wie der Zeitpunct des Sonnenſtillſtandes durch Hülfe einer Interpolations-Formel gefunden wird. Er giebt daſelbſt auch die Formeln für Größen von der Form $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc. mit dem Geſetz ihrer Fortſchreitung. Ihre Glieder ſind anders geordnet, als die von den Formeln (15, 16.).

Die Abhandlung, De la méthode des différences et de la Sommation des Series par Walmesley, in den Mem. de l'Acad. de Berlin, T. XIV. a. 1758, wird kaum etwas neues enthalten, es möchte denn in der Entwickelung der Formeln ſeyn. Die Formeln, Probl. II. III. ſtehen in Stirlings Abhandlung, propoſ. XX.

In Lamberts Beyträgen zum Gebrauch der Mathematik, 3ten Th. Berlin 1772. ſind Anmerkungen über das Einſchalten befindlich, die insbeſondere auf die ſchickliche Wahl der Formel zum Einſchalten aufmerkſam machen. Mit dieſem Aufſatze verbinde man den über das Einſchalten beym Gebrauche der Ephemeriden, im aſtron Jahrbuche für 1776. In den Zuſätzen zu den logar und trigonom. Tabellen, Tab. 38. hat Lambert die obigen Formeln (8.22.23.) und noch eine dieſer Gattung entwickelt.

Problems concerning Interpolations by E. Waring. Philoſ. Transact. vol. LXIX. (1779.), nr. VII. Die allgemeine Formel kommt mit der in (16.) der Geſtalt nach überein. Waring giebt auch eine Methode an, eine angenommene Function für eine Folge von Größen ſo zu verändern, daß ſie nicht allein die gegebenen Glieder, ſondern auch die nach derſelben berechneten richtig darſtelle.

La Grange hat in den Memoiren der Pariſer Academie für 1771. eine Abhandlung über das Einſchalten bey Reihen geliefert, deren Unterſchiede ſehr ungleich ſind,

bald zunehmen, bald abnehmen. Nachher hat ihn die Betrachtung des von Newton in der Schrift über die Differenzen-Methode, in dem dritten Satze gebrauchten Verfahrens zu einer Bemerkung veranlaßt, wodurch er seine in jener Abhandlung gebrauchte Methode noch sehr abgekürzt hat. Er theilt sein neues Verfahren in dem aſtronomiſchen Jahrbuche für das J. 1783. mit. Hier entwickelt er ein allgemeines Glied von der Form

$$y = a \sin(\alpha + x\varphi) + b \sin(\beta + x\chi) + c \sin(\gamma + x\psi) + \text{etc.}$$

und zeigt sehr ſcharfſinnig, wie die unveränderlichen Coefficienten ſowohl als die Winkel α, β, γ, etc. φ, χ, ψ, etc. beſtimmt werden können. Man kommt dabey auf Glieder ſucceſſiver Differenzenreihen, die rücklaufende Reihen ausmachen. Noch eine Abhandlung über das Einſchalten von dieſem großen Analyſten iſt in den Memoiren der Berliner Akademie für die Jahre 1792 und 1793 enthalten.

La Place hat ſich auch mit der Theorie des Einſchaltens beſchäftigt, in einer Abhandlung über die Reihen, in den Pariſer Memoiren für das J. 1779.

Was Prony und Charles in dieſem Fache geleiſtet haben, iſt oben ſchon angeführt worden.

* * *

Nach der Interpolations-Methode von Briggs, Newton Meth. diff. Prop. III. IV.), Cotes, Stirling (Prop. XX.), La Grange (Aſtron. Jahrb. 1783.) werden nicht die Anfangsglieder der Hauptreihe und der Differenzreihen, wie in der hier (6.) zum Grunde gelegten Formel, ſondern Glieder aus der Mitte dieſer Reihen genommen, um daraus und aus der Stellenzahl eines Gliedes die Formel für daſſelbe zuſammen zu ſetzen. Man ſchreibe die Hauptreihe und die Differenzreihen folgendergeſtalt unter einander:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
{}'''A & & {}''A & & {}'A & & A & & A' & & A'' & & A''' \\
& {}'''B & & {}''B & & {}'B & & B' & & B'' & & B''' & \\
& & {}''C & & {}'C & & C & & C' & & C'' & & \\
& & & {}''D & & {}'D & & D' & & D'' & & & \\
& & & & {}'E & & E & & E' & & & & \\
& & & & & {}'F & & F' & & & & & \\
& & & & & & G & & & & & &
\end{array}$$

wo die Differenzen unterhalb zwiſchen denjenigen Gliedern ſtehen, von welchen ſie die Differenzen ſind. Das Anfangsglied der Hauptreihe iſt A, die Glieder, A', A'', A''', gehören zu den Stellen + 1, + 2, + 3; die linker Hand zu den Stellen — 1, — 2, — 3; ſo daß A die Stelle 0 hat. Da aus der Hauptreihe hier eine ungerade Anzahl Glieder genommen iſt, ſo enthalten die Differenzreihen mit einer ungeraden Ordnungszahl eine gerade Anzahl Glieder, und die mit einer geraden Ordnungszahl eine ungerade Anzahl Glieder. Man ſetze deshalb in jenen erſtern $\frac{1}{2}('B + B') = B$; $\frac{1}{2}('D + D') = D$; $\frac{1}{2}('F + F') = F$, u. ſ. f. wenn aus der Hauptreihe noch mehr Glieder in ungerader Anzahl genommen wären. Nun werden in den Formeln der angeführten Verfaſſer die Interpolationsformeln aus den Gliedern B, C, D, E, F, G, und aus der Stellenzahl des einzuſchaltenden Gliedes zuſammengeſetzt. Nach der Formel (6) werden dazu die Differenz-Glieder B', C', D'', E'', F''', G''', etc. genommen. Nun muß man dieſe Differenzglieder, B', C', D', etc. in jene B, C, D, etc. verwandeln, welches leicht iſt, und in der Formel (6.) ihre Werthe durch dieſe ausgedruckt, ſetzen, ſo erhält man die Formel

$$y = A + xB + \frac{x^2}{1.2}C + \frac{x(x^2-1)}{1.2.3}D + \frac{x^2(x^2-1)}{1.2.3.4}E + \frac{x(x^2-1)(x^2-4)}{1.2.3.4.5}F + \frac{x^2(x^2-1)(x^2-4)}{1.2.3.4.5.6}G + \text{etc.}$$

Das iſt die Formel in Newtons Meth. diff. Prop. III. caſ. 1.

Auf eine ähnliche Art hätte man zu verfahren, wenn zu der Hauptreihe eine gerade Anzahl Glieder genommen wäre. Man hätte aber das arithmetiſche Mittel von den beiden mittlern Gliedern in den Differenzreihen von einer geraden Ordnungszahl zu nehmen.

In unſern allgemeinen Formeln (8. 10. u. ſ. f.) mögen von den Abſtänden m, n, p, q, r, etc. der gegebenen Glieder von dem Anfangsgliede, welche man will, negativ genommen werden, daher man zu dem Anfangsgliede, welches man will, nehmen kann. Die Formel in (7.) enthält nur einen beſondern Fall, der gebraucht iſt, um die allgemeine Form eines einzuſchaltenden Gliedes zu erhalten. Man hat nicht nöthig, in dem Falle, da das Anfangsglied in der Mitte zwiſchen den gegebenen Gliedern liegen ſoll, eine beſondere Formel zu ſuchen.

Einſchreibung der Figuren (Inſcriptio) iſt bey einer geradlinichten, wenn dieſe innerhalb einer gegebenen Figur, geradlinichten oder krummlinichten, ſo gezeichnet wird, daß ſie mit jeder ihrer Ecken oder Winkelpuncte den Umfang dieſer trifft; bey einer krummlinichten in einer geradlinichten, wenn ſie alle Seiten dieſer berührt. Die andere Figur iſt um die eingeſchriebene beſchrieben (circumſcripta)

Eine eingeſchriebene Hyperbel iſt diejenige, die ganz in dem Winkel ihrer Aſymptoten enthalten iſt, wie die gewöhnliche. Eine umſchriebene Hyperbel iſt ein Theil einer Linie der dritten Ordnung, welche ihre Aſymptoten ſchneidet, und dieſelben von dem Durchſchnittspuncten an unendlich weit hinaus zwiſchen ihren Schenkeln begreift. Eine zwitterartige (ambigena) iſt, welche mit einem Schenkel innerhalb, mit dem andern auſſerhalb des Aſymptoten-Winkels liegt.

Der Fall, der am meiſten vorkommt, iſt die Einſchreibung und Umſchreibung des Kreiſes und eines ordentlichen Vielecks in und um einander, ſ. Kreis und Vieleck.

Eintheilung, ſ. Theilung.

Elcataym, die Benennung einer Rechnungsregel bey Lucas de Burgo, nämlich der Regel von zwey unrichtigen Annahmen. Das Wort verräth einen arabiſchen Urſprung. Käſtners Geſch. der Mathem. I. S. 69.

Electio, ſ. Complexion.

Elemente, in der höhern Geometrie, ſind die mit jeder, auch noch ſo kleinen, endlichen Größe unvergleichbaren Theile einer Linie, Fläche oder Körpers, was man allgemein bey jeder Art veränderlicher Größen Differentiale nennt. Auf dieſe bloß relativ denkbaren Theile kommt man nothwendig, wenn man eine Größe ſich ſtetiger Weiſe verändern läßt. Die Unterſchiede der veränderten Größen ſind Theile des endlichen Ganzen, aber wegen der Bedingung der Stetigkeit in der Zunahme oder Abnahme können ſie keine meßbare Größe haben. S. Differentiale, S. 815.

Der Ausdruck iſt aus der Naturlehre entlehnt. Elemente der Körper heißen die uranfänglichen Beſtandtheile derſelben, es ſey nun, daß man ſie ſinnlich darſtellen zu können glaube, wie die ältern Philoſophen, oder daß man ihnen eine für uns unſinnliche Beſchaffenheit beylege. Freylich kann man nicht ſagen, Gold beſtehe aus goldnen Theilchen.

Elemente einer mathematiſchen Wiſſenſchaft ſind die Hauptſätze, aus welchen alle beſondern Sätze hergeleitet werden, ſie mögen von der leichtern oder ſchwerern Gattung ſeyn. Die Hauptſätze unterſcheiden ſich von den Folgeſätzen durch die Verbindung mit einem Begriffe, der in den vorhergehenden Lehrſätzen noch nicht angewandt war. So lange in der Verkettung der Sätze bloß dieſelbe Anzahl von Begriffen gebraucht wird, ſind die Sätze Folgerungen aus den vorhergehenden, Umwandlungen gewiſſer Formen. So wie aber ein neuer Begriff eingeführt wird, ſo entſteht eine Abtheilung der Kette, oder ein neuer Zweig, und der Satz, oder die Sätze, die dieſen Zweig anfangen, gehören zu den Elementen. z. B. in der Geometrie ſey man mit den Lehrſätzen über Gleichheit der Dreyecke, Linien und

Winkel fertig, und führe nun die Parallelen ein, ſo hat man in den Sätzen, worin dieſes geſchieht, ein Element der Wiſſenſchaft. Ein anderes Element giebt darauf die Betrachtung der Ähnlichkeit durch die Verbindung mit dem Begriffe der Proportionalität; dann die Verbindung eben dieſes Begriffs mit den Parallelogrammen von einerley Höhe. In der höhern Geometrie ſind die Differentialformeln von dem Flächenraume einer Figur, der Länge des Bogens, dem körperlichen Raum, der durch die Umdrehung um eine Axe erzeugt wird, Elemente dieſes Theils der Wiſſenſchaft. So auch die Verbindung eines Kreisbogens mit dem Bogen einer Curve zur Meſſung der Krümmung; die Verbindung einer geraden Linie mit demſelben zur Beſtimmung der Richtung, einer ſolchen oder eines hyperboliſchen Zweiges zur Beſtimmung der Lage oder Geſtalt des unendlich entfernten Theils der Curve, wo dieſes Statt hat.

Elemente in dem Lehrvortrage ſind eine Sammlung der Grundlehren, mit den wichtigſten Folgeſätzen, innerhalb eines gewiſſen vorgezeichneten Umfanges, mit mehrerer oder geringerer Ausführlichkeit, nach dem Bedürfniß der Leſer, für welche der Verfaſſer ſeine Schrift beſtimmt. Bey den Alten waren die Elemente der Geometrie und Arithmetik von Euklides ein allgemeines claſſiſches Lehrbuch, die auch in der Urſchrift den Titel, στοιχεια (Elemente) haben. Er ſelbſt ward manchmal ὁ στοιχειωτης, elementarius, genannt. Was in ſeinem Werke bewieſen war, ward von andern Geometern als bekannt vorausgeſetzt; was ſich nicht darin fand, aber doch zur Ausführung einer Unterſuchung nöthig war, ohne dazu unmittelbar zu gehören, ward unter der Rubrik, Lemma, eingeſchaltet.

Wir können ſchwerlich ein ſolches allgemein angenommenes Lehrbuch der Mathematik erhalten. Die Wolfiſchen Anfangsgründe waren es in Deutſchland beynahe eine gute Zeit hindurch. Allein die ſchnelle Zunahme der Wiſſenſchaft und Verbeſſerung der Methoden verdrängen bald ein gutes Lehrbuch. Ein bleibendes wäre auch nur in der rei-

nen Mathematik zu hoffen. Es iſt nicht ſo leicht zu verfaſſen, als es unſere rüſtigen Schriftſteller glauben. Die Elemente muß man nicht bloß erlernt, ſondern durch häufige eigene Anwendungen ſich eigenthümlich gemacht haben. Wir werden mit einer Menge Lehrbücher überhäuft, ohne daß das Studium der Mathematik dadurch befördert würde. Man ſchreibt die Vorgänger nur ab, verändert die Anordnung, läßt hier etwas weg, ſetzt da hinzu, verbeſſert hier eine Kleinigkeit, verſchlimmert da vielleicht mehr; man hält ſeine unausgebildeten, verworrnen Vorſtellungen für helle Begriffe; man ſchmeichelt ſich, daß man der Wiſſenſchaft Dienſte leiſten möge, und es iſt nur die Begierde als Schriftſteller ſich zu zeigen, oder ſich dadurch als Lehrer zu empfehlen. Aber auch geübten Gelehrten mag die Ausarbeitung eines Lehrbuches mißrathen. Sie können leicht verſucht werden, hier ihre Gelehrſamkeit zu zeigen, oder etwas eigenthümliches anzubringen. Allein in einem Lehrbuche muß nichts als das ſchon bekannte vorgetragen werden, nur auf die möglich gründlichſte, kürzeſte und lichtvollſte Art. Die Form macht das ganze Verdienſt des Werks aus. Alles dieſes mag auch auf die Lehrbücher in andern Wiſſenſchaften angewandt werden.

Elimination (Eliminatio, exterminatio) in der Analyſis iſt das Verfahren, da eine Größe, welche in zwey oder mehrern, weſentlich verſchiedenen und unabhängigen Gleichungen vorkommt, herausgeſchafft wird, ſo daß dadurch eine oder mehrere Gleichungen zwiſchen den übrigen, frey von der weggeſchafften Größe, erhalten werden.

1. Man habe zwey Gleichungen und in beiden dieſelbe Größe z. Zu dieſer haben die übrigen Größen eine beſtimmte Relation; ſie haben daher auch unter ſich eine beſtimmte Relation. Dieſe iſt aber nur mittelbar gegeben, wegen der Einmiſchung der Größe z. Die neue Gleichung, welche durch die Wegſchaffung derſelben erhalten wird, ſtellt die Relation der übrigen unabhängig von z, und unmittelbar dar. Jede derſelben wird nun durch die damit verbün-

denen beſtimmt, und zwar ſo, daß ihre Relation gegen z den beiden zuerſt gegebenen Gleichungen gemäß iſt.

2. Überhaupt, wenn n Gleichungen gegeben werden, in deren jeder von den n — 1 Größen, z, y, x, etc. wenigſtens eine vorkommt, ſo wird durch die Wegſchaffung einer dieſer Größen eine neue Gleichung (eine Bedingungsgleichung) erhalten, in welcher die Relation der übrigen, in den gegebenen Gleichungen enthaltenen Größen gegen einander ſo beſtimmt wird, daß jede derſelben zu der weggeſchafften Größe die Relation hat, die in jenen Gleichungen ausgedruckt iſt.

3. Die Algebra gebraucht die Elimination zur Abſonderung einer der unbekannten Größen von den übrigen. Sind n Gleichungen vorhanden, und n unbekannte Größen, ſo laſſen ſich n — 1 derſelben wegſchaffen, und es geht eine beſtimmte Gleichung zwiſchen der einen übrig gelaſſenen und den bekannten Größen hervor, die in den Gleichungen gegeben werden.

4. Die beiden Hauptfälle ſind, erſtlich, wenn alle unbekannte Größen bloß in der erſten Potenz vorhanden ſind, zweytens, wenn von allen oder von einigen höhere Potenzen vorkommen.

I. Elimination der unbekannten Größen, die nur in der erſten Potenz vorhanden ſind.

5. Für zwey unbekannte Größen, z, y, ſeyn die beiden Gleichungen gegeben:

$$\text{I.}\quad az + by = p.$$

$$\text{II.}\quad Az + By = P.$$

Man multiplicire I. mit B, und II. mit b, und ziehe darauf I. von II. ab, ſo wird erhalten,

$$\text{III.}\quad (Ab - aB)z = Pb - pB.$$

Auf ähnliche Art oder durch gegenſeitige Vertauſchung von A und a mit B und b, iſt

$$\text{IV.}\quad (Ba - bA)y = Pa - pA.$$

In der Gleichung für z ſtehen in dem Theile rechter Hand P und p für A und a in dem Theile linker Hand, ſo wie in der Gleichung für y jene für B und b ſtehen.

6. Die unbekannten Größen ſeyn z, y, x, und die drey Gleichungen:

$$\text{I. } az + by + cx = p$$
$$\text{II. } Az + By + Cx = P$$
$$\text{III. } \alpha z + \beta y + \gamma x = \pi$$

Man multiplicire I. durch $B\gamma - \beta C$: ferner II. durch $\beta c - b\gamma$; und III. durch $bC - Bc$, und addire die Producte, ſo hebt ſich alles auf, was y und x enthält, und es iſt

$$(aB\gamma - a\beta C + A\beta c - Ab\gamma + \alpha bC - \alpha Bc) z$$
$$=$$
$$pB\gamma - p\beta C + P\beta c - Pb\gamma + \pi bC - \pi Bc.$$

Verwechſelt man gegenſeitig a, A, α mit b, B, β, ſo erhält man die Gleichung für y. Vertauſcht man gegenſeitig a, A, α mit c, C, γ, ſo wird die Gleichung für x erhalten.

7. Das Geſetz der Formation iſt ein combinatoriſches. Man bezeichne die drey Alphabete, a, b, c; A, B, C; α, β, γ, durch die Zahlen 1, 2, 3; die Buchſtaben durch die Stelle, indem a, A, α in die erſte, b, B, β in die zweyte, c, C, γ, in die dritte Stelle geſetzt werden. Es iſt ſonach der Factor von z = + 123 — 132 + 231 — 213 + 312 — 321. Das Product von z in dieſen Factor wird auf dieſelbe Art ausgedruckt, wenn p, P, π ſtatt a, A, α geſetzt werden. Es ſind hier alle Verſetzungen der Zahlen 1, 2, 3, vorhanden. Das Vorzeichen der Glieder iſt +, wenn die Anzahl der Folgen einer kleinern Zahl auf eine größere gerade oder null (wie in 123) iſt, und —, wenn dieſe Anzahl ungerade iſt. Oder es iſt +, wenn die Ziffern aus der Reihe 12312 von der linken nach der rechten Hand genommen werden, —, wenn es auf die entgegengeſetzte Art geſchieht. Z. B. in + 231 ſind zwey Folgen, 21, 31, in — 321 ſind drey Folgen 32, 31, 21.

8. Für vier unbekannte Größen, z, y, x, u, werden die Gleichungen gegeben:

$$\text{I.}\quad az + by + cx + dw = p$$
$$\text{II.}\quad Az + By + Cx + Dw = P$$
$$\text{III.}\quad \alpha z + \beta y + \gamma x + \delta w = \pi$$
$$\text{IV.}\quad \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}x + \mathfrak{D}w = \mathfrak{P},$$

es ſollen die Gleichungen für z, y, x, w, jede beſonders gefunden werden. Man bezeichne die für die Coefficienten gebrauchten Alphabete nach der Folge der Gleichungen durch 1, 2, 3, 4; die Buchſtaben ſelbſt durch ihre Stelle, wie in dem beygefügten Täflein, ſo daß z. B. 3412 das Product $\alpha\ \mathfrak{B}\ c\ D$ bedeutet. Man bezeichne nun die Gleichung für z abgekürzt durch $Mz = N$, ſo iſt

1	a	b	c	d
2	A	B	C	D
3	α	β	γ	δ
4	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$

$$M =$$

$$+ 1234 - 1243 + 1342 - 1324 + 1423 - 1432$$
$$+ 2314 - 2341 + 2431 - 2413 + 2143 - 2134$$
$$+ 3412 - 3421 + 3124 - 3142 + 3241 - 3214$$
$$+ 4132 - 4123 + 4213 - 4231 + 4321 - 4312$$

Die Größe N entſteht aus M, wenn für a, A, α, $\mathfrak{A}$ folgweiſe p, P, π, $\mathfrak{P}$ geſetzt werden. Der Factor M enthält alle Verſetzungen der Ziffern, 1, 2, 3, 4. Das Vorzeichen + wird geſetzt, wenn die Anzahl der Folgen einer kleinern Zahl nach einer größern gerade oder Null (in 1234) iſt, das Vorzeichen —, wenn dieſe Anzahl ungerade iſt. Z. B. in + 3412 ſind 4 ſolche Folgen, 31, 32, 41, 42; in — 3142 ſind 3 ſolche Folgen 31, 32, 42. Oder, das Vorzeichen einer Combination iſt in der erſten und dritten Zeile +, wenn die drey letzten Ziffern derſelben aus der Folge der Ziffern 1234123 von der linken nach der rechten Hand, mit Übergehung der erſten, genommen werden, und —, wenn es von der rechten nach der linken Hand geſchieht; hingegen in der zweyten und vierten Zeile — in dem erſtern Falle, + in dem zweyten.

Für die unbekannte Größe y wird die Gleichung erhalten, wenn die Buchſtaben in der Ordnung, wie b, c, d, a, geſchrieben werden, wie in dem beygefügten Täflein, ſo daß nun 3412 das Product $\beta\mathfrak{C}dA$ bedeutet. Auch werden nun p, P, π, $\mathfrak{P}$ für b, B, β, $\mathfrak{B}$ geſetzt.

1	b	c	d	a
2	B	C	D	A
3	β	γ	δ	α
4	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{A}$

Die Rechnung, um die Gleichung für z zu finden, wird folgendergeſtalt gemacht. Man multiplicirt die Gleichung I. mit den ſechs erſten Größen in M, nachdem ſie durch a dividirt ſind; die Gleichung II. mit den ſechs folgenden, durch A vorher dividirten Größen; die Gleichung III mit dem nächſten ſechs folgenden, durch α dividirten; endlich die Gleichung IV. mit den letzten ſechs, durch $\mathfrak{A}$ dividirten Größen. Hierauf addirt man die multiplicirten Gleichungen, das iſt, die Theile auf jeder Seite, ſo hebt ſich alles, was y, x, w enthält. Je zwey Partialproducte heben ſich, die aus Gliedern in M entſtehen, worin die dritte und vierte Ziffer dieſelben ſind, und die beiden erſten ihre Stellen vertauſcht haben, wie 1234 und 2134.

9. Wenn in den Gleichungen das gegebene Glied, als p, P, π, $\mathfrak{P}$, fehlt, ſo iſt

bey zwey Gleichungen

$$Ab = aB,$$

bey drey Gleichungen

$$aB\gamma + A\beta c + \alpha bC = a\beta C + Ab\gamma + \alpha Bc,$$

bey vier Gleichungen,

$$M = 0 \text{ aus } (8.).$$

Dieſes ſind Bedingungsgleichungen für die gegebenen Größen, wodurch die Relation derſelben gegeben wird, ſo daß man ſie nicht alle willkührlich annehmen darf.

II. Elimination der Größen, von welchen Potenzen vorhanden ſind.

10. Die Methode, welche ſich zur Elimination einer Größe y aus zwey Gleichungen zwiſchen dieſer y und einer andern unbekannten x am erſten anbietet, iſt folgende. Steigt ſie in der einen Gleichung auf eine höhere Potenz als in der andern, ſo multiplicirt man die letztere Gleichung mit einer Potenz von y, ſo daß die höchſte Potenz dieſer Größe in beiden Gleichungen dieſelbe ſey. Durch die Multiplication jeder Gleichung mit dem Factor der höchſten Potenz in der andern wird der höchſte Terminus in beiden einerley, und durch die Subtraction der einen Gleichung von der andern erhält man eine neue Gleichung, in welcher y auf einen niedrigern Grad ſteigt, als in der Gleichung von dem höhern Grade. So fährt man fort, bis daß man zwey Gleichungen von demſelben Grade in Abſicht auf y erhält. Aus dieſen ſchafft man durch gehörige Multiplicationen ſowohl den Terminus mit der höchſten Potenz von y, als denjenigen, der y nicht enthält, weg, ſo werden zwey neue Gleichungen erhalten, in welchen y einen niedrigern Grad hat, und auf dieſem Wege gelangt man endlich zu zwey gleichen Werthen von y, die eine Gleichung für die zweyte unbekannte Größe und die bekannten geben, es ſey denn, daß beide Werthe von y Null ſind.

Hier folgen einige Beyſpiele. I. Der Fall, da y in der einen Gleichung nur in der erſten Potenz vorkommt, iſt leicht, weil man nur den Werth von y aus dieſer Gleichung in die andere zu ſetzen braucht.

II. Es ſeyn P, Q, R, p, q, r Functionen einer unbekannten x, und die beiden Gleichungen für x und y ſeyn:

$$\text{I. } P + Qy + Ry^2 = 0$$
$$\text{II. } p + qy + ry^2 = 0.$$

Man multiplicire I. durch r; II. durch R, und ziehe das zweyte Product von dem erſten ab; dann multiplicire man I. durch p, und II. durch P, und ziehe das erſte Product

von dem zweyten ab, worauf man den Unterſchied bey der letztern Subtraction durch y dividire. So entſtehen die Gleichungen,

$$\text{III. } (Pr - Rp) + (Qr - Rq)\, y = 0$$

$$\text{IV. } (Pq - Qp) + (Pr - Rp)\, y = 0.$$

Da aus dieſen Gleichungen erhalten wird

$$y = \frac{Pr - Rp}{Rq - Qr};\ y = \frac{Qp - Pq}{Pr - Rp},$$

ſo iſt

$$\text{V. } (Pr - Rp)^2 = (Qp - Pq)\,(Rq - Qr).$$

In dieſer Gleichung iſt die Relation zwiſchen x und den gegebenen Größen enthalten, wodurch diejenigen x beſtimmt werden, welche in beiden Gleichungen, I. und II. einerley Werth von y geben.

12. Sind die Gleichungen zwiſchen den Größen x und y vom zweyten Grade, ſo überſteigt die Anzahl der Factoren x und y in keinem Gliede die Zahl 2. Daher ſind R und r gegebene Größen, ohne x und y. Ferner hat Q die Form $A + Bx$, und P die Form $C + Dx + Ex^2$. Eben ſo hat q die Form $a + bx$, und p die Form $c + dx + ex^2$. Wenn dieſe Formen vollſtändig gegeben ſind, ſo iſt die höchſte Potenz von x in $Pr - Rp$ die zweyte, in dem quadratiſchen Product die vierte; in $Qp - Pq$ die dritte, in $Rq - Qr$ die erſte, in dem Producte beider die vierte. Daher iſt IV. eine Gleichung für x vom vierten Grade. Da eine ſolche Gleichung entweder vier, oder zwey, oder gar keine, mögliche Wurzeln hat, ſo können die beiden Gleichungen I. und II entweder auf viererley oder zweyerley Art, oder gar nicht neben einander beſtehen, das iſt, es giebt entweder vier Werthe von x (worunter auch gleiche ſeyn können), oder zwey, oder gar keine, für welche y in jenen beiden Gleichungen einerley Werth erhält. Setzt man die Wurzeln der Gleichung V. in die Formel für y, ſo werden dadurch die Werthe der in beiden gegebenen Gleichungen für jene Wurzeln übereinſtimmenden y gefunden.

Setzt man die möglichen Werthe von x in eine der Gleichungen I. oder II. ſo erhält y für jeden dieſer Werthe zwey Werthe, welche möglich ſind, da y durch eine Gleichung vom erſten Grade gegeben wird. Hätte nun x vier Werthe, ſo bekäme y zwar acht Werthe, allein nur vier derſelben kommen mit vier Werthen von y in der andern Gleichung überein. Denn y kann, vermöge der einfachen Gleichung, nur ſo viele mögliche Werthe erhalten, als x hat.

13. Es ſey in der einen Gleichung die dritte Potenz von y nebſt niedrigern vorhanden; in der andern ſey die höchſte Potenz von y die zweyte, wie folget.

$$\text{I. } P + Qy + Ry^2$$

$$\text{II. } p + qy + ry^2 + sy^3 = 0,$$

wo P, Q, R, p, q, r eben die Bedeutung haben, wie vorher, und s auch eine Function von x allein iſt. Man multiplicire I. durch sy, und II durch R, ziehe darauf I. von II. ab, ſo iſt

$$\text{III. } Rp + (Rq - Ps)\,y + (Rr - Qs)\,y^2 = 0.$$

Nun haben wir zwey Gleichungen, in deren jeder die höchſte Potenz von y die zweyte iſt. Man ſetze daher für die Functionen p, q, r in (11.) hier Rp; $Rq - Ps$; $Rr - Qs$; ſo erhält man

$$y = \frac{P(Rr - Qs) - R^2p}{R(Rq - Qs) - Q(Rr - Qs)},$$

$$y = \frac{QRp - P(Rq - Ps)}{P(Rr - Qs) - R^2p}.$$

Alſo iſt

$$\text{IV. } (PRr - PQs - R^2p)^2 =$$
$$(QRp - PRq + P^2s)(R^2q - PRs - QRr + Q^2s).$$

Dieſe Gleichung entwickelt wird

$$P^3s^2 - Q^3ps + R^3p^2 + P^2(Rr^2 - 2Rqs - Qrs) + Q^2(Pqs + Rpr) + R^2(Pq^2 - 2Ppr - Qpq) + PQR(3ps - qr) = 0.$$

Zu den Combinationen ſind von den Functionen P, Q, R je drey, und von den Functionen p, q, r, s je zwey genommen. Setzt man zu jeder die zugehörige Potenz von y, ſo bekommt jedes Glied die ſechſte Potenz von y als Factor.

14. Wenn in der Gleichung I. höchſtens zwey unbekannte Größen in einander multiplicirt vorkommen, und in der Gleichung II. höchſtens drey, ſo ſind R, s gegebene Größen ohne x; und die andern Functionen haben folgende Formen:

$P = A + Bx + Cx^2$; $Q = D + Ex$;

$p = a + bx + cx^2 + dx^3$; $q = e + fx + gx^2$;

$r = h + ix$. Die Gleichung IV. für x ſteigt alſo auf den ſechſten Grad, wenn nicht durch gewiſſe Beſtimmungen der gegebenen Größen der Coefficient von x^6, oder die von x^6 und x^5, oder mehrerer Potenzen von oben herab Null ſind.

Da eine Gleichung vom ſechſten Grade entweder ſechs, oder vier, oder zwey mögliche Wurzeln oder gar keine hat, ſo ſind es ſechs, oder vier, oder zwey Werthe von x, wodurch beide Gleichungen I. II. in den Werthen von y zuſammentreffen, oder es werden dieſe für keinen Werth von x übereinſtimmig.

Beyſpiele von höhern Gleichungen ſind in Eulers Introd. in Anal. Inf. T. II. cap. 19. anzutreffen.

15. Die Gleichungen zwiſchen x und y in (11, 13.) können auch als unabhängige, jede als eine zwiſchen zwey veränderlichen Größen, angeſehen werden, nur daß alsdann, wenn x in beiden dieſelbe Größe bedeutet, y nicht einerley Werth hat, außer für ſolche Werthe von x, welche die Wurzeln der durch die Elimination von y erhaltenen Endgleichung ſind. So iſt es auch mit den beiden Gleichungen in (5.) beſchaffen, worin y nur für denjenigen Werth von z, der durch die Gleichung III. daſ. beſtimmt iſt, übereinſtimmende Werthe erhält.

16. Die beiden Gleichungen in (5.) ſtellen jede eine gerade Linie mit den Coordinaten z und y vor. Für den Punct, wo ſie ſich ſchneiden, (wenn ſie nämlich in einer Ebene liegen und nicht parallel ſind); iſt die Ordinate zu der Abſciſſe z gemeinſchaftlich. Für jede andere Abſciſſe muß man die Ordinaten y in Gedanken oder durch eine Bezeichnung unterſcheiden.

17. Die Gleichungen in (11.) gehören für zwey Linien der zweyten Ordnung. Hier ſind vier Abſciſſen x möglich, für welche die Ordinaten y einerley Werth erhalten, oder die beiden Curven können ſich in vier Puncten ſchneiden. So wie es aber auch nur zwey ſolche x geben kann, oder auch gar keine möglich ſind, ſo giebt es Lagen dieſer Curven, bey welchen ſie ſich nur in zwey Puncten oder gar nicht ſchneiden. Wo ein Durchſchnittspunct gefunden iſt, iſt auch außer dieſem noch einer vorhanden; zu drey Durchſchnittspuncten kommt noch immer der vierte. Dieſes wird durch die Geſtalt dieſer Curven gut erläutert.

18 Die erſte Gleichung in (13.) iſt für eine Linie der zweyten Ordnung, die zweyte für eine der dritten. Dieſe können ſich alſo in ſechs Puncten ſchneiden; es mögen aber der Durchſchnitte auch nur vier, oder zwey vorhanden ſeyn, oder es mag keiner Statt haben.

19. Bey der hier vorgetragenen Methode der Elimination iſt zu erinnern, daß die dadurch erhaltene Endgleichung für die eine der unbekannten, x, auf einen höhern Grad führen kann, als es nach der Beſchaffenheit der Gleichungen ſeyn ſollte, und daß ſie alsdann auf den gehörigen, möglich niedrigſten Grad durch die Diviſion mit einem Factor gebracht wird, der keine gemeinſchaftliche y für die beiden Gleichungen enthält. In dem Beyſpiele (13.) enthält die Endgleichung IV. den Factor R; bey höhern Gleichungen enthält ſie einen mehr zuſammengeſetzten. Die beiden Gleichungen,

$$P + Qy + Ry^2 + Sy^3 = 0,$$

$$p + qy + ry^2 + sy^3 = 0,$$

führen zu einer Endgleichung mit dem Factor Sp — Ps, der keine gemeinſchaftliche y liefert.

Dieſes iſt eine Unbequemlichkeit, weil man bey höhern Gleichungen den Factor der Endgleichung vielleicht nicht mag finden können.

20. Euler giebt a. a. O. noch ein Verfahren an, welches weniger Subſtitutionen bedarf, als das erſtere bey höhern Gleichungen erfordert. Allein in dem Falle (13.) iſt es doch viel beſchwerlicher, als jenes. Um dieſelbe Zeit, als ſeine Introduction herauskam, (1748.), trug er in den Abhandlungen der Berliner Akademie für das J. 1748. eine ſinnreiche Methode der Elimination vor, beſonders in der Abſicht zu erweiſen, daß zwey Linien, eine vom mten Grade, die andere vom nten Grade ſich in nicht mehr als $m \times n$ Puncten ſchneiden können. Ich will ſie hier an dem Beyſpiele (13.) zeigen.

21. Es ſey

I. $P + Qy + Ry^2 = 0$,

II. $p + qy + ry^2 + sy^3 = 0$.

Wenn für einen gemeinſchaftlichen Werth von x beide Gleichungen auch denſelben Werth für y geben, ſo iſt dieſer letztere eine der beiden Wurzeln in I. oder eine der drey Wurzeln in II. Die beiden Wurzeln in I. ſeyn A, B, ſo iſt entweder

$$p + qA + rA^2 + sA^3 = 0,$$

oder

$$p + qB + rB^2 + sB^3 = 0.$$

Das Product dieſer Gleichungen iſt Null, es mag A oder B, oder jedes derſelben der gemeinſchaftliche Werth von y für daſſelbe x ſeyn. Laſſen ſich aus dieſem Producte die A und B herausſchaffen, ſo erhält man eine Gleichung für x mittelſt der Functionen P, Q, R, p, q, r, s.

Das Product iſt

$$p^2 + pq(A+B) + pr(A^2+B^2) + ps(A^3+B^3)$$
$$+ q^2AB + qrAB(A+B) + qsAB(A^2+B^2)$$
$$+ r^2A^2B^2 + rsA^2B^2(A+B) + s^2A^3B^3.$$

Nun iſt nach der Theorie der Gleichungen (ſ. Gleichung VI. 6. und derer vom zweyten Grade insbeſondere,

$$A+B=-\frac{Q}{R}; \quad AB=\frac{P}{R}.$$

Ferner iſt

$$A^2+B^2=(A+B)^2-2AB=\frac{Q^2-2PR}{RR},$$

und

$$A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)=\frac{-Q^3+3PQR}{R^3}.$$

(ſ. auch combinatoriſche Analyſis, 53.). Alſo iſt das Product der beiden Gleichungen für A und für B,

$$\begin{aligned}&=p^2R^3-pqQR^2+prR(Q^2-2PR)\\&+ps(3PQR-Q^3)+q^2PR^2-qrPQR\\&+qs(PQ^2-2P^2R)+r^2P^2R-rsP^2Q\\&+s^2P^3=0\end{aligned}$$

übereinſtimmig mit der Gleichung in (13.). Nach dieſem Verfahren geſchieht nichts überflüſſiges in der Rechnung, wie bey der erſtern geſchah, wo mehrere Glieder ſich aufheben, und die ganze Gleichung darauf noch durch R dividirt werden muß.

22. Die Bedingungsgleichung für x kann auch durch ein Product dr(e)yer Gleichungen, wie I. dargeſtellt werden. Die drey Wurzeln der Gleichung II. für irgend ein x ſeyn a, b, c. Soll eine derſelben auch eine Wurzel von I. ſeyn, ſo iſt

entweder $P+Qa+Raa=0$

oder $P+Qb+Rbb=0$

oder $P+Qc+Rcc=0.$

Die Bedingungsgleichung für x iſt das Product dieſer drey Gleichungen, nämlich:

$$P^3 + P^2Q(a+b+c) + P^2R(a^2+b^2+c^2)$$
$$+ PQ^2(ab+ac+bc) + PR^2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$$
$$+ PQR(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)$$
$$+ Q^3abc + Q^2R(abc^2+acb^2+bca^2)$$
$$+ QR^2(ab^2c^2+ba^2c^2+ca^2b^2) + R^3a^2b^2c^2 = 0.$$

Zur Wegſchaffung von a, b, c, dienen folgende Gleichungen:

$$1)\ a+b+c = -\frac{r}{s};\quad 2)\ ab+ac+bc = \frac{q}{s};$$

$$3)\ abc = -\frac{p}{s};$$ (Gleichung III. 5, und VI. 6.)

Ferner

$$4)\ a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2ab - 2ac - 2bc$$
$$5)\ a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = (ab+ac+bc)^2 - 2abc(a+b+c)$$
$$6)\ a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b = (ab+ac+bc)(a+b+c) - 3abc$$
$$7)\ abc^2+acb^2+bca^2 = abc(a+b+c)$$
$$8)\ ab^2c^2+ba^2c^2+ca^2b^2 = abc(bc+ac+ab).$$

Durch die Subſtitution dieſer Werthe entſteht wiederum die in (13.) gefundene Gleichung.

23. Bald nach Euler hat **Cramer** (Analyſe des lignes courbes, 1750.) die Methode, welche jener nur gleichſam angedeutet und in ein paar Beyſpielen erläutert hatte, völlig ausgeführt und erwieſen, in dem zweyten Anhange des gedachten Werks, pag. 660—671.

24. **Euler** ſelbſt hat das Verfahren noch etwas abgeändert, in den Mem. de l'Acad. de Berlin, 1764. T. XX. Er zeigt es zuerſt an folgenden beiden Gleichungen,

$$z^2 + Pz + Q = 0$$
$$z^3 + pz^2 + qz + r = 0,$$

aus welchen z herausgeſchafft werden ſoll. Die Buchſtaben, P, Q, p, q, r, enthalten die übrigen unbekannten Größen auſſer z. Damit beide Gleichungen mit einander zugleich beſtehen können, müſſen ſie für einen gewiſſen Werth von z beide auf Null gebracht werden können, oder beide Gleichungen haben eine gemeinſchaftliche Wurzel, oder auch mehrere. Eine ſolche Wurzel ſey ω, ſo iſt $z - \omega$ ein Factor von beiden Gleichungen, und es iſt (Gleichung VI.)

$$z^2 + Pz + Q = (z - \omega)(z + \mathfrak{A})$$
$$z^3 + pz^2 + qz + r = (z - \omega)(z^2 + az + b),$$

wo der zweyte Factor in dem Producte rechter Hand der Quotient des Werthes der Gleichung durch den Factor $z - \omega$ iſt. Hieraus ergiebt ſich nun, daß

$$(z^2 + Pz + Q)(z^2 + az + b) =$$
$$(z^3 + pz^2 + qz + r)(z + \mathfrak{A})$$

iſt.

Wird das Product auf beiden Seiten entwickelt, ſo ſind die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von z einander gleich, nämlich

$$\text{I. } P + a = p + \mathfrak{A}. \quad \text{II. } Q + Pa + b = q + p\mathfrak{A}.$$
$$\text{III. } Pb + Qa = q\mathfrak{A} + r. \quad \text{IV. } Qb = r\mathfrak{A}.$$

Aus dieſen vier Gleichungen laſſen ſich die drey einfachen Größenzeichen, $\mathfrak{A}$, a, b, wegſchaffen, und es bleibt die Bedingungsgleichung für die Functionen P, Q, p, q, r übrig.

25. La Grange hat in den Mem. de l'Acad. de Berlin, 1769. T. XXV. zur Elimination einer unbekannten Größe aus zwey Gleichungen ein lehrreiches Verfahren angewandt. Die beiden Gleichungen ſind

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.} = 0,$$
$$1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x^4} + \text{etc.} = 0.$$

erſtere vom Grade m, dieſe vom Grade n.

Dieſe verwandelt er jede in ein Product aus zweytheiligen Factoren von der Form $1 - \alpha x$. Den Logarithmen des Products zerlegt er in einzelne Logarithmen, und dieſe entwickelt er in Reihen. Den Logarithmen des Aggregats von den Gliedern der Gleichung entwickelt er eben ſo in Reihen mit Zuziehung der Potenzirung einer Reihe, und findet dadurch ein Mittel, die Wurzeln der Gleichungen herauszuſchaffen, wobey er auch den Satz gebraucht, daß die Bedingungsgleichung ein ſolches Product iſt, wie oben in den Beyſpielen gemacht worden. Die Bedingungs- oder Endgleichung iſt der Form nach eine unendliche Reihe, von welcher er aber zeigt, daß alle Producte aus A, B, C, etc. die über n Dimenſionen enthalten, darin wegfallen müſſen, ſo wie auch alle Producte aus a, b, c, etc. von mehr als m Dimenſionen. Auf welche Art aber ſich dieſelben heben, kann man nur in beſondern Fällen einſehen.

26. Bezout hat in den Mém. de l'Acad. de Paris 1764. ein Mémoire ſur le degré des équations réſultantes de l'évanouiſſement des inconnues geliefert. Derſelbe lehrt auch in ſeiner Théorie générale des équations algébriques, à Paris 1779, wie aus n Gleichungen, deren jede n unbekannte Größen enthält, eine Gleichung für jede dieſer Größen, hergeleitet werde.

27. In der Vorrede zu Rüdigers Specimen analyticum de lineis ſecundi ordinis, Lipſ. 1784. hat Hindenburg Cramers und Bezouts Methoden zur Wegſchaffung der unbekannten Größen aus Gleichungen vom erſten Grade vorgetragen, und aus der combinatoriſchen Analytik mit bequemen Abkürzungen bereichert.

28. Das erſte Beyſpiel einer Elimination möchte dasjenige ſeyn, welches ſich in Fermats vermiſchten Werken (Opera varia, Toloſae 1679.) S. 58. findet. Nach unſerer Bezeichnungsart ſind die beiden Gleichungen

$$\text{I. } x^3 + y^3 = p$$

$$\text{II. } ax + by + y^2 = q.$$

Aus dieſen leitet Fermat, aber auf eine unbequeme, weitſchweiſige Art, einen Werth für y her. Dieſen ſoll man in die Gleichung II. ſetzen, welches eine mühſelige Rechnung erfordern würde. Fermat rühmt ſeine Methode als ein allgemeines Mittel, irrationale Ausdrücke aus einer Gleichung wegzuſchaffen, wozu die ſymmetrica climatismus Vietaca nicht immer hinlänglich ſey.

29. Newton giebt in der Arithm. univerſ. pag. 62. für vier Fälle die allgemeine Endgleichung, deren man ſich in jedem beſondern Falle bedienen kann. Seine Eliminations-Methode iſt nicht ſo bequem als die hier in (10.) gewieſene.

30. Ein der Elimination entgegengeſetztes Verfahren iſt, wenn zu einer Gleichung für eine unbekannte x zwey Gleichungen zwiſchen dieſer x und einer neben eingeführten, als unbekannt betrachteten Größe y, geſucht werden, ſo daß durch Elimination von y jene erſtere für x entſtehe. Oder man verbindet die gegebene Gleichung für x mit einer unbeſtimmten zwiſchen x und y, um eine Gleichung von einer gegebenen Form zu erhalten. Dergleichen Fälle kommen in der Algebra vor, ſ. Gleichung V. u. X.

Ellipſe iſt eine krumme Linie, für welche die Gleichung zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten u und y iſt $cu - m^2 u^2 = y^2$, wo c eine gegebene Linie, und m der Exponent des Verhältniſſes zweyer gegebenen Linien iſt. Wenn $m = 1$ genommen wird, ſo verwandelt ſich die Ellipſe in einen Kreis, deſſen Durchmeſſer $= c$ iſt.

Die Benennung Ellipſe, (Verminderung), ſoll anzeigen, daß das Quadrat der Ordinate kleiner iſt als das Rechteck von der Abſciſſe und einer conſtanten Linie. Nimmt man $m = 0$, ſo hat man die Parabel, an welcher das Quadrat der Ordinate gleich iſt dem Rechtecke von der Abſciſſe und einer Conſtante. Die Gleichung $cu + m^2u^2 = y^2$ gehört für die Hyperbel, woran das Quadrat der Ordinate größer iſt, als das Rechteck cu.

Wie dieſe drey Linien durch den Schnitt eines Kegels mit einer Ebene entſtehen, wird in dem Artikel, Kegel-

ſchnitt, gezeigt. Hier wird, was die Ellipſe betrifft, alles aus ihrer Gleichung, als einer vollſtändigen Erklärung derſelben, hergeleitet. Die Hülfsſätze aus der Trigonometrie finden ſich in dem Artikel, Goniometrie.

1. Für jedes u hat y zwey gleich groſſe, entgegengeſetzte Werthe. Die Axe der Abſciſſen u theilt die Ellipſe in zwey gleiche und ähnliche Hälften, wie ein Durchmeſſer ſeinen Kreis.

Für $u = o$ iſt $y = o$; und für $u = \frac{c}{mm}$ iſt ebenfalls $y = o$. Man ſetze $\frac{c}{m^2} = 2a$, ſo iſt . . . . $m^2(2au - u^2) = y^2$. Die Ordinaten an der Ellipſe verhalten ſich wie die Ordinaten an einem Kreiſe, deſſen Durchmeſſer 2a iſt.

2. Man ſetze $u = a - x$, ſo iſt

$$m^2(a^2 - x^2) = y^2,$$

und die gröſſte Ordinate an der Ellipſe iſt $= ma$.

3. Man ſetze $b^2 = m^2a^2$, ſo iſt

$$\frac{1}{m^2}(b^2 - y^2) = x^2.$$

Dieſe Gleichung iſt jener ganz ähnlich. Der unveränderliche Factor des erſten Theils der einen iſt das Reciproke des Factors der andern. Betrachtet man hier x als Ordinate, ſo iſt ihr gröſſter Werth $= \frac{b}{m} = a$.

4. Setzt man ſtatt m deſſen Werth, $\frac{b}{a}$, ſo iſt

$$\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = y^2,$$

oder $$\frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2) = x^2.$$

5. Hieraus ergiebt ſich eine Conſtruction der Ellipſe. Aus c als Mittelpunct (Tab. IX. Fig. 5.) beſchreibe man mit den Halbmeſſern $AC = a$, $CD = b$, Kreiſe. Dieſe Halbmeſſer ſeyn ſenkrecht auf einander. Willführlich ziehe man einen Halbmeſſer CQ in dem erſtern Kreiſe, welcher den zweyten in R ſchneide. Durch Q ziehe man die ſenkrechte QP auf AC, und durch R die ſenkrechte RN auf CD. Der Durchſchnitt jener mit der verlängerten NR in M iſt ein Punct der Ellipſe.

Denn man ſetze $CP = x$; $PM = y$, ſo iſt $QP^2 = a^2 - x^2$; $RN^2 = b^2 - y^2$. Da $CQ : CR = PQ : PM$, ſo iſt PM oder $y = \frac{CR \cdot PQ}{CQ}$, oder $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Desgleichen, da $CR : CQ = NR : CP$, ſo iſt . . . $CP = \frac{CQ \cdot NR}{CR}$, und $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$.

Dieſe Werthe von y^2 und x^2 ſind diejenigen, welche ſie nach (4) an der Ellipſe haben.

Für dieſelbe Abſciſſe CP verhält ſich die Ordinate am Kreiſe zu der an der Ellipſe, wie die große Axe zur kleinen.

Die hier gezeigte Conſtruction einer Ellipſe wird in der Aſtronomie gebraucht, die elliptiſche Projection eines Parallelkreiſes der Erde der Zeit proportional einzutheilen.

6. Die Durchmeſſer AB, DE der beiden Kreiſe heißen die Axen der Ellipſe. Sie theilen die Ellipſe in vier gleiche und ähnliche Quadranten. Die größere (Axis principalis, transverſus, latus transverſum) wird hinführo durch 2a bezeichnet werden, die kleinere (zweyte, Neben-Axe,) durch 2b. Beide mit einander verbunden heißen conjugirte Axen. Ihr Durchſchnittspunct, C, heißt der Mittelpunct der Ellipſe. Die Endpuncte der großen Axe heißen die Scheitelpuncte (vertices) der Ellipſe.

7. Die dritte geometriſche Proportionale zu der großen und kleinen Axe, oder $\frac{2b}{2a} \cdot 2b \left(= \frac{2bb}{a}\right)$, heißt der

Parameter (latus rectum) der Ellipſe. Wenn dieſe Nebenlinie, das iſt c, in die Gleichungen (4.) geſetzt wird, ſo iſt

$$cu - \frac{c}{2a} u^2 = y^2$$

$$\frac{c}{2a} (a^2 - x^2) = y^2$$

$$\frac{2a}{c} (b^2 - y^2) = x^2.$$

Die Benennung, Parameter, hat Apollonius nicht. Er nennt dieſe Linie ſowohl diejenige, in Beziehung auf welche (παρ' ἣν) die Ordinaten potenziren, als auch die ſenkrechte Seite. Die große Axe, oder überhaupt einen Durchmeſſer nennt er die ſchiefe Seite (πλαγια), das Rechteck von beiden die Figur ('ειδος) zu dem Durchmeſſer. Die Beywörter, ſenkrecht und ſchief, beziehen ſich auf die Lage, welche beide Linien in der Zeichnung des Apollonius haben.

8. Aufg. Die Gleichung für die krumme Linie zu finden, auf welcher die Scheitelpuncte aller Dreyecke, wie FMG, FmG (Fig. 6.) liegen, worin die Seite FG gemeinſchaftlich, und die Summe der beiden andern gleich groß iſt, nämlich FM + GM = Fm + Gm.

Man halbire FG in C, und ſetze FC oder GC = e; ferner FM + GM = 2a; FM = a + t, alſo GM = a — t. Von M ziehe man die ſenkrechte MP auf FG, und ſetze CP = x, alſo FP = e + x; GP = e − x. Auch ſey PM = y. Nun iſt

$$(e + x)^2 + y^2 = (a + t)^2,$$

$$(e - x)^2 + y^2 = (a - t)^2.$$

Daraus wird durch Addition und durch Subtraction,

$$e^2 + x^2 + y^2 = a^2 + t^2$$

$$ex = at.$$

Durch Wegſchaffung von t wird erhalten

$$e^2 + x^2 + y^2 = a^2 + \frac{e^2x^2}{a^2},$$

oder

$$\frac{a^2 - e^2}{a^2}(a^2 - x^2) = y^2.$$

Der geometriſche Ort des Punctes M, oder die geſuchte krumme Linie, iſt eine Ellipſe, deren große Axe $= 2a$, und deren kleine Axe $= 2\sqrt{(a^2 - e^2)}$ iſt.

9. Umgekehrt, wenn AMB eine halbe Ellipſe iſt, deren große Axe AB, halbe kleine CD, Mittelpunct, C, und wenn aus dem Endpuncte D an AB die Linien DF, DG gezogen werden, deren jede $=$ CA oder CB iſt, ſo iſt die Summe der Linien FM, GM, die von den Puncten F, G an irgend einen Punct der Ellipſe gezogen werden, der großen Axe AB gleich.

Bew. Zufolge der Conſtruction iſt $CF^2 = a^2 - b^2$. Man ſetze $CF = e$, ſo iſt $b^2 = a^2 - e^2$. Da $FM^2 = (e + x)^2 + y^2$, und $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ iſt, ſo wird

$$FM^2 = a^2 + 2ex + \frac{e^2}{a^2}x^2,$$

$$FM = a + \frac{ex}{a}.$$

Eben ſo wird

$$GM = a - \frac{ex}{a},$$

alſo $FM + GM = 2a$.

10. Die beiden merkwürdigen Puncte, F, G, heißen bey den alten Geometern Puncta ex comparatione, (τα γενομενα ᾽εκ της παραβολης σημεια) bey den Neuern, Foci, auch Umbilici, Brennpuncte, wegen einer Eigenſchaft, die unten vorkommen wird. Apollonius trägt den hier in (9.) erwieſenen Satz erſt im dritten Buche,

52ſten Satze, vor. Er erweiſet ihn aus Betrachtungen über die berührenden Linien, und ihre Verbindungen unter ſich und mit andern. Der nächſte Satz dazu iſt der, daß die Linien, welche von den Vergleichungspuncten an einen Berührungspunct gezogen werden, mit der berührenden gleiche Winkel machen. Er nennt ſie Vergleichungs- oder vielmehr Gleichheits Puncte, weil er ſetzt, daß (Fig. 6.) $AF \times FB = AG \times GB = CD^2$ iſt, oder gleich dem vierten Theil der Figur zu der Axe, wie er es ausdrückt. Man ſieht nicht, wie er auf dieſe Puncte gekommen ſeyn mag. Die Gleichung für die Coordinaten auf den Axen bietet keine Veranlaſſung dazu dar. Die leichteſte möchte die in (8.) vorgetragene Aufgabe ſeyn.

11. Die Ordinate in den Brennpuncten iſt dem halben Parameter gleich, oder die Doppelordinate dem ganzen Parameter. Denn es iſt in denſelben $x = \pm e$, alſo $a^2 - x^2 = b^2$, und $y^2 = \frac{b^4}{a^2}$; $y = \frac{b^2}{a}$. Das iſt auch der Werth des halben Parameters (7.).

12. Es ſey $FM = z$, $AFM = \varphi$, ſo iſt

I. $aa + ex = az$; II. $aa - ee = (a - e \cos \varphi) z$.

Die erſte Gleichung iſt dieſelbe mit der Gleichung, $ex = at$ in (8.), da $t = z - a$ iſt. Hieraus folgt die zweyte, wegen $x = z \cos \varphi - e$. In der Aſtronomie wird die letztere vorzüglich gebraucht. Die Winkel an F ſind in dieſer Formel von dem entferntern Scheitelpuncte A an genommen. Werden ſie von dem nächſten Scheitelpuncte B an gerechnet, ſo iſt $aa - ee = (a + e \cos \varphi) z$, wo $BFM = \varphi$ iſt.

13. Es ſey CH die dritte Proportionale zu CG und CA, ſo iſt $CA : CG = HP : GM$.

Bew. Man ſetze nun $GM = z$, ſo iſt $t = a - z$, und $ex = aa - az$, oder $az = aa - ex$. Es ſey $HP = v$, und $ev = aa - ex$, ſo iſt $aa = e(v + x)$, oder $CA^2 = CG \times CH$, das iſt, CH die dritte Propor-

tionallinie zu CG und CA. Umgekehrt, folgt aus dieſer Annahme das Verhältniß von HP : GM.

Die Linie GH iſt die dritte Proportionale zu der GC und der halben kleinen Axe CD; der Abſtand AH die vierte Proportionale zu CG, GA, CA.

Man kann ſich des gefundenen Verhältniſſes bedienen, um mit Hülfe eines Proportionalzirkels eine Ellipſe zu zeichnen.

14. Innerhalb des rechten Winkels ACE (Fig. 7.) iſt eine gerade Linie von beſtimmter Länge FG, gelegt, und auf ihrer Verlängerung iſt ein Punct M gegeben; es wird die Beſchaffenheit der krummen Linie geſucht, welche der Punct M beſchreibt, indem der Punct F von A nach C, ſo wie G von C nach E hin geſchoben wird, und dieſe Bewegung der beiden Puncte rückwärts oder vorwärts auch in den drey andern rechten Winkeln um C geſchieht.

Man ziehe MP ſenkrecht auf CA, und MN parallel mit derſelben, ſo iſt MG : FG = MN : FC, und MF : FG = MP : CG. Es ſey GM = a; FM = b: CP = x; MP = y, ſo iſt $FC = \frac{a-b}{a}x$; $CG = \frac{a-b}{b}y$. Da $FG^2 = FC^2 + CG^2$, ſo iſt $(a-b)^2 = (a-b)^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$. Daraus wird $\frac{bb}{aa}(aa - xx) = yy$, eine Gleichung für die Ellipſe, deren halbe große Axe = a = GM (= CA), und halbe kleine Axe = b = FM (= CD) iſt.

Wird der Punct M zwiſchen F und G genommen, ſo wird von demſelben ebenfalls eine Ellipſe beſchrieben.

Anſtatt des rechten Winkels ACE mag auch ein ſchiefer genommen werden, ſ. Newtoni Arithm. univ. Quaeſt. geom. probl. 35. Man kann auch die gegebene MF unter einem rechten Winkel in F auf FG ſetzen, eb. daſ. probl. 36.

Wenn zwey Winkel ACB, acb um ihre fixen Scheitelpuncte, C, c, gedreht werden, und der Durchſchnitt

der Schenkel CA, ca auf einer geraden Linie fortrückt, ſo beſchreibt der Durchſchnitt der Schenkel CB, cb eine Ellipſe oder auch einen andern Kegelſchnitt. Newtoni Princip. Phil. nat. L. I. Lemma 21. Maclaurin Geometria organica. Lond. 1720. Prop. 1. Man hat noch mehrere dergleichen Entſtehungsarten einer Ellipſe oder auch anderer Kegelſchnitte erdacht, ſ. van Schooten exercit. mathem. L. IV.

15. Es ſey (Fig. 8.) AB die große Axe einer Ellipſe, C ihr Mittelpunct, DE und FG ſeyn zwey durch den Mittelpunct C in in ihr gezogene gerade Linien, und MN, welche DE in P ſchneidet, der FG parallel. Wenn tang ACD $\times$ tang BCG $= \frac{bb}{aa}$ iſt, ſo wird jede mit FG parallele von DE halbirt.

Bew. Die halbe große Axe AC iſt $= a$; die halbe kleine aC $= b$, CP $= x$: PM $= y$, der W. ACD $= \varphi$, der W. BCG $= \omega$. Von M ziehe man MQ ſenkrecht auf AB, und durch P die parallele PR mit AC, wie auch die ſenkrechte PS auf dieſelbe. Es iſt der W. MPR = GCB (wegen der parallelen MP, GC, und PR, CB), alſo MPR $= \omega$. Daher iſt MR $= y \sin \omega$; PR $= y \cos \omega$. Ferner QR = PS $= x \sin \varphi$; CS $= x \cos \varphi$. Dadurch iſt MQ $= x \sin \varphi + y \sin \omega$, und CQ $= x \cos \varphi - y \cos \omega$. Nun iſt

$$a^2b^2 = b^2 . CQ^2 + a^2 . MQ^2,$$

alſo

$$a^2b^2 = b^2 (x^2 \cos \varphi^2 - 2xy \cos \varphi \cos \omega + y^2 \cos \omega^2) + a^2 (x^2 \sin \varphi^2 + 2xy \sin \varphi \sin \omega + y^2 \sin \omega^2).$$

Sollen nun in dieſer Gleichung für jedes x die Werthe von y gleich und entgegengeſetzt ſeyn, ſo müſſen diejenigen Glieder ſich aufheben, welche y enthalten, das iſt, es muß ſeyn

$$2b^2 xy \cos \varphi . \cos \omega = 2a^2 xy \sin \varphi . \sin \omega .$$

oder $$b^2 \cos \varphi . \cos \omega = a^2 \sin \varphi , \sin \omega ,$$

folglich $$\frac{b^2}{a^2} = \tan \varphi . \tan . \omega .$$

16. Zwey Linien, welche durch den Mittelpunct unter den Winkeln φ und ω mit der großen Axe, der Bedingung in (15.) gemäß, gezogen ſind, heißen conjugirte Durchmeſſer. Der eine halbirt alle Chorden, die dem andern parallel gezogen ſind. Die Gleichung zwiſchen den Coordinaten CP und PM oder PN iſt

$$a^2b^2 = (a^2 \sin \varphi^2 + b^2 \cos \varphi^2) x^2 + (a^2 \sin \omega^2 + b^2 \cos \omega^2) y^2.$$

17. Es ſey CD = f; CG = g, ſo iſt

$$\frac{g^2}{f^2}(f^2 - x^2) = y^2,$$

$$\frac{f^2}{g^2}(g^2 - y^2) = x^2.$$

Bew. Man ſetze zur Abkürzung in der Gleichung (16.) den Coefficienten von $x^2 = A$, den von $y^2 = B$, ſo daß $a^2b^2 = Ax^2 + By^2$. In den Endpuncten, D, E, iſt $y = 0$, und $x = f$, alſo iſt $a^2b^2 = Af^2$. In dem Mittelpuncte C iſt $x = 0$, und $y = g$, alſo $a^2b^2 = Bg^2$. Setzt man nun in jener Gleichung für A und B ihre Werthe aus dieſen particularen Gleichungen, ſo iſt

$$a^2b^2 = a^2b^2\left(\frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{g^2}\right),$$

$$\text{alſo} \quad 1 = \frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{g^2}.$$

Daraus ergeben ſich ſogleich die aufgeſtellten Gleichungen, welche den zum Grunde gelegten (4.) ganz ähnlich ſind. Aus ihnen folgt

$$f^2 g^2 = g^2 x^2 + f^2 y^2.$$

18. Man ſetze DP = u, alſo CP = f — u. Setzt man dieſen Werth für x, ſo iſt $f^2 - x^2 = 2fu - u^2$, und

$$\frac{2g^2}{f} u - \frac{g^2}{f^2} u^2 = y^2.$$

Dieſe Gleichung hat ganz dieſelbe Form, als die urſprünglich für die Ellipſe angeſetzte, welche daher für jedes Paar conjugirter Durchmeſſer gilt, wenn die Abſciſſen auf dem einen von dem Scheitelpuncte an genommen, und die Ordinaten dem andern parallel gezogen werden.

Auch heißt $\frac{2g^2}{f}$ der Parameter zu dem Durchmeſſer $2f$, als die dritte Proportionale zu $2f$ und $2g$.

19. Es iſt

$$f^2 = \frac{\sin\omega}{\cos\varphi.\ \sin(\varphi+\omega)}\, a^2 = \frac{\cos\omega}{\sin\varphi.\ \sin(\varphi+\omega)}\, b^2.$$

$$g^2 = \frac{\sin\varphi}{\cos\omega.\ \sin(\varphi+\omega)}\, a^2 = \frac{\cos\varphi}{\sin\omega.\ \sin(\varphi+\omega)}\, b^2.$$

Bew. Es ſey $a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2 = A$, ſo iſt aus (16.) $a^2 b^2 = Af^2$. Nun iſt $b^2 = a^2 \tan\varphi.\ \tan\omega$ aus (15.), oder $b^2 = a^2.\ \frac{\sin\varphi.\ \sin\omega}{\cos\varphi.\ \cos\omega}$, alſo

$$a^2 \sin\varphi^2 = b^2.\ \frac{\sin\varphi.\ \cos\varphi.\ \cos\omega}{\sin\omega}, \text{ und}$$

$$A = b^2.\ \frac{\cos\varphi}{\sin\omega}\,(\sin\varphi.\ \cos\omega + \cos\varphi.\ \sin\omega)$$

$$= b^2.\ \frac{\cos\varphi}{\sin\omega}.\ \sin(\varphi+\omega).$$ Folglich iſt

$$f^2 = \frac{\sin\omega}{\cos\varphi.\ \sin(\varphi+\omega)}\, a^2.$$ Setzt man für a^2 ſeinen Werth durch b^2, ſo wird der zweyte Werth von f^2 erhalten.

Die Werthe von g^2 entſtehen aus denen von f^2, wenn φ und ω mit einander vertauſcht werden, welches nichts anders iſt, als die Durchmeſſer DE und FG vertauſchen, wobey ſtatt des W. ACD der W. BCG, und ſtatt dieſes jener genommen wird.

20. Es iſt $\frac{f^2}{g^2} = \frac{\sin 2\omega}{\sin 2\varphi}$, aus (19.).

21. Man ziehe Ee und Gg ſenkrecht auf AB, ſo iſt Ee : Gg = Cg : Ce, und die Dreyecke ECe, GCg ſind gleich.

Bew. Da $f^2 \sin 2\varphi = g^2 \sin 2\omega$, ſo iſt $f^2 \sin\varphi . \cos\varphi = g^2 \sin\omega . \cos\omega$, folglich $f \sin\varphi : g \sin\omega = g \cos\omega : f \cos\varphi$. Dieſes iſt die angegebene Proportion. Der zweyte Theil des Satzes folgt daher aus der Lehre von den Dreyecken; ſ. Dreyeck, 30.

Der Satz gilt für je zwey Paare von Durchmeſſern, ſ. unten 37.

22. Es iſt $\frac{f}{g} = \frac{\sin\omega}{\cos\varphi} . \frac{a}{b}$ und $\frac{f}{g} < \frac{a}{b}$.

Der erſte Satz aus (19.). Der zweyte erhellt folgendermaßen. Da $\frac{b^2}{a^2} = \tang\varphi . \tang\omega = \frac{\tang\omega}{\tang(90^\circ - \varphi)}$, ſo iſt $90^\circ - \varphi > \omega$, und $\sin(90^\circ - \varphi) > \sin\omega$, oder $\cos\varphi > \sin\omega$, alſo $\frac{\sin\omega}{\cos\varphi} < 1$. In dem Falle, daß $f < g$ iſt, iſt der zweyte Satz für ſich klar.

Apollonius beweiſet die zweyte Formel in ſeinem Werke von den Kegelſchnitten, B. VII. S. 24.

23. Es iſt $fg \sin(\varphi + \omega) = ab$, oder, das Parallelogramm, welches von zwey conjugirten Durchmeſſern mit dem ihnen zugehörigen Winkel gemacht wird, iſt dem Rechteck von den beiden Axen gleich. Der Winkel $\varphi + \omega$ iſt der W. DCG der Durchmeſſer, innerhalb deſſen die kleine Axe liegt.

Apollonius hat den Satz gefunden, Conicor. L. VII. prop. 31.

24. Es iſt $f^2 + g^2 = a^2 + b^2$.

Bew. Aus (19.) iſt $f^2 + g^2 =$

$\frac{a^2}{\sin(\varphi+\omega)}\left(\frac{\sin\omega}{\cos\varphi}+\frac{\sin\varphi}{\cos\omega}\right)$. Der zweyte Factor iſt $\frac{\sin\omega . \cos\omega + \sin\varphi . \cos\varphi}{\cos\varphi . \cos\omega} =$
$\frac{\sin 2\omega + \sin 2\varphi}{2\cos\varphi . \cos\omega} = \frac{\sin(\varphi+\omega) . \cos(\varphi-\omega)}{\cos\varphi . \cos\omega}$
$= \sin(\varphi+\omega)\left(1+\frac{\sin\varphi . \sin\omega}{\cos\varphi . \cos\omega}\right) =$
$\sin(\varphi+\omega)(1+\tang\varphi . \tang\omega) = \sin(\varphi+\omega)$
$(1+\frac{b^2}{a^2})$. Setzt man dazu den erſten Factor des Werths von f^2+g^2, ſo erhält man die Formel des Satzes.

Den merkwürdigen Satz hat ſchon Apollonius, Conicorum L. VII. prop. 12.

25. Es iſt $f+g > a+b$, und $f-g < a-b$.

Bew. Denn $f^2+g^2 \pm 2fg \sin(\varphi+\omega) = a^2+b^2 \pm 2ab$, aus (23 u. 24.), und $f^2+g^2 \pm 2fg = (f \pm g)^2$. Nun iſt $fg > fg \sin(\varphi+\omega)$, alſo erhellt der Satz. Bey Apollonius L. VII. prop. 26. 27.

26. Der Unterſchied zwiſchen $f^2+g^2+2fg \times \sin(\varphi+\omega)$, das iſt $(a+b)^2$ und $(f+g)^2$ iſt $= 2fg(1-\sin(\varphi+\omega)) = 2ab\left(\frac{1}{\sin(\varphi+\omega)}-1\right)$. Er iſt am größten, wenn $\sin(\varphi+\omega)$ am kleinſten iſt, und dieſer Sinus iſt am kleinſten, wenn $\varphi=\omega$, das iſt, wenn $f=g$ iſt.

Bew. Da $\frac{b^2}{a^2} = \tang\varphi . \tang\omega$ iſt, und
$\tang(\varphi+\omega) = \frac{\tang\varphi + \tang\omega}{1-\tang\varphi . \tang\omega}$, ſo iſt
$\tang(\varphi+\omega) = \frac{a^2}{a^2-b^2}(\tang\varphi + \tang\omega)$. Nun

iſt, wenn das Product zweyer veränderlichen Größen eine gegebene Größe iſt, ihre Summe ein Kleinſtes, wenn beide gleich groß ſind (Größtes u. Kleinſtes.). Alſo iſt $\tan\varphi + \tan\omega$ ein Kleinſtes, wenn $\varphi = \omega$ genommen wird. Alsdann iſt $\tan(\varphi + \omega)$ ein Kleinſtes, daher auch $\sin(\varphi + \omega)$. Folglich iſt der vorher geſuchte Unterſchied ein Größtes.

Daher iſt nun auch der Unterſchied zwiſchen der Summe zweyer conjugirten Durchmeſſer und der Summe der beiden Axen am größten, wenn die beiden Durchmeſſer gleich groß ſind. Und die Summe zweyer gleichen conjugirten Durchmeſſer iſt größer als die Summe je zweyer andern conjugirten. Apollonius L. VII. prop. 26.

27. Es iſt $\frac{f^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2}$,

oder $\frac{f^2}{a^2} = \frac{2b^2}{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)\cos 2\varphi}$.

Bew. Aus (19.) iſt $\frac{f^2}{a^2}\cos\varphi = \frac{\sin\omega}{\sin(\varphi + \omega)}$.

Der umgekehrte Bruch iſt $\sin\varphi.\cot\omega + \cos\varphi = \frac{a^2}{b^2}\tan\varphi.\sin\varphi + \cos\varphi = \frac{a^2\sin\varphi^2 + b^2\cos\varphi^2}{b^2\cos\varphi}$.

Die Umkehrung dieſes Bruches giebt den Werth von $\frac{f^2}{a^2}\cos\varphi$, alſo die erſte Formel des Satzes.

In derſelben vertauſche man $\sin\varphi^2$ mit $1 - \cos\varphi^2$, und $2\cos\varphi^2$ mit $1 + \cos 2\varphi$, ſo geht die zweyte Formel hervor.

Dieſe Formeln unterſcheiden ſich von denen in (19.) dadurch, daß der Durchmeſſer darin bloß durch den Winkel φ, den er mit der großen Axe macht, nebſt a und b ausgedruckt wird.

Die Formeln ſind in der mathematiſchen Geographie anwendbar.

28. Die beiden conjugirten Durchmeſſer, welche einander gleich ſind, machen mit der Axe den Winkel, deſſen Tangente $= \frac{b}{a}$ iſt. Daher ſind ſie parallel mit den Chorden Aa und Ba (Fig. 8.), durch die Endpuncte der großen Axe, und einen Endpunct der kleinen.

29. Di durch den Endpunct D eines Durchmeſſers DE (Fig.) mit dem zugeordneten FG gezogene parallele TDt iſt eine berührende in dem Puncte D.

Denn wenn ſie die Ellipſe ſchnitte, ſo würde der Durchmeſſer, welcher die auf ihr enthaltene Chorde halbirte, der zu FG gehörige Durchmeſſer ſeyn, nicht DE, (16.)

Oder: die mit FG parallelen Chorden ſind Theile von ſchneidenden Linien, welche von DE halbirt werden. In dem Endpuncte D fallen die Durchſchnittspuncte mit der Ellipſe in einen einzigen Punct zuſammen, und die durch D mit FG parallele hat nur dieſen Punct mit der Ellipſe gemein, daher ſie eine berührende iſt.

30. Es ſchneide TDt (Fig. 9.) die verlängerte große Axe in T, und von D werde DP ſenkrecht auf AB gezogen, es iſt CP : CA = CA : CT.

Bew. Denn $CT = \frac{\sin(\varphi + \omega)}{\sin \omega} f$, und $CP = f \cos\varphi$, alſo $CT . CP = \frac{\cos\varphi . \sin(\varphi + \omega)}{\sin \omega} f^2 = aa$, aus (19.).

31. Hieraus folgt CP : PA = CA : AT, und hieraus CP : PA = BP : PT, ſo daß der Punct P ſowohl CA als BT in demſelben Verhältniſſe eintheilt.

Zu vergleichen, berührende Linie, 8, 18. In Apollonii Conic. L. I. prop. 37, iſt der Satz (30.) allgemeiner vorgetragen, daß nämlich AB irgend ein Durchmeſſer ſeyn mag, nur daß DP mit dem zu AB gehörigen parallel ſey. S. unten 38.

32. Es ſey DQ (Fig. 9). auf die berührende TDt in D ſenkrecht, und $\frac{aa - bb}{aa + bb} = m$, ſo iſt tang CDQ $= \frac{m \sin 2\varphi}{1 - m \cos 2\varphi}$.

Bew. Da DCT $= \varphi$, und DQT $= 90^\circ - \omega$, ſo iſt CDQ $= 90^\circ - \omega - \varphi$, alſo tang CDQ $=$ cot $(\omega + \varphi)$. Ferner iſt

$$\tan(\varphi + \omega) = \frac{\tan\varphi + \tan\omega}{1 - \tan\varphi \cdot \tan\omega},$$

$$b^2 = a^2 \tan\varphi \cdot \tan\omega,$$

$$\tan\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}; \cot\varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{\sin 2\varphi},$$

Durch die Subſtitutionen mittelſt der drey letztern Gleichungen wird

$$\tan(\varphi + \omega) = \frac{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)\cos 2\varphi}{(a^2 - b^2)\sin 2\varphi}.$$

Der umgekehrte Bruch iſt cot $(\varphi + \omega) =$ tang CDQ. Dividirt man Zähler und Nenner durch aa + bb, und gebraucht die abgekürzte Bezeichnung, m, ſo hat man die Formel des Satzes.

In der Hypotheſe elliptiſcher Meridiane iſt CDQ der Winkel der Richtung der Schwere mit dem Halbmeſſer der Erde an einem Orte.

33. Es iſt (Fig. 9.) PQ $= f \sin\varphi \cdot \tan\omega = \frac{bb}{aa} \times$ CP. Und CQ $= \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ CP $= \frac{e^2}{a^2}$ CP.

Bew. Denn PQ = DP. tang PDQ; DP $= f \sin\varphi$; und W. PDQ = PTD $= \omega$. Aus dem Werthe von PQ folgt ſogleich der Werth von CQ.

34. Es iſt DQ $= \frac{f \sin\varphi}{\cos\omega} = \frac{bb}{f \sin(\varphi + \omega)}$ (aus 19.).

35. Man ziehe (Fig. 9.) QS ſenkrecht auf DC, ſo iſt $CD \times DS = bb$.

Denn $DS = DQ. \cos QDS = DQ. \sin(\varphi + \omega)$ $= \frac{bb}{f}$, aus (34.)

36. Es ſeyn wiederum DE, FG (Fig. 10.) zwey conjugirte Durchmeſſer. Anſtatt ſie auf die beiden Axen zu beziehen, nehme man irgend ein Paar anderer conjugirter Durchmeſſer HI, KL, deren Winkel ICK iſt. Es iſt

I. $CH^2 \times \sin HCD \times \sin HCG = CK \times \sin KCD \times \sin KCG$.

II. $CH^2 . \sin HCK . \sin HCG = CD^2 . \sin DCG \times \sin DCK$.

III. $CD^2 . \sin DCH . \sin DCK = CG^2 . \sin GCH \times \sin GCK$.

Bew. Man ſetze $ICK = \alpha$, $HCD = \varphi$; $ICG = \omega$; ferner $DC = f$, $CG = g$; $HC = h$, $CK = k$. Dann ziehe man durch irgend einen Punct M des Umfanges MP parallel mit CG, als Ordinate auf dem Durchmeſſer DE; und MQ parallel mit CK, als Ordinate auf HI; ferner PR parallel mit HC; PS parallel mit CK, und ſetze $CP = x$; $PM = y$. Nun iſt;

$$\frac{y \sin \omega}{\sin \alpha} = MR; \quad \frac{y \sin(\alpha - \omega)}{\sin \alpha} = PR;$$

$$\frac{x \sin \varphi}{\sin \alpha} = PS; \quad \frac{x \sin(\alpha + \varphi)}{\sin \alpha} = CS,$$

alſo

$$MQ = \frac{y \sin \omega}{\sin \alpha} + \frac{x \sin \varphi}{\sin \alpha},$$

$$CQ = \frac{x \sin(\alpha + \varphi)}{\sin \alpha} - \frac{y \sin(\alpha - \omega)}{\sin \alpha}.$$

Da die Ordinaten MQ mit dem conjugirten Durchmeſſer parallel ſind, ſo iſt (17.)

$$h^2 k^2 = k^2 . CQ^2 + h^2 . QM^2.$$

Daraus iſt

$$h^2k^2 \sin\alpha^2 = k^2(x^2 \sin(\alpha+\varphi)^2 - 2xy \sin(\alpha+\varphi).$$
$$\sin(\alpha-\omega) + y^2 \sin(\alpha-\omega)^2).$$
$$+ h^2(x^2 \sin\varphi^2 + 2xy \sin\varphi . \sin\omega + y^2 \sin\omega^2).$$

Weil die Ordinaten MP mit dem conjugirten Durchmeſſer zu DE parallel ſind, ſo hat y immer zwey gleiche entgegengeſetzte Werthe, alſo iſt

$$h^2 \sin\varphi . \sin\omega = k^2 \sin(\alpha+\varphi) . \sin(\alpha-\omega).$$

Dies iſt die erſte Formel des Satzes.

Die Gleichung zwiſchen x und y iſt nun

$$h^2k^2 \sin\alpha^2 = (h^2 \sin\varphi^2 + k^2 \sin(\alpha+\varphi)^2)x^2$$
$$+ (h^2 \sin\omega^2 + k^2 \sin(\alpha-\omega^2))y^2.$$

Für $y = 0$ iſt $x = f$, und

$$h^2k^2 \sin\alpha^2 = (h^2 \sin\varphi^2 + k^2 \sin(\alpha+\varphi)^2)f^2.$$

Setzt man in dem zweyten Theile für h^2 ſeinen Werth durch k^2, ſo iſt

$$h^2 \sin\alpha^2 = \left(\frac{\sin(\alpha+\varphi) . \sin(\alpha-\omega) . \sin\varphi}{\sin\omega} + \sin(\alpha+\varphi)^2\right)f^2.$$

Entwickelt man die Sinus der zuſammengeſetzten Winkel, ſo wird der Factor von $f^2 =$

$$\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\omega}(\sin\alpha . \cos\omega . \sin\varphi + \sin\alpha . \sin\omega . \cos\varphi)$$

$$= \frac{\sin\alpha . \sin(\alpha+\varphi) . \sin(\varphi+\omega)}{\sin\omega}.$$

Solchergeſtalt iſt

$$h^2 \sin\alpha . \sin\omega = f^2 \sin(\varphi+\omega) . \sin(\alpha+\varphi),$$

welches die zweyte Formel des Satzes iſt.

Die dritte Formel iſt der erſten ganz ähnlich, indem nur die conjugirten Durchmeſſer HI, KL mit den Durchmeſſern, DE, FG, vertauſcht ſind.

37. Man ziehe (Fig. 10.) durch die Endpuncte E, G, der beiden Durchmeſſer, DE, FG, die mit dem zu

HI conjugirten Durchmeſſer KL parallelen Ee, Gg an CI: es iſt Ee:Gg = Cg:Ce, und die Dreyecke ECe, GCg ſind ſich gleich.

Bew. Es iſt

$$CE : Ee = \sin CeE : \sin ECe$$
$$CE : Ce = \sin CeE : \sin CEe$$
und $$Gg : CG = \sin GCg : \sin CgG$$
$$Cg : CG = \sin CGg : \sin CgG.$$

Da W. ECe = DCH; CEe = DCK; CGg = GCK, und ſin CeE = ſin CgG; ſin GCg = ſin GCH iſt, ſo entſteht durch Zuſammenſetzung der Verhältniſſe rechter Hand das Verhältniß ſin GCH × ſin GCK: ſin DCH × ſin DCK. Dieſes iſt gleich dem Verhältniſſe $CD^2 : CG^2$ nach (36. III.), oder dem $CE^2 : CG^2$. Aus den Verhältniſſen linker Hand entſteht das zuſammengeſetzte $CE^2 \times Gg \times Cg : CG^2 \times Ee \times Ce$. Da dieſes dem $CE^2 : CG^2$ gleich iſt, ſo iſt das Verhältniß $Gg \times Cg : Ee \times Ce = 1 : 1$, oder es iſt Ee : Gg = Cg : Ce.

38. Es ſey (Fig. 11.) HI irgend ein Durchmeſſer, und DT eine berührende in D, welche die verlängerte IH in T ſchneide. Man ziehe DP parallel mit dem zu HI conjugirten Durchmeſſer KL, ſo iſt CP:CH = CH:CT.

Bew. Durch D ziehe man den Durchmeſſer DE, und den zugeordneten FG, ſo iſt DT parallel mit FG. Mit Beybehaltung der vorigen Bezeichnungen iſt DC = f; HC = h; W. HCD = φ; ICG = DTC = ω; CPD = α; CDP = $180^\circ - (\alpha + \varphi)$; CDT = $180^\circ - (\varphi + \omega)$; alſo $CP = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin\alpha} CD$; $CT = \frac{\sin(\varphi+\omega)}{\sin\omega} CD$, daher $CP . CT = \frac{\sin(\alpha+\varphi) . \sin(\varphi+\omega)}{\sin\alpha . \sin\omega} \times CD^2$, alſo aus (36. II.) $CP . CT = CH^2$. Hieraus iſt CP : PH = IP : PT, und IP : PH = IT : TH.

39. Die verlängerte Ordinate ſchneide die Ellipſe in d, und die berührende daſelbſt die verlängerte CH in T. Es

werde an d der Halbmeſſer Cd gezogen, ſo wird für die berührende in d eben ſo erwieſen, daß CP : CH = CH : CT′. Daher iſt CT = CT′. Oder, der Durchſchnitt T der berührenden in zwey Puncten, D, d, liegt mit dem Mittelpuncte der Ellipſe, und dem Mittelpuncte der Chorde Dd in gerader Linie. (Apollon. Conic. II. 29.)

40. Die berührende in D (Fig. 11.) ſchneide die conjugirten Durchmeſſer HI, LK, jenen in T, dieſen in t, auf ihren Verlängerungen, und FG ſey der conjugirte Durchmeſſer zu dem durch D gelegten, oder der berührenden parallel: es iſt $TD \times Dt = CG^2$.

Bew. Es iſt ſin CTD : ſin TCD = CD : TD,
ſin CtD : ſin tCD = DC : Dt,

und ſin CTD = ſin ICG = ſin GCH;
ſin CtD = ſin GCK, alſo iſt durch Verbindung beider Proportionen,

ſin GCH . ſin GCK : ſin HCD . ſin KCD = $CD^2 : TD \times Dt$.

Das erſtere Verhältniß iſt gleich dem $CD^2 : CG^2$, (36. III.) alſo iſt $TD \times Dt = CG^2$.

41. Durch die Endpuncte des Durchmeſſers HI ziehe man mit dem conjugirten KL die parallelen HM, IN bis an die in D berührende TDt: es iſt MD : DN = HM : IN.

Denn MD : DN = HP : PI = TH : TI = HM : IN. (ſ. 38.).

42. Von einer Ellipſe ſind gegeben drey Puncte, M, N, P, (Fig. 12.). und die berührenden in M, N, die Ellipſe zu beſtimmen.

Die berührenden ſchneiden ſich in T. Zieht man durch T und die Mitte Q der Chorden MN die gerade TQ, ſo geht dieſe, wenn es nöthig, verlängert durch den Mittelpunct der Ellipſe (39.). Eben dieſe Linie halbirt alle mit MN parallelen Chorden, weil eine gerade Linie, welche die parallelen Chorden halbirt, durch zwey Puncte, hier C und Q, beſtimmt wird. Sie treffe die Ellipſe in D

und E. Die mit MN durch C parallele FG iſt der zu DE conjugirte Durchmeſſer, deſſen Winkel mit DE, nämlich ECF = CQM, durch das Dreyeck MTN gegeben wird.

Die gegebenen Größen ſind PR = p, wenn PR parallel mit MN gezogen wird, QN = q; QR = r; QT = t; die geſuchten CD = f; CF = GC = g; GQ = x. Es iſt

I. $f^2g^2 = g^2x^2 + f^2q^2$.

II. $f^2g^2 = g^2(x+r)^2 + f^2p^2$ (17.)

III. $(t+x)\,x = f^2$ (38.).

Aus dieſen Gleichungen wird durch Elimination von f, g, leicht erhalten:

$$x = \frac{r^2q^2}{(q^2-p^2)\,t - 2rq^2}.$$

Die dritte Gleichung giebt nun den Werth von f^2 oder CD^2. Die erſte Gleichung, oder die aus I. und III. hergeleitete, $g^2tx = f^2q^2$ giebt den Werth von g^2 oder FG^2. Da der Winkel ECF gegeben wird, ſo iſt in der Gleichung, $fg \sin(\varphi+\omega) = ab$ (22.), der Winkel $\varphi+\omega$ = ECF bekannt. Dadurch wird ab, das Product der beiden halben Axen gefunden. Da ferner $f^2+g^2 = a^2+b^2$ iſt (24.), ſo wird nun ſowohl $a+b$, als $a-b$, bekannt. Da endlich $f^2 : g^2 = \sin 2\omega : \sin 2\varphi$ iſt (20.), ſo wird dadurch ſowohl ω als φ gefunden, von welchen letzterer der Winkel der großen Axe mit dem Durchmeſſer DE iſt. Es iſt nämlich $f^2+g^2 : f^2-g^2 = \sin 2\omega + \sin 2\varphi : \sin 2\omega - \sin 2\varphi = \tang(\omega+\varphi) : \tang(\omega-\varphi)$. Die Ellipſe läßt ſich aber auch, ohne die Axen und ihre Lage zu kennen, beſchreiben, weil die Quadrate der Ordinaten zu dem Durchmeſſer DE ſich wie die Rechtecke von den zugehörigen Segmenten verhalten. Es iſt nämlich $QN^2 : RP^2 = DQ \times QE : DR \times RE$, und ſo mit jedem andern Paare, wie es aus der Gleichung in (17.) ſogleich folgt.

Die Lage und Länge der Axen aus zwey gegebenen conjugirten Durchmeſſern durch Conſtruction zu finden, lehrt Pappus in den mathematiſchen Sammlungen. VIII. 14.

Dieſe Aufgabe hat ihre Anwendung in der Baukunſt bey der Zeichnung ungleichſchenklichter Gewölbebogen (arcs rampants), wo die Kämpfer an den Gewölbepfeilern ungleiche Höhe haben, und außer ihnen noch ein Punct gegeben wird, durch welchen der Gewölbebogen gehen ſoll.

43. Es iſt AMB (Fig. 13.) eine halbe Ellipſe, deren große Axe AB, Mittelpunct C, Brennpuncte, F, G. In M ſey die berührende TMt, und die darauf ſenkrechte MQ. Von den Brennpuncten, F, G, werden die geraden, FM, GM, an M gezogen: es iſt der W. FMQ = GMQ, ſo wie W. FMt = GMT.

Bew. Man ziehe MP ſenkrecht auf AB. Aus (33.) iſt $CQ = \frac{e^2}{a^2} CP$, wo a die halbe große Axe, e der Abſtand der Brennpuncte vom Mittelpuncte C iſt. Alſo iſt $FQ = e + \frac{e^2}{a^2} CP$, und $GQ = e - \frac{e^2}{a^2} CP$. Nun iſt (12.) $FM = a + \frac{e}{a} CP$, alſo $GM = 2a - FM = a - \frac{e}{a} CP$. Folglich iſt $FQ : GQ = FM : GM$. Daher halbirt die MQ den Winkel FMG, zufolge des umgekehrten Satzes in dem Artikel, Dreyeck, nr. 9. S. Apollonius, B. III. S. 48.

44. Wenn die Ellipſe als eine phyſiſche, die Lichtſtrahlen zurückwerfende Linie betrachtet wird, ſo werden die von dem einen Brennpuncte auffallenden Strahlen nach dem andern hin zurückgeworfen. Daher die Benennung der Brennpuncte.

45 Es iſt ſin FMQ oder ſin $GMQ = \frac{e \cos \omega}{a}$, wo ω = CTM iſt. (Fig. 13.)

Bew. In dem Dreyeck FMQ iſt FM : FQ = ſin MQF : ſin FMQ = cos ω : ſin FMQ. Ferner iſt

$FM = a + \frac{e}{a} CP$, und $FQ = e + \frac{e^2}{a^2} CP$, alſo $FM : FQ = a : e$, daher $a : e = \cos\omega : \sin FMQ$.

46. Es iſt $(\sin FMQ)^2 = \frac{\cos\omega \cdot \cos(\varphi + \omega)}{\cos\varphi}$; $(\cos FMQ)^2 = \frac{\sin\omega \cdot \sin(\varphi + \omega)}{\cos\varphi}$; $(\cot FMQ)^2 = \tang\omega \cdot \tang(\varphi + \omega)$; $\cot FMQ = \frac{f}{e} \cdot \frac{\sin(\varphi + \omega)}{\cos\omega}$, wo $f = MC$; φ der Winkel ACM; ω der Winkel des zu MC conjugirten Halbmeſſers mit der Axe iſt. Die erſte Formel wird leicht aus der in (45.) gefunden, wenn man für e^2 den Werth deſſelben, $a^2 - b^2$, einführt, und für $\frac{b^2}{a^2}$ ſeinen Werth aus (15.) ſetzt. Aus der erſten Formel folgt unmittelbar die zwente, aus beiden die dritte. Die vierte wird folgendergeſtalt gefunden.

Es iſt $(\sin FMQ)^2 = \frac{e^2 \cos\omega^2}{a^2}$; $(\cos FMQ)^2 = \frac{a^2 - e^2 \cos\omega^2}{a^2} = \frac{a^2 \sin\omega^2 + b^2 \cos\omega^2}{a^2}$, alſo $(\cot FMQ)^2 = \frac{a^2 \sin\omega^2 + b^2 \cos\omega^2}{e^2 \cos\omega^2}$. Aus der in (16.) gefundenen Gleichung ergiebt ſich, daß $a^2 b^2 = (a^2 \sin\omega^2 + b^2 \cos\omega^2) g^2$ iſt, nämlich wenn $x = 0$, alſo $y = g$ iſt. Dadurch iſt $\cot FMQ = \frac{ab}{ge \cos\omega}$. Es iſt aber aus (23.) $fg \sin(\varphi + \omega) = ab$, folglich $\cot FMQ = \frac{f \sin(\varphi + \omega)}{e \cos\omega}$.

47. Es iſt $\frac{aa-bb}{aa}\left(=\frac{e^2}{a^2}\right)=\frac{\operatorname{coſ}(\varphi+\omega)}{\operatorname{coſ}\varphi.\operatorname{coſ}\omega}$;

$\frac{aa+bb}{aa}=\frac{\operatorname{coſ}(\varphi-\omega)}{\operatorname{coſ}\varphi.\operatorname{coſ}\omega}$; $\frac{aa-bb}{aa+bb}=\frac{\operatorname{coſ}(\varphi+\omega)}{\operatorname{coſ}(\varphi-\omega)}$.

Bew. Aus (15.) iſt $aa-bb=$ . . . .

$aa\,(1-\operatorname{tang}\varphi.\operatorname{tg}\omega)=aa\frac{\operatorname{coſ}\varphi.\operatorname{coſ}\omega-\operatorname{ſin}\varphi.\operatorname{ſin}\omega}{\operatorname{coſ}\varphi.\operatorname{coſ}\omega}$

$=aa\frac{\operatorname{coſ}(\varphi+\omega)}{\operatorname{coſ}\varphi.\operatorname{coſ}\omega}$. Auf ähnliche Art wird die zweyte Formel erwieſen, worau die dritte unmittelbar folgt.

48. Es iſt FM $\times$ GM $=gg=$ dem Quadrat des zu CM conjugirten Halbmeſſers. (Fig. 13.).

Bew. Da $FM=a+\frac{e}{a}CP$; $GM=a-\frac{e}{a}CP$,

ſo iſt $FM\times GM=a^2-\frac{e^2}{a^2}f^2\operatorname{coſ}\varphi^2=a^2-e^2$

$\times\frac{\operatorname{ſin}\omega.\operatorname{coſ}\varphi}{\operatorname{ſin}(\varphi+\omega)}=a^2\left(1-\frac{\operatorname{ſin}\omega.\operatorname{coſ}(\varphi+\omega)}{\operatorname{coſ}\omega.\operatorname{ſin}(\varphi+\omega)}\right)$

$=a^2.\frac{\operatorname{ſin}\varphi}{\operatorname{coſ}\omega.\operatorname{ſin}(\varphi+\omega)}=g^2$ (aus 19.).

49. Es ſeyn FH, GK ſenkrecht auf die berührende TMt, ſo iſt FH $\times$ GK $=bb=$ dem Quadrat der halben kleinen Axe. (Fig. 13.).

Bew. Da $FH=FM.\operatorname{ſin}FMH=FM.\operatorname{coſ}FMQ$, und $GK=GM.\operatorname{coſ}GMQ=GM.\operatorname{coſ}FMQ$, ferner $FM\times GM=a^2\frac{\operatorname{ſin}\varphi}{\operatorname{coſ}\omega.\operatorname{ſin}(\varphi+\omega)}$,

auch $(\operatorname{coſ}FMQ)^2=\frac{\operatorname{ſin}\omega.\operatorname{ſin}(\varphi+\omega)}{\operatorname{coſ}\varphi}$ iſt, ſo iſt

$FH\times GK=a^2\operatorname{tang}\varphi.\operatorname{tang}\omega=b^2$, aus (15.).

Ich finde den Satz beym Apollonius nicht. Er dient zur Auflöſung der aſtronomiſchen Aufgabe, den Stillſtandspunct eines Planeten in einer elliptiſchen Bahn zu finden. Keillii Introd. in Aſtron. Lect. XVII.

50. In den Scheitelpuncten der großen Axe, A, B, ſeyn die ſenkrechten, AD, BE, auf dieſelbe errichtet, welche die berührende TM in D, E, treffen; es iſt $AD \times BE = bb$. (Fig. 13.).

Bew. Es iſt $CT = \frac{CA^2}{CP}$ aus (30.), alſo $AT = CA\left(\frac{CA}{CP} - 1\right)$; $BT = CA\left(\frac{CA}{CP} + 1\right)$, und $AT \times BT = \frac{CA^2}{CP^2}(CA^2 - CP^2)$, oder $AT \times BT = \frac{a^2}{x^2}(a^2 - x^2) = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a^2 y^2}{x^2} = \frac{a^2}{b^2} \cdot a^2 \, tg\, \varphi^2$, aus (4 u. 15.). Ferner iſt $AD = AT. \tan\omega$; $BE = BT,\ tg\,\omega$, alſo $AD \times BE = AT . BT. \tan\omega^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot a^2 . \tan\varphi^2 \times \tan\omega^2 = b^2$, (15.).

Apollonius hat den Satz allgemein für jeden Durchmeſſer erwieſen. L. III. prop. 42. Anſtatt des Quadrats der halben kleinen Axe iſt nur das Quadrat des conjugirten Halbmeſſers zu ſetzen. Nach der hier gebrauchten Methode kann der allgemeinere Satz, mit Zuziehung 36. I erwieſen werden. Der Winkel CPM iſt daſelbſt α, CA iſt h, und ſtatt b iſt k zu ſetzen. Der beſondere Satz iſt wegen der Verbindung mit dem Satz (49.) merkwürdig.

51. Der Winkel, welchen die von F oder G nach den Puncten D, E gezogenen geraden Linien in Fig. 13. mit einander machen, iſt ein Rechter. Apollonius, B. III. S. 45. Der Satz folgt aus den Werthen von AD und BE, verbunden mit denen von AG und BG. Es iſt

$AD = AT \times \tan g\,\omega = \frac{a(a-x)}{x} tg\,\omega$; $BE = BT \times \tan g\,\omega = \frac{a(a+x)}{x} tg\,\omega$, (31.).

52. Es ſind wie vorher, F, G, die Brennpuncte, T, Q, die Puncte, wo die berührende MT und die Normale MQ die Axe treffen; es iſt $TG:TQ = TC:TF$. (Fig. 13.).

Erhellt aus den Werthen dieſer Linien.

53. Man ziehe aus C an die Puncte H, K, wo die ſenkrechten FH, GK auf die berührende ſie treffen, die geraden CH, CK, ſo iſt CH mit GM, und CK mit FM parallel. (Fig. 13.).

Bew. Es iſt $TM:TH = TQ:TF = TG:TC$ (52.), alſo ſind GM, CH parallel. Eben ſo iſt $TK:TM = TG:TQ = TC:TF$, daher KC und MF parallel.

54. Es iſt $CH = CK = CA$.

Denn $TF:TC = TM:CK$, das iſt $\frac{aa}{x} + e : \frac{aa}{x} = a + \frac{e}{a}x : CK$, alſo $CK = a$. Eben ſo iſt $TG:TC = GM:CH$, das iſt, $\frac{aa}{x} - e : \frac{aa}{x} = a - \frac{ex}{a} : CH$, alſo $CH = a$.

55. Ein ganz geometriſcher Beweis des Satzes (54.) iſt folgender. An die Ellipſe AMB (Fig. 14.) iſt in M die berührende Tt gezogen, und an M aus den Brennpuncten F, G die geraden FM, GM, die nach D und E verlängert werden bis an die gleichfalls verlängerten Perpendikel GK, FH auf die berührende. Wegen der gleichen Winkel, FMH, GMK, HME, KMD, iſt $FM = ME$; $GM = MD$, alſo $FD = AB$, und $GE = AB$. Man ziehe aus dem Mittelpuncte C die CH und CK, ſo iſt,

weil FH = HE, und GK = KD, ſo wie FC = CG iſt, CH parallel mit GME und = $\frac{1}{2}$ GE. Eben ſo iſt CK parallel mit FMD, und = $\frac{1}{2}$ FD. Das iſt, CH = CK = AC.

56. Iſt die große Axe der Länge und Lage nach gegeben, alſo auch der Mittelpunct, ſo ergiebt ſich hieraus die Conſtruction der Ellipſe, welche eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt. Die Forderung kann unmöglich ſeyn.

Sind bloß die Länge der großen Axe und der Mittelpunct gegeben, dazu aber noch zwey gerade Linien, die von der Ellipſe berührt werden ſollen, ſo beſchreibe man aus C mit der halben Axe einen Kreis, welcher auf jeder der berührenden zwey Puncte, wie H, K, angiebt, wenn die Forderung anders möglich iſt. Die Perpendikel auf die berührenden in den Durchſchnittspuncten mit dem Kreiſe beſtimmen die Brennpuncte, und dadurch ſowohl die Lage der großen Axe als die Größe der kleinen.

57. Dieſes ſind die wichtigſten und merkwürdigſten Eigenſchaften der Ellipſe. Die Verhältniſſe an den Abſchnitten zugeordneter Linien bey irgend einer Lage der Axen der Coordinaten werden aus der allgemeinen Gleichung für alle drey Kegelſchnitte in dem Artikel, worin von dieſen Linien allgemein gehandelt wird, hergeleitet werden, da ſie ihnen allen ganz gemein ſind.

Die Rectification und Quadratur der Ellipſe wird in den Artikeln, die dazu überhaupt die Methoden angeben, gezeigt werden. Die Formel für den Halbmeſſer der Krümmung in dem Artikel, Krümmungskreis.

Ellipſen höherer Art (elliptoides) ſind krumme Linien, die durch die Gleichung, $ay^{m+n} = bx^m (a-x)^n$, wenn m und n größer als 1 ſind, beſtimmt werden. Man ſollte noch hinzuſetzen, daß m und n beide ungerade Zahlen ſeyn, damit dieſe höhere Gattung keine ins Unendliche wachſende Ordinaten haben könne, und daß, wie bey der Apolloniſchen Ellipſe, die Abſciſſen, zu welcher mögliche Ordinaten gehören, nicht über eine gewiſſe Gränze, hier a, ſich erſtrecken. Sie können aus einem Kegel höherer Art,

Staats-Bibliothek Bamberg

wie die Ellipſe aus dem gemeinen Kegel, geſchnitten werden, wenn ſtatt des Kreiſes die Linie genommen wird, deren Gleichung iſt $y^{m+1} = x^m (a-x)$. Es wird nicht der Mühe werth ſeyn, Unterſuchungen über dieſe Linien anzuſtellen. Man ſehe de la Hire in dem Appendice ad ſectiones conicas, und Wolf in den elementis Analyſeos §. 522. ſeqq.

Ellipſimber, (ellipſis imbricata,) hohl gebogene Ellipſe, iſt eine krumme Linie von doppelter Krümmung auf der Oberfläche eines ſenkrechten elliptiſchen Cylinders, deren Abſciſſen Bogen des elliptiſchen Umfanges von der Grundfläche dieſes Körpers, und die Ordinaten, welche auf die Grundfläche ſenkrecht ſtehen, den Ordinaten einer krummen Linie von einfacher Krümmung gleich ſind, an welcher die Abſciſſen mit denjenigen zu den Bogen des elliptiſchen Umfanges übereinkommen. Dieſe zweyte Curve gehe durch die Endpuncte einer der Axen. Die Durchſchnittslinie einer Kugelfläche und der Oberfläche eines ſenkrechten Cylinders, der nach ſeinem ganzen Umfang durch die Kugel geſteckt iſt, ſo aber, daß die Axe nicht durch ihren Mittelpunct geht, iſt eine Ellipſimber. Frezier traité de Stéréotomie. T. I. pag. 54. Vergl. Cykloimber.

Ellipſograph, (Compas elliptique), ein Inſtrument, um eine Ellipſe durch ſtetige Bewegung eines Stiftes zu beſchreiben. Es kann auf verſchiedene Art eingerichtet werden. Das einfachſte iſt ein Faden, deſſen Länge man der großen Axe gleich nimmt. Die Endpuncte befeſtigt man in den Brennpuncten. Mit einem Stifte ſpannt man den Faden, und führt ſo die beiden Theile deſſelben rings um die Brennpuncte herum. Dieſes Verfahren gründet ſich auf die Eigenſchaft der Ellipſe, daß die Summe der Linien aus den Brennpuncten an irgend einen Punct des Umfanges der großen Axe gleich iſt.

Anſtatt des Fadens kann man auch zwey Liniale mit einem der Länge nach gemachten Einſchnitt gebrauchen. In der Figur 14. zu Ellipſe (54.) ſind FD, GE, die

ſich in dem Puncte M der Ellipſe ſchneiden, jede der großen Axe gleich, und der Abſtand der Puncte, D, E, dem Abſtande der Brennpuncte, F, G. Man nehme zwey Liniale von der Länge FD, GE, ſo groß als die Axe der Ellipſe, und verbinde ſie in den Puncten, D, E, durch ein Linial, das dem Abſtande der Brennpuncte gleich iſt, mittelſt Zapfen, um welche die Liniale beweglich ſeyn. Die Puncte, F, G, werden in den Brennpuncten mit einem Stifte, um welchen die Liniale ſich drehen können, befeſtigt. Ein Stift in dem Durchſchnitte der Mittellinien beider Liniale, die nach der Länge ausgeſchnitten ſind, beſchreibt bey der Drehung derſelben die Ellipſe.

Auf die Conſtruction einer Ellipſe in dem Artikel, Ellipſe (14), gründet ſich ein Inſtrument, woran man die große Axe und den Abſtand der Brennpuncte innerhalb gewiſſer Gränzen verändern kann. Zwey Liniale mit einem Ausſchnitte der Länge nach werden unter einem rechten Winkel zuſammengefügt, wie die Linien AB, DE (Fig. .). Auf einem dritten Linial werden drey Stifte, M, F, G, eingeſteckt, ſo daß MG die halbe große Axe, MF die halbe kleine iſt. Den Stift F verſchiebt man auf AB, den Stift G zu gleicher Zeit auf DE, ſo beſchreibt der Stift M die verlangte Ellipſe.

Das bequemſte Inſtrument zur Zeichnung einer Ellipſe iſt folgendes, welches aus der Conſtruction ( ) hergeleitet wird. Zwey Liniale, AB, AC, von gleicher Länge (Fig. 15.) ſind in A durch ein Gewinde beweglich verbunden. Die ausgeſtreckte Länge beider iſt gleich der halben Summe der beiden Axen. Auf AB iſt BD die halbe kleine Axe, alſo CA + AD die halbe große In dem Puncte C wird das Linial AC auf der Ebene der Zeichnung befeſtigt, ſo daß es ſich um C drehen läßt. Der Endpunct B von AB wird auf einer geraden, durch C gezogenen, Linie BCb fortgeſchoben, ſo beſchreibt ein Stift in dem Puncte D die gegebene Ellipſe, um den Mittelpunct C, und die große Axe fällt in Bb. Denn man nehme auf AC das Stück AE = AD, und auf der verlängerten AF = AD, ſo iſt der W. EDF ein rechter, als Winkel in einem Halb-

kreiſe. Weil AD = AE, ſo wie AB = AC, ſo iſt AD : AE = AB : AC, und ED parallel mit CB, (Dreyeck, 6.). Man verlängere FD bis G auf CB, ſo iſt FG ſenkrecht auf CB, wie FD auf ED. In den ähnlichen Dreyecken FED, FCG iſt FG : GD = FC : EC = FC : DB. Nun beſchreibt der Punct F den Umfang eines Kreiſes, deſſen Halbmeſſer CF iſt. Die Ordinate FG an dieſem Kreiſe verhält ſich zu der Ordinate an der von D beſchriebenen Linie durchgehends wie der Halbmeſſer FC zu einer gegebenen DB; alſo iſt die von D beſchriebene Linie eine Ellipſe, deren halbe Axen FC und BD ſind.

Den Punct D kann man auch auf der andern Seite von B nehmen.

Von den Inſtrumenten, Ellipſen und die andern Kegelſchnitte zu beſchreiben, iſt eine umſtändliche Beſchreibung in van Schooten Tractatus de organica conicarum ſectionum in plano deſcriptione, befindlich, in der Sammlung: Exercitationes mathematicae, Lugd. 1657.

Beſchreibung eines Ellipſograph, ꝛc. (von G. F. Parrot). Gotha 1794.

Ellipſoid, wird von einigen ſtatt Sphäroid gebraucht, nicht ganz ſchicklich, weil der Ausdruck eine ellipſenähnliche Figur bedeutet, da er einen Körper anzeigen ſoll, der durch die Umdrehung einer Ellipſe um eine ihrer Axen entſteht. Da Sphäroid allgemein jeden Körper bedeuten kann, der durch die Umdrehung einer in ſich wiederkehrenden rundlichen Figur entſteht, ſo mag Ellipſoid kurz das elliptiſche Sphäroid, das durch die Umdrehung einer Ellipſe erzeugte, bedeuten.

Ellipticität iſt der Quotient des Unterſchiedes der Axen einer Ellipſe durch die große (oder auch die kleine) Axe dividirt. Je größer dieſer iſt, deſto mehr entfernt ſich die Ellipſe von einem Kreiſe über der großen Axe als Durchmeſſer. Der Ausdruck iſt noch wenig gebräuchlich, aber ganz ſchicklich. Auf deutſch hieße es die Abplattung, wie

in der Geographie der Quotient des Unterſchiedes der beiden Haupt-Durchmeſſer der Erde dividirt durch den Durchmeſſer des Aequators ihre Abplattung heißt. Der Abſtand der Brennpuncte durch die große Axe dividirt, was man in der Aſtronomie die Excentricität nennt, dient auch die Abweichung einer Ellipſe von dem Kreiſe über der großen Axe zu meſſen.

Elliptoides, ſ. Ellipſe höherer Art.

Endecagonalzahl, eilfeckige Zahl, iſt eine Polygonalzahl, von der Form $\frac{9nn-7n}{2}$ als die Summe von n Gliedern der arithmetiſchen Reihe 1, 10, 19, etc.

Endecagonum, ein ordentliches Vieleck von eilf Seiten.

Endlich iſt jede Größe, die ſich mit der Einheit unmittelbar oder mittelbar vergleichen läßt. Jede zählbare Menge iſt endlich; jede begränzte Linie, Fläche oder körperliche Ausdehnung iſt endlich. Der Abſtand der Sonne von einem Nebelfleck iſt endlich, ob er gleich durch unſere Mittel zur Ausmeſſung der Abſtände nicht meßbar iſt. Das Unendliche läßt ſich weder mit einer abſtracten, noch einer ſinnlichen Einheit vergleichen; aber wohl kann man ein Unendliches mit einem andern derſelben Gattung vergleichen.

Eine Größe kann aus unendlich vielen Theilen beſtehen, und dennoch endlich ſeyn. Eine geometriſche abnehmende Progreſſion ins Unendliche fortgeſetzt, hat eine endliche Summe. Daher iſt der Raum zwiſchen der logarithmiſchen Linie und ihrer Aſymptote auf der Seite der abnehmenden Ordinaten endlich, ob er gleich unendlich lang iſt. Die Körper, die durch die Umdrehung einer Hyperbel und Conchoide um ihre Aſymptote entſtehen, haben einen endlichen Inhalt, ob ſie gleich unendlich in die Länge ausgedehnt ſind. S. Conchoide und Cubirung.

Enneagonalzahl, neuneckige Zahl, iſt eine Polygonalzahl, von der Form $\frac{7nn-5n}{2}$, als die Summe von n Gliedern der arithmetiſchen Progreſſion 1, 8, 15, etc.

Enneagonum, ein ordentliches Vieleck von neun Seiten.

Entgegengeſetzte Größen ſind ſolche, bey welchen außer ihrer Quantität noch eine entgegengeſetzte Beziehung, in Abſicht auf Addition und Subtraction, betrachtet wird. Dieſes kann auf zweyerley Art geſchehen.

Erſtlich, es ſey der Werth einer Größe der Unterſchied zweyer Größen, die eintheilig oder mehrtheilig ſind, als $A = a + b - c - d$, ſo ſind die Theile, a, b, den Theilen der abgezogenen Größe, c, d, entgegengeſetzt, jene aber ſind gleichnamig, ſo wie dieſe. Z. B. Schulden ſind dem baaren Caſſenvorrath und den activen Schuldforderungen entgegengeſetzt bey der Berechnung des Vermögenſtandes. So ſind Steigen und Fallen, vorwärts- und rückwärts gerichtete Bewegung, entgegengeſetzte Größen, die bey der Berechnung des zurückgelegten Weges mit entgegengeſetzten Vorzeichen zuſammengenommen werden. Diejenigen Größen, von welchen die ihnen entgegengeſetzten abgezogen werden, nennt man poſitive, weil man ſetzt, daß der Werth der Größe A, die aus der Verbindung der entgegengeſetzten Größen entſteht, ihnen gleichnamig ſey. Die abzuziehenden Größen nennt man negative. Fände ſich, daß dieſe in der Quantität jene übertreffen, ſo legt man A einen negativen Werth bey, nämlich in Beziehung auf die Beſchaffenheit, die man von A vorausgeſetzt hatte. Nimmt man aber für A gleich Anfangs dieſe Beſchaffenheit an, ſo iſt, was vorher negativ war, poſitiv, und das Poſitive wird in Negatives verwandelt. Wer ſein baares Vermögen berechnete, und fände, daß ſeine Schulden mehr betragen als Caſſenvorrath und Forderungen, der hätte ein negatives Vermögen. Hatte er aber das Reſultat gleich als Schuld vorausgeſetzt, ſo fand er es poſitiv.

So verhält es ſich auch mit den Werthen einer Gleichung, als $x^3 - 10x^2 + 12x - 140 = y$. Man nennt ſie poſitiv, wenn die mit + bezeichneten Termini mehr ausmachen als die, welche — vor ſich haben, z. B. wenn $x = 12$, ſo iſt $y = + 292$. Man nennt die Werthe negativ, wenn dieſe Vorausſetzung nicht erfüllt wird, z. B. wenn $x = 5$ iſt, wodurch $y = - 205$ wird. Ueberhaupt muß man bey allen Progreſſionen von Größen, die aus Theilen zuſammengeſetzt werden, ſie in Abſicht der gegenſeitigen Beſchaffenheit dieſer Theile unterſcheiden. Es iſt gleichgültig, welche Gattung von Theilen man poſitiv, und welche man negativ nennen will. So könnte man ſtatt des vorher gegebenen Werthes von y, ohne die Quantität zu ändern, auch annehmen $140 - 12x + 10x^2 - x^3 = y$, wodurch der Werth von $y = + 205$ oder poſitiv für $x = 5$ wird, aber $y = - 292$ oder negativ für $x = 12$. Eine arithmetiſche Progreſſion wird erhalten, wenn entweder derſelbe Unterſchied zu einer gegebenen Größe folgweiſe addirt oder ſubtrahirt wird. Die Glieder ſind in dem letzten Falle negativ, wenn die Vielfachen des Unterſchiedes die gegebene Größe übertreffen. Z. B. der Unterſchied = 3; die gegebene Größe = 7, ſo entſteht durch Addition die Reihe; 7; 10; 13; 16; 19, etc. durch Subtraction die Reihe 7; 4; 1; — 2; — 5; — 8, — etc. Beide Reihen machen durch das gemeinſchaftliche Glied, 7, nur eine Reihe aus, in welcher die Glieder auf gleiche Art gebildet werden, in der einem Folge durch Addition, in der andern durch Subtraction.

Dieſe Anwendung des Entgegengeſetzten iſt inzwiſchen nur die unwichtigere, wiewohl in allen Lehrbüchern bloß dieſe gelehrt wird, zufolge der Erklärung, daß entgegengeſetzte Größen ſolche ſeyn, die unter der Bedingung betrachtet werden, daß ſie ſich einander vermindern, und daß die eine durch einen ihr gleich großen Theil der andern aufgehoben wird. Man gründet hierauf auch die Rechnung mit Größen, deren Vorzeichen entgegengeſetzt ſind. Dieſes macht aber Dunkelheit, daher auch dieſe an ſich ſo leichte Rechnung (ſ. Buchſtabenrechnung) von einigen mit Mühe

und Kunſt dargethan wird. Dieſes Verfahren kann ſogar die unrichtige Vorſtellung veranlaſſen, daß man entgegengeſetzte oder gleichnamige Größen mit Rückſicht auf ihre Beziehung in einander multipliciren könne, wenn man bey den Vorzeichen + und − zugleich an die zur Erläuterung gegebenen Beyſpiele denkt, ſich z. B. die Multiplication von + 8 in − 3 als Multiplication von 8 Thlr. Vermögen in drey Thaler Schulden vorſtellt. In der That iſt die bisher erklärte Art der Entgegenſetzung nur Vertheilung der Werthe einer zuſammengeſetzten Größe unter zweyerley Rubriken.

Zweytens kann man auch die Größen in einer Verbindung den ihnen gleichartigen in einer andern ähnlichen Verbindung entgegenſetzen. Dieſe Entgegenſetzung iſt die eigentlich wichtige, wodurch die analytiſchen Sätze und Auflöſungen Allgemeinheit erhalten, und oft viele Fälle aus einem einzigen bloß durch gehörige Vertauſchung der Vorzeichen hergeleitet werden können. Die Alten kannten den Gebrauch dieſer Entgegenſetzung gar nicht. Jeder Fall, der ſich durch eine andere Lage einer oder mehrerer Linien und Winkel unterſcheidet, ward von ihnen beſonders betrachtet. Das macht aber Weitläuftigkeit, und iſt ermüdend, wenn ein Beweis oder eine Auflöſung mit wenigen Veränderungen oft wiederholt wird, wie in den Büchern des Apollonius de ſectione rationis, de ſectione determinata, de locis planis.

Bey jeder Verbindung von Größen, einige ganz einfache ausgenommen, ſind immer mehrere Fälle vorhanden, die ſich nur in der gegenſeitigen Beziehung der Größen durch Addition und Subtraction derſelben, ihrer Producte, Quotienten und Wurzeln unterſcheiden. Alle Abänderungen einer Verbindung, worin eine oder mehrere Größen jene Beziehung durchaus ändern, ſind nicht weſentlich verſchiedene Verbindungen, ſondern nur verwandte Fälle einer und derſelben Art von Verbindung. Es genügt, die Rechnung für einen dieſer Fälle zu machen, um die Reſultate auch für die andern zu gebrauchen, wenn die Vertauſchung der Vorzeichen + und − gehörig vorgenommen wird.

Z. B. die Potenzen von $a+b$ und $a-b$ unterſcheiden ſich bloß darin, daß b entgegengeſetzte Werthe hat, daher die ungeraden Potenzen von b in den Formeln für beide entgegengeſetzte Vorzeichen erhalten, (ſ. Buchſtabenrechnung). Es iſt das Product $(a+b)^2(a-b) = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$, und $(a-b)^2(a+b) = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$, beide nur in den Vorzeichen von b und b^3 verſchieden.

Ein Courier A habe die Geſchwindigkeit a, ein anderer B die Geſchwindigkeit b, nach einerley Richtung; der Abſtand der Örter, von welchen ſie ausgehen, ſey c; der erſtere gehe m Stunden früher aus, als B, und x ſey der Weg des A, bis er von B eingeholt wird, ſo iſt $x = \frac{a(c+mb)}{b-a}$, und $x = \frac{a(c-mb)}{b-a}$, wenn A m Stunden ſpäter als B abgeht, wobey $c > mb$ ſeyn muß, wofern die Antwort für die Frage brauchbar ſeyn ſoll. Geht A dem B entgegen, und früher ab, ſo iſt $x = \frac{a(c+mb)}{b+a}$, und, wenn er ſpäter abgeht, $x = \frac{a(c-mb)}{b+a}$. Alle dieſe vier Fälle ſind nur Abänderungen derſelben Aufgabe; man mag jeden derſelben wählen, um die Auflöſungen der andern aus der für den einen Fall gefundenen herzuleiten. Welchen man auch nehme, ſo werden alle Größen bloß in Abſicht auf ihre Quantität betrachtet, und den Umſtänden des Falles nach gehörig mit einander verbunden. Iſt es der erſte, ſo haben die Geſchwindigkeiten b und a in dem Nenner des Werthes von x entgegengeſetzte Vorzeichen, ob ſie gleich nach einerley Richtung genommen werden. Allein hier geſchieht auch keine Entgegenſetzung der verbundenen Größen. Um den vierten Fall aus dem erſten herzuleiten, müſſen m, a, x entgegengeſetzt, in Abſicht auf dieſelben Größen in dem erſten Falle, genommen werden. Das giebt $-x = \frac{-a(c-mb)}{b+a}$ und wenn man unter x und a die Quantität mit Vorausſetzung

der Richtung verſteht, $x = \frac{a(c - mb)}{b + a}$. Der Weg des B iſt in dem erſten Falle $= \frac{b(c + ma)}{b - a}$, in dem vierten $= \frac{b(c + ma)}{b + a}$. Man ſehe die dritte Aufgabe, in dem Artikel, Gleichung I. Die 9te Aufgabe deſſ. Art. zeigt auch, wie der Fall, da das Waſſer durch die eine Röhre aus dem Behälter fließt, aus demjenigen hergeleitet wird, da das Waſſer durch beide hineinfließt, und wie eine negative Antwort für die geſuchte Größe die Vorausſetzung der Frage berichtigt.

In dem Dreyecke ABC (Fig. 16.) ſoll aus AB, AC und dem Winkel A der Winkel B gefunden werden. Man fälle das Perpendikel CD auf AB, ſo iſt, wenn B ſpitz iſt, $\text{tang } B = \frac{AC . \text{ſin } A}{AB - AC . \text{coſ } A}$, und wenn B ſtumpf iſt, $\text{tang } CBD = \frac{AC \ \text{ſin } A}{AC \ \text{coſ } A - AB}$. Weil die Segmente DB in beiden Fällen entgegengeſetzte Lage haben, ſo bekommen die Nenner entgegengeſetzte Zeichen. Dieſe Nenner ſind die Werthe von BD. Gebraucht man für den zweyten Fall die erſte Formel, ſo zeigt die Negation des Nenners, und daher der Tangente, an, daß der innere Winkel, der zu der Tangente gehört, ſtumpf iſt.

In derjenigen Verbindung von Größen, die zum Grunde für alle übrigen verwandten Verbindungen gelegt wird, müſſen alle Größen als poſitiv betrachtet werden, das heißt, ihre Symbole bezeichnen bloß die Quantität, und die Addition und Subtraction wird durch die Vorzeichen + und — angedeutet, ſo daß + eine wirkliche Vergrößerung, und — eine wirkliche Verminderung anzeigt. Es kann hier keine negative Größe durch die Subtraction des Größern von dem kleinern entſtehen, weil der Fall in Abſicht desjenigen, was addirt und ſubtrahirt wird,

und was eine Summe oder Differenz iſt, ganz beſtimmt ſeyn ſoll. Man hat hier bloß additive und ſubtractive Größen, nicht poſitive und negative. Poſitiv heißen ſie in Beziehung auf andere Fälle, nicht in dem vorliegenden Falle für ſich allein genommen.

Diejenigen Größen, welche in einer mit dem zum Grunde der Rechnung gelegten Fälle, dem Normalfalle, verwandten Verbindung ihre Beziehung ändern, ſind negativ, nicht in Rückſicht auf die mit ihnen verbundenen Größen, ſondern in Rückſicht auf die mit ihnen gleichnamigen in jenem erſten Falle.

Eine Änderung der Beziehung einer Größe zieht eine durchgängige Vertauſchung ihrer Vorzeichen in der ganzen Rechnung nach ſich. Wo ſie in dem zum Grunde gelegten Falle addirt ward, wird ſie nun ſubtrahirt, und umgekehrt. Wo ſie Factor war, ändert das Product ſein Vorzeichen, weil der Factor es ändert. Eine ungerade Anzahl negativer Factoren verändert das Vorzeichen des Products, eine gerade Anzahl aber nicht, da je zwey negative oder mit — vergeſellſchäftete Factoren ein Product mit demſelben Vorzeichen geben, was poſitive an ihrer Stelle bekommen. (Buchſtabenrechnung, 14.). Daher behalten die geraden Potenzen einer negativen Größe das Vorzeichen, welches ſie in dem zum Grunde gelegten Falle hatten; die ungeraden aber ändern es. Wird durch die Negation einer Größe ein Dividendus oder ein Diviſor negativ, ſo wird der Quotient es auch; werden beide negativ, ſo bleibt der Quotient poſitiv und behält ſein Vorzeichen; denn das Product des Quotienten in den Diviſor muß daſſelbe Vorzeichen mit dem Dividendus erhalten.

Giebt die Rechnung ein negatives Reſultat, ſo zeigt dieſes an, daß die gefundene Größe in einer entgegengeſetzten Beziehung gegen diejenige zu nehmen iſt, die man ihr beygelegt hatte. Da man nicht immer beſtimmen kann, wie der Fall, den man behandelt, beſchaffen ſey, ſo muß das Reſultat ergeben, nicht allein, wie groß die geſuchte Größe ſey, ſondern auch, in welcher Beziehung man ſie

zu nehmen habe, durch die Beſchaffenheit des Vorzeichens ihres Werthes.

Wenn man nicht vollkommen deutlich einſieht, daß die Übertragung der Rechnung von einem Falle auf einen andern zuläſſig iſt, ſo muß man ſie für dieſen Fall beſonders anſtellen, um die Übertragung zu rechtfertigen, oder ihre Unzuläſſigkeit zu erweiſen. Die Evidenz muß durch die Allgemeinheit der Rechnungen nicht leiden.

Die analytiſche Behandlung der Geometrie hat das eigenthümliche, daß ſie die Rechnung nur für einen gewiſſen Fall einer Verbindung von Linien und Winkeln ausführt, und das Reſultat auf alle andere ähnliche Verbindungen, die nur in der Lage der Linien und Zuſammenſetzung der Winkel unterſchieden ſind, anwendet, indem diejenigen Linien und Winkel, welche eine entgegengeſetzte Lage in Beziehung auf jenen Normalfall erhalten, negativ werden, und deshalb ihre Vorzeichen ändern. Beyſpiele davon kommen in dieſem ganzen Werke vor. Insbeſondere ſehe man die Artikel, Anwendung der Analyſis auf die Geometrie und der Geometrie auf die Algebra. Auch der Artikel, Coordinaten, zeigt, daß man bey der Veränderung derſelben die Werthe der neuen aus den vorigen durch eine einzige Rechnung für alle Fälle beſtimmen könne.

In den trigonometriſchen Formeln werden alle Abänderungen der Verbindung derjenigen Größen, die zu einer Formel gehören, bloß durch die Anwendung des Entgegengeſetzten auf die trigonometriſchen Functionen hergeleitet. In dem Normalfalle werden alle Winkel ſpitz genommen, ſie mögen unter einander eine Lage, welche es ſeyn mag, haben. Dadurch ſind alle trigonometriſche Functionen poſitiv.

Die analytiſche Dioptrik bietet ſehr viele und lehrreiche Beyſpiele der Übertragung der Rechnung von einem Falle auf andere verwandte dar, da hier eine große Menge von Verbindungen gleichnamiger Größen Statt hat. Schon bey einem einzelnen Linſenglaſe ſind manche Abänderungen möglich. Es ſey das Glas auf beiden Seiten convex, der Halbmeſſer der Vorderfläche $= f$, der Hinter-

fläche = g, der Abſtand des leuchtenden Punctes, oder eines Vereinigungspunctes der auffallenden Strahlen vor dem Glaſe = a; der Abſtand des Vereinigungspunctes der gebrochnen Strahlen hinter dem Glaſe = α, das Brechungsverhältniß aus Luft in Glas = n : 1, ſo iſt

$$\alpha = \frac{afg}{(n-1)(f+g)a - fg}.$$

Iſt eine Fläche concav, ſo wird ihr Halbmeſſer negativ, liegt der Vereinigungspunct der gebrochnen Strahlen vor dem Glaſe, ſo iſt α negativ, und ſind die auffallenden Strahlen nach einem Puncte hinter dem Glaſe gerichtet, ſo iſt a negativ. So iſt für ein biconcaves Glas

$$\alpha = \frac{afg}{-(n-1)(f+g)a - fg}.$$

Die Negation des Nenners, da der Zähler poſitiv bleibt, zeigt an, daß der Vereinigungspunct der gebrochnen Strahlen vor dem Glaſe liegt. Iſt das Glas ein Meniskus mit der convexen Fläche gegen die auffallenden Strahlen, ſo iſt g negativ, und größer als f, folglich

$$\alpha = \frac{-afg}{(n-1)(f-g)a+fg} = \frac{afg}{(n-1)(g-f)a-fg}.$$

Wenn die auffallenden Strahlen nach einem Puncte hinter demſelben Glaſe fahren, ſo iſt, da a negativ iſt,

$$\alpha = \frac{afg}{-(n-1)(f-g)a+fg} = \frac{afg}{(n-1)(g-f)a+fg}.$$

Man ſehe meine analytiſche Dioptrik, im zweyten Theile, wo die Anwendungen der allgemeinen Formeln auf beſondere Fälle gemacht werden.

In allen allgemeinen Formeln werden die Coefficienten der unbekannten oder veränderlichen Größen als poſitiv betrachtet, was ſie auch für ein Vorzeichen haben. Ihre Symbole, ohne die Vorzeichen, bedeuten ſchlechthin die Quantität, ohne weitere Relation. Wird nun mit der Normalformel irgend eine andere unter ihr begriffene

verglichen, ſo ſind diejenigen Coefficienten negativ, die ein anderes Vorzeichen als in jener Formel haben.

Die negativen Wurzeln einer Gleichung werden in dem Art. Gleichung erklärt, wo ihre Verhältniſſe gegen die poſitiven Wurzeln in allen Fällen der Gleichungen vom zweyten, dritten und vierten Grade gezeigt werden. Die negativen Wurzeln einer Gleichung ſind die poſitiven einer andern Gleichung, welche zur vollſtändigen Beantwortung der Aufgabe nöthig wäre, wenn man das Negative umgehen, und alle Größen bloß nach ihrer Quantität betrachten wollte. Durch die Veränderung der Vorzeichen in den ungeraden Potenzen wird die gegebene Gleichung in jene andere verwandelt. Der Gebrauch der negativen Wurzeln vereinigt beide Gleichungen in eine einzige.

Negative Wurzeln können auch poſitive Werthe für einen andern Fall der Aufgabe enthalten. Z. B. Es ſey I. $x^2 - y^2 = xy$, und II. $x + y = xy$. Wenn I. durch II. dividirt wird, ſo wird erhalten, $x - y = 1$. Dieſes giebt die Gleichungen,

$$x^2 - 3x + 1 = 0, \text{ und } y^2 - y - 1 = 0.$$

Die Wurzeln der erſtern ſind $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ und $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$; der zweyten, $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ und $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$. Der erſtere Werth von x und von y thun der Frage auf die beſtimmte Art, wie ſie abgefaßt iſt, Genüge. Der zweyte Werth von y iſt negativ. Dieſer giebt mit $x = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ die Antwort auf eine verwandte Frage, wenn $y - x = xy$ ſeyn ſoll. Es ſeyn nämlich die beiden Bedingungen: I. $y^2 - x^2 = xy$; II. $y - x = xy$, ſo ſind die Gleichungen, I. $x^2 - 3x + 1 = 0$; II. $y^2 + y - 1 = 0$.

Die Wurzeln der zweyten ſind den Werthen von y in der obigen Gleichung entgegengeſetzt, ſo daß die dort für den beſtimmten, wörtlichen Sinn der Frage unbrauchbare negative Wurzel y hier poſitiv nach dem Sinn der veränderten Frage iſt. Die beiden andern Combinationen der Wurzeln beider Gleichungen erfüllen die Forderung nicht.

Ein anderes ſehr erläuterndes Beyſpiel wird in dem Artikel, Anwendung der Analyſis auf die Geometrie. 12. Aufg. angetroffen.

Seit Descartes bis zu Wolfs Zeiten nannten manche die negativen Wurzeln falſche Wurzeln, weil ſie ſie entweder für ganz unbrauchbar (in dem wörtlichen eingeſchränkten Sinne der Frage) hielten, oder auch, wiewohl auf eine zweydeutige und mißverſtändliche Art, durch den Ausdruck, wahre Wurzeln, diejenigen der geſuchten Größen bezeichneten, welche der Aufgabe nach den Vorausſetzungen derſelben Genüge thun, durch falſche aber diejenigen, welche in einem andern Sinne es leiſten. Die Anwendung auf die Geometrie zeigte ihnen, daß die falſchen Wurzeln ſo gut zur vollſtändigen Auflöſung gehören als die wahren.

Man gebraucht für negative Größen bisweilen den paradoxen Ausdruck, weniger oder kleiner als Nichts. In der zweyten vorher erklärten Bedeutung negativer Größen läßt ſich dieſer Ausdruck nicht anwenden: allein bey den Gliedern einer Reihe, die durch fortgeſetzte Verminderung Null, und dann negativ werden, hat er einen guten Sinn. So wie man ganz richtig ſagt, $a-b$ iſt kleiner als a, wenn $b<a$ iſt, ſo ſagt man auch analogiſch richtig, $a-(a+b)$ oder $-b$, iſt kleiner als a, wenn auch der Unterſchied $-b$ abſolut genommen größer iſt als a. So iſt auch beziehungsweiſe $-(a+b)$ kleiner als $-a$. Dieſer Sprachgebrauch verhilft zu allgemein ausgedruckten Sätzen, und erſpart die Aufzählung aller einzelnen Fälle. Die Hinzuſetzung von $+a$ giebt Größeres, die Hinzuſetzung von $-a$ oder Abziehung von $+a$ giebt Kleineres, wenn gleich der Quantität nach das umgekehrte erfolgt, nämlich in dem Falle, wenn die Hinzuſetzung zu einer negativen Größe geſchieht.

Die Veränderung einer Größe wird alſo bloß nach der Beſchaffenheit der Veränderung benahmt. Sie iſt eine Zunahme, wenn die Veränderung das Vorzeichen $+$ hat oder poſitiv iſt; ſie iſt eine Verminderung, wenn dieſe das Vorzeichen $-$ hat oder negativ iſt. Hat man eine Folge von Größen, nach irgend einer analytiſchen Form der Zuſammenſetzung, ſo werden dieſe als wachſend betrachtet, wenn zu einer vorangehenden y eine Größe $+\Delta y$ ge-

ſetzt wird, um die nächſtfolgende y' zu erhalten; als abnehmend, wenn zu y die Größe — Δy geſetzt wird, um y' zu bekommen; obgleich, wenn y negativ iſt, die Größen in jenem Falle abnehmen, in dieſem aber zunehmen.

In der Differentialrechnung zeigt ein poſitiver Quotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ an, daß beide Größen x und y mit einander der Quantität nach wachſen oder abnehmen, wenn beide gleichnamige (beide poſitiv oder beide negativ) ſind. Ein negativer Quotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ zeigt an, daß die eine der x und y der Quantität nach abnimmt, wenn die andere zunimmt, in dem Falle, da beide gleichnamig ſind. Sind ſie aber ungleichnamig, ſo zeigt der negative Quotient an, daß ſie zugleich wachſen und abnehmen, z. B. Kreisbogen und Coſinus.

Principles of Algebra, by W. Frend. London 1796. Der Verfaſſer ſucht das Studium der Algebra durch die Ausſchließung der negativen Größen zu erleichtern. Francis Maſeres hat dazu einen Anhang geliefert, der ſtärker iſt als die Schrift ſelbſt, 1798. Er ſtimmt mit Frend überein.

Neue Erörterungen über Plus und Minus ꝛc. von F. G. Buſſe. Erſte Abtheilung. Cöthen 1801. in 8. Der Verf. will die Beziehungen der zu einer Verbindung gehörigen Größen durch die Vorzeichen + und — mit bezeichnen. Die Schrift iſt zum Theil gegen meine Abhandlung über die Lehre von den entgegengeſetzten Größen, in dem Hindenburgiſchen Archiv der Mathematik, Heft III. IV. gerichtet. Das daſelbſt und hier erklärte Verfahren bey der Anwendung entgegengeſetzter Größen iſt bisher in der That von den vorzüglichſten Mathematikern faſt immer befolgt, nur iſt nirgends die Theorie deſſelben gehörig auseinander geſetzt, und von ungleichartigen Beymiſchungen rein dargeſtellt worden.

Epicykloide iſt die krumme Linie, welche ein in der Ebene eines Kreiſes befindlicher Punct beſchreibt, indem dieſer Kreis auf dem Umfange eines andern, in derſelben Ebene mit ihm liegenden, Kreiſes ſich um ſeinen Mittelpunct wälzt, ſo daß die Bogen, die auf beiden Kreiſen zwiſchen zuſammengehörigen Berührungspuncten liegen, gleich groß ſind. Oder die Bewegung um den Mittelpunct des ſich wälzenden Kreiſes iſt ſo groß als die fortrückende Bewegung auf dem andern, dem ruhenden. Die Wälzung kann auf der convexen (äußern), oder auf der concaven (innern) Seite des unbewegten Kreiſes geſchehen. In dem letztern Falle heißt die Curve eine Hypocykloide, wiewohl man auch häufig dieſe eine Epicykloide nennt. Alsdann unterſcheidet man beide Gattungen durch die Beywörter äußere (oder obere) und innere (oder untere). Der unbewegte Kreis heißt die Grundlinie oder die Baſis, der ſich wälzende heißt der erzeugende oder beſchreibende Kreis. Liegt der beſchreibende Punct auf dem Umfange des bewegten Kreiſes, ſo iſt die Curve eine Epicykloide im engern Verſtande; liegt derſelbe außerhalb des Kreiſes, ſo iſt ſie eine verkürzte, (curtata), liegt er innerhalb, ſo iſt dieſelbe eine geſtreckte (elongata). Der beſchreibende Punct bewegt ſich in allen drey Fällen um einen gewiſſen Punct, der wiederum ſich um den Mittelpunct der Baſis bewegt, allein nur in dem erſtern Falle iſt ſeine Kreisbewegung gleich der fortrückenden Bewegung des Kreiſes auf dem Grundkreiſe; in dem zweyten iſt jene größer, in dem dritten kleiner als dieſe. Es verhält ſich hier wie bey der Cykloide, Th. I. S. 599. Wir wollen hier nur die eigentliche Epicykloide betrachten. Zuerſt ein Satz aus der geometriſchen Lehre von der zuſammengeſetzten Bewegung.

1. Es werde die gerade AB Tab. IX. (Fig. 17.) von einem Puncte gleichförmig beſchrieben. Über derſelben als Diagonale verzeichne man das Parallelogramm ACBD, ſo ſind AC, AD die relativen Wege nach den Richtungen AC, AD, in welche der abſolute Weg AB

zerlegt wird, oder, wenn AB die Geſchwindigkeit nach der Richtung AB darſtellt, ſo iſt AC die relative Geſchwindigkeit nach der Richtung AC, und AD die relative nach AD. Aus den relativen Geſchwindigkeiten wird umgekehrt die abſolute zuſammengeſetzt.

Iſt Aa der krummlinichte Weg eines Körpers mit der Richtung und Geſchwindigkeit AB in A, ſo ſind AC, AD die relativen Geſchwindigkeiten nach denſelben Richtungen, in welche die nach AB zerlegt wird, ſo wie umgekehrt dieſe aus jenen zuſammengeſetzt wird.

2. Es ſey AB (Fig. 18.) der Halbmeſſer des unbewegten Kreiſes, CB des bewegten, B der beſchreibende Punct. Durch die Wälzung auf jenem komme der Punct d auf D, ſo daß der Bogen BD = Bd ſey. Man ziehe AD, und nehme auf der Verlängerung derſelben DE = CB, beſchreibe aus E einen Kreis, nehme darauf den Bogen DF = BD, ſo iſt F ein Punct der Epicykloide.

Den Bogen DF dem BD gleich zu machen, bemerke man, daß bey gleich großen Kreisbogen die Winkel ſich umgekehrt wie die Halbmeſſer verhalten. Alſo iſt ED : AB = BAD : DEF. In der Figur iſt AB : DE = 20 : 9, und BFP die Hälfte der Epicykloide, die nach einer Umwälzung des erzeugenden Kreiſes die Baſis trifft, und nach zwanzig Umwälzungen wieder bey dem Puncte B anfängt.

3. Die Halbmeſſer der Baſis und des erzeugenden Kreiſes verhalten ſich wie m : n; der Umfang des erſtern Kreiſes ſey = P, des andern = p, ſo iſt m : n = P : p. und nP = mp. Sind m und n ganze Zahlen, ſo trifft nach m Umläufen der beſchreibende Punct wieder in denjenigen Punct der Baſis ein, von welchem er ausgieng. In dieſem Falle iſt die Epicykloide eine algebraiſche Linie, für welche eine algebraiſche Gleichung zwiſchen den Coordinaten Statt hat. Iſt das Verhältniß m : n irrational, ſo beſteht auch die Gleichung aus unendlich vielen Gliedern, indem der beſchreibende Punct nie wieder in den Anfangspunct trifft, und daher die Curve unendlich viele Umgänge um die Baſis macht, ſo daß eine gerade Linie ſie in unendlich vielen Puncten treffen kann.

4. Man ziehe die Chorde FD, und nach dem Endpuncte G des Durchmeſſers DG die Chorde FG: es iſt dieſe die berührende an der Epicykloide in F.

Bew. Der Punct F hat zwey relative Bewegungen, eine nach der Richtung FH ſenkrecht auf AF, die andere nach FI ſenkrecht auf EF. Denn ſo wie der Mittelpunct E ſeine Bewegung nach der auf AE in E ſenkrechten Richtung hat, ſo hat jeder Punct der Ebene des Kreiſes ebenfalls eine ſolche, ſenkrecht auf die den Punct mit A verbindende gerade Linie. Außerdem hat aber wegen der Wälzung auf der Baſis, oder der Drehung um E, jeder Punct eine Bewegung ſenkrecht auf die von ihm nach E gezogene Linie. Die Geſchwindigkeit des Punctes F nach der Richtung FI iſt gleich der Geſchwindigkeit des Punctes D, und die nach FH verhält ſich zu der des Punctes D wie die von F und D beſchriebenen Kreisbogen, das iſt, wie AF : AD, alſo iſt FH : FI = AF : AD. Man vollende das Pgrm HFIK, ſo iſt FK die abſolute Richtung des Punctes F, oder die berührende in F.

Man ſetze AB = a, CB = b, AF = z.

In dem Dreyeck AEF, deſſen Winkel hier alle ſpitz ſind, iſt W. AFE = W. HFI des Pgrms FK, und, wenn AF nach f hin verlängert wird, der äußere W. EFf = W. FHK des Pgrms. Denn es iſt AFE + EFH = HFI + EFH, wegen der rechten Winkel AFH, EFI.

Da in dem Dreyeck AEF iſt $\sin AFE = \frac{AE}{AF} \sin E$,

ſo iſt $\sin HFI$ oder $\sin FHK = \frac{a+b}{z} \sin E$.

Zweytens, in demſelben Dreyeck iſt $\tang AFE$

$= \frac{AE \,.\, \sin E}{EF - AE \,.\, \cos E}$, oder $\cot AFE = \frac{EF}{AE \,.\, \sin E} - \cot E$

$= \frac{b}{(a+b)\sin E} - \cot E$. Da W. FHK = EFf =

2R — AFE, ſo iſt cot FHK = — cot AFE = $\cot E - \frac{b}{(a+b)\sin E}$.

Drittens, in dem Dreyeck FHK iſt cot FKH $= \frac{KH}{FH \cdot \sin FHK} - \cot FHK$, oder, weil FH:KH $= z:a$ iſt, cot FKH $= \frac{a}{z \sin FHK} - \cot FHK$. Mittelſt der vorher gefundenen Werthe des Sinus und der Cotangente von FHK iſt

$$\cot FKH = \frac{a}{(a+b)\sin E} + \frac{b}{(a+b)\sin E} - \cot E.$$

$$= \frac{1}{\sin E} - \cot E = \frac{1-\cos E}{\sin E} = \frac{2\sin \tfrac{1}{2}E^2}{2\sin\tfrac{1}{2}E \cdot \cos\tfrac{1}{2}E}$$

= tang ½ E; folglich FKH = 90° − ½ E. Da IF mit KH parallel iſt, ſo iſt W. IFK = FKH, und IFK = 90° − ½ E. Wegen des rechten Winkels IFE iſt EFK = ½ E. Man ziehe nach dem Endpuncte G des Durchmeſſers DG die FG, ſo iſt W. EFG = ½ E, alſo fällt FK in FG, oder die in F berührende geht durch G.

Daß die in F berührende durch G gehen müßte, konnte man daher ſchon abnehmen, weil die Ebene des Kreiſes ſich in jedem Moment der Fortwälzung um den Berührungspunct D dreht, daher DF auf die berührende ſenkrecht iſt, alſo dieſe ſelbſt durch G geht.

5. In dem Dreyeck FAG iſt I. $\sin G^2 = \frac{zz - aa}{4b(a+b)}$; II. $\cos G^2 = \frac{(a+2b)^2 - zz}{4b(a+b)}$; III. $\tan G^2 = \frac{zz-aa}{(a+2b)^2 - zz}$

Bew. In dem Dreyeck FAE iſt $(a+b)^2 + b^2 - 2b(a+b)\cos E = z^2$, alſo

$\operatorname{cos} E = \frac{aa + 2ab + 2bb - zz}{2b(a+b)}$. Daraus iſt $1 - \operatorname{cos} E$ $= \frac{zz - aa}{2b(a+b)}$; $1 + \operatorname{cos} E = \frac{(a+2b)^2 - z^2}{2b(a+b)}$. Nun iſt $1 - \operatorname{cos} E = 2 \sin \tfrac{1}{2} E^2 = 2 \sin G^2$, und $1 + \operatorname{cos} E$ $= 2 \operatorname{cos} \tfrac{1}{2} E^2 = 2 \operatorname{cos} G^2$. So ſind die beiden erſten Formeln dargethan. Aus dieſen folgt unmittelbar die dritte.

6. Man verlängere die berührende AG auf der andern Seite nach Fg, es iſt I. $\sin AFg = \frac{(a+2b)}{z} \sin G$; II. $\operatorname{cos} AFg = \frac{a}{z} \operatorname{cos} G$; III. $\operatorname{tang} AFg = \frac{a+2b}{a} \operatorname{tang} G$.

Die erſte Formel iſt die bekannte trigonometriſche Grundformel für das Dreyeck FAG; die zweyte iſt eben dieſelbe für das Dreyeck FAD, worin aber $\sin ADF$ $= \operatorname{cos} G$, und $\sin AFD = \operatorname{cos} AFg$ iſt, weil DF auf FG in F ſenkrecht ſteht. Die dritte Formel iſt eine unmittelbare Folge aus den beiden erſten.

7. Der Winkel BAF des veränderlichen Radius der Curve mit AB ſey $= \omega$, es iſt

$$\partial\omega = \frac{a+2b}{a} \cdot \frac{\partial z}{z} \sqrt{\frac{zz - aa}{(a+2b)^2 - zz}}.$$

Bew. Es iſt $\operatorname{tang} AFg = \frac{z\partial\omega}{\partial z}$ (berühr. Linie, 27.). Hier ſetze man für tang AFg ſeinen Werth aus (6 und 5.), und multiplicire auf beiden Seiten mit $\frac{\partial z}{z}$, ſo entſteht die aufgeſtellte Formel.

8. Der Bogen BF ſey $= s$, und $a + 2b = c$:
es iſt $s = \frac{cc - aa}{a} - \frac{\sqrt{(cc - aa)(cc - zz)}}{a}$,

oder $s = \frac{2(a + b)}{a}(2b - FG)$.

Bew. Es iſt nämlich $\partial s = \sqrt{(z^2 \partial \omega^2 + \partial z^2)}$, ſ. Rectification. Nun iſt $z\partial\omega = \frac{c}{a} \partial z \sqrt{\frac{zz - aa}{cc - zz}}$, alſo

$\partial s^2 = \frac{(cc - aa) zz}{aa (cc - zz)} \partial z^2$, und $\partial s = \frac{z\sqrt{(cc - aa)}}{a\sqrt{(cc - zz)}} \partial z$.

Folglich

$$s = \text{Const} - \frac{\sqrt{(cc - aa)(cc - zz)}}{a},$$

(Integralrechn. 40.). In B, wo $z = a$ iſt, iſt $s = 0$, alſo Const $= \frac{cc - aa}{a}$. So wird die erſte Formel des Satzes erhalten.

Ferner iſt die berührende Chorde $FG = 2b \cos G$ $= 2b \sqrt{\frac{cc - zz}{4b(a + b)}}$, (5.).

Da $4b(a + b) = cc - aa$ iſt, ſo iſt $2(a + b) \times FG$ $= \sqrt{(cc - aa)(cc - zz)}$. Durch die Subſtitutionen aus dieſen beiden Gleichungen wird die zweyte Formel erhalten.

9. Nimmt man $z = a + 2b = c$, ſo iſt . . . $s = \frac{cc - aa}{a} = \frac{4b(a + b)}{a}$. Für dieſen Werth von z iſt $\omega = \frac{b}{a}\pi$, wo π der halbe Kreisumfang mit dem Halbmeſſer als Einheit iſt. Es ſey $BAP = \frac{b}{a}\pi$, und

$AP = a + 2b$, ſo iſt der Bogen $BP = \frac{4b(a+b)}{a}$, alſo der Bogen $PF = \frac{\sqrt{(cc-aa)(cc-zz)}}{a}$, oder $PF = \frac{2(a+b)}{a} \times FG$.

10. Die Area BAF zwiſchen den beiden Winkel-Ordinaten AB, AF und dem Bogen der Epicykloide BF iſt =

$$\frac{c}{4a}(cc-aa) \text{ Ang cos} \sqrt{\frac{cc-zz}{cc-aa}}$$

$$- \frac{c}{4a}\sqrt{(cc-zz)(zz-aa)}.$$

$$\text{oder} = \frac{(a+2b)(a+b)}{ab} \times \text{Segm. circ. DF.}$$

Bew. Die Area ſey Z, ſo iſt $\partial Z = \frac{1}{2} zz\partial\omega$ (ſ. Quadratur) alſo $\partial Z = \frac{c}{2a} z\partial z \sqrt{\frac{zz-aa}{cc-zz}}$, wenn $a + 2b = c$ geſetzt wird. Man ſetze $cc - zz = uu$, ſo iſt $z\partial z = - u\partial u$, und

$$\partial Z = - \frac{c}{2a}\partial u \sqrt{(cc-aa-uu)}.$$

Die Integration giebt (Integralr. 36. u. 28.)

$$Z = \text{Conſt} - \frac{c}{4a} u\sqrt{(cc-aa-uu)}$$

$$- \frac{c}{4a}(cc-aa)\int \frac{\partial u}{\sqrt{(cc-aa-uu)}}.$$

$$= \text{Conſt} - \frac{c}{4a} u\sqrt{(cc-aa-uu)}$$

$$- \frac{c}{4a}(cc-aa) \text{ Ang ſin } \frac{u}{\sqrt{(cc-aa)}}.$$

$$= \text{Conſt} - \frac{c}{4a}\sqrt{(cc-zz)(zz-aa)}$$

$$- \frac{c}{4a}(cc-aa)\ \text{Ang. ſin} \sqrt{\frac{cc-zz}{cc-aa}}.$$

Für $z = a$ iſt $Z = 0$, und der Winkel in dem letzten Terminus $= 90$ Grad oder $\frac{1}{2}\pi$, alſo Conſt $= + \frac{c}{4a}(cc-aa) \times \frac{1}{2}\pi$. Demnach

$$Z = \frac{c}{4a}(cc-aa)\left(\frac{1}{2}\pi - \text{Ang ſin} \sqrt{\frac{cc-zz}{cc-aa}}\right)$$

$$- \frac{c}{4a}\sqrt{(cc-zz)(zz-aa)}.$$

Der Winkel in dem erſten Terminus iſt das Complement des Winkels, deſſen Sinus $= \sqrt{\frac{cc-zz}{cc-aa}}$ iſt, alſo iſt es der Winkel, deſſen Coſinus eben dieſen Werth hat. So iſt die erſte Formel des Satzes erwieſen.

Weiter iſt der Winkel zu Coſinus $\sqrt{\frac{cc-zz}{cc-aa}}$ der W. AGF, (5.) und $\sqrt{(cc-zz)(zz-aa)} = 4b(a+b)$ ſin AGF coſ AGF $= (cc-aa)$ ſin AGF. coſ AGF, alſo

$$Z = \frac{c}{4a}(cc-aa)(\text{Ang AGF} - \text{ſin AGF. coſ AGF}).$$

Der Kreisbogen DF iſt $=$ b. Ang DEF, oder 2b. Ang AGF, und Sector DEF $=$ bb. Ang AGF. Auch iſt $\triangle$DEF $= \frac{1}{2}\triangle$DFG $= \frac{1}{4}$ DF $\times$ GF $=$ bb ſin G. coſ G.

Setzt man nun für $\frac{c}{4a}(cc-aa)$ ſeinen Werth $\frac{a+2b}{a} \times b(a+b)$, ſo wird

$$Z = \frac{(a+2b)(a+b)}{ab} (\text{Sect. DEF} - \Delta\text{DEF})$$

$$= \frac{(a+2b)(a+b)}{ab} \times \text{Segm. DF.}$$

11. Wenn der erzeugende Kreis eine halbe Umwälzung vollendet hat, ſo daß der beſchreibende Punct mit dem Berührungspuncte Q und dem Mittelpuncte des ruhenden Kreiſes in gerader Linie liegt, nämlich in P, ſo iſt der Flächenraum zwiſchen AB, AP und dem Bogen BFP =
$\frac{(a+2b)(a+b)}{ab} \times$ area ſemicirc. PRQ, oder
$\frac{(a+2b)(a+b)}{ab} . \frac{1}{2} bb\pi.$

12. Der Winkel BAQ iſt $= \frac{b}{a}\pi$, der Bogen BQ = $b\pi$, der Sector BAQ $= \frac{1}{2} ab\pi$. Zieht man dieſen von der ganzen Area BAPB ab, ſo bleibt die Area BQPB
$= \frac{3a+2b}{a} . \frac{1}{2} bb\pi = \frac{3a+2b}{a} \times$ area ſemic. PRQ.

13. Die Area BDF zwiſchen dem Kreisbogen BD, dem Bogen BF und der Chorde DF iſt $= \frac{3a+2b}{a} \times$ ſegm. DF.

Bew. Denn es iſt Sect. BAD $= \frac{a}{b}$ Sect. DEF, und Δ AF $= \frac{a}{b} \Delta$DEF. Nun iſt in dem Beweiſe der zweyten Formel (10.) gefunden

Area BAF $= \frac{(a+2b)(a+b)}{ab}$ (Sect. DEF — ΔDEF).

Addirt man dazu das Dreyeck DAF, und ſubtrahirt den Sector BAD, ſo bleibt die Area BDF, und es iſt alſo

$$\text{Area BDF} = \frac{3a+2b}{a}\,(\text{Sect. DEF} - \Delta\text{DEF})$$

$$= \frac{3a+2b}{a}\ \text{Segm. DF.}$$

14. Die Area DQPF iſt $= \frac{3a+2b}{a}$ Segm. FDG.

Dieſe Formel giebt Joh. Bernoulli in der Lect. Hoſpit. XXII. Die Area DQPF und die BDF ſind nämlich zuſammen $= \frac{3a+2b}{a} \times$ area ſemicirc. FDG.

15. Der Halbmeſſer der Krümmung OF in F iſt $= \frac{2(a+b)}{a+2b} \times \text{DF}$.

Bew. Das Perpendikel auf die berührende in F aus dem Mittelpuncte A des ruhenden Kreiſes ſey AT $= t$, der Halbmeſſer der Krümmung in dem Puncte F ſey $= r$, ſo iſt $r = \frac{z\partial z}{dt}$ (ſ. Krümmungskreis). Nun iſt AT $=$ AG $\times$ ſin AGT $= (a+2b)$ ſin G $= (a+2b)$ $\sqrt{\frac{zz-aa}{4b(a+b)}}$ (6. I.). Man ſetze $\frac{\sqrt{4b(a+b)}}{a+2b} = p$, ſo iſt $t = \frac{\sqrt{(zz-aa)}}{p}$, und $\partial t = \frac{z\partial z}{p\sqrt{(zz-aa)}}$; alſo $\frac{z\partial z}{\partial t} = p\sqrt{(zz-aa)} = p$ ſin G. $\sqrt{4b(a+b)}$ $= \frac{4b(a+b)}{a+2b}$ ſin G $= \frac{2\sqrt{(a+b)}}{a+2b} \times \text{FD}$, weil FD $=$ $= 2b$ ſin G iſt.

16. Die krumme Linie, auf welcher die Mittelpuncte der Krümmungskreiſe, wie O, liegen, iſt eine der BFP ähnliche Epicykloide, ſ. Evolute.

17. So wie DEF der Wälzungswinkel iſt, wenn der Kreis von B nach D hin gerückt iſt, ſo iſt GEF der Wälzungswinkel, wenn der Kreis von Q nach D bewegt iſt. Es iſt nämlich bey der Berührung in Q der beſchreibende Punct in P, auf der geraden AQP. Die Gleichung zwiſchen AF und einer trigonometriſchen Function des Wälzungswinkels iſt daher eine gedoppelte. In dem erſtern Falle iſt,

$$zz = aa + 4b(a+b)(\sin \tfrac{1}{2} DEF)^2,$$

wo z = AF iſt. In dem andern Falle iſt, wenn AP oder a + 2b = c geſetzt wird,

$$zz = cc - 4b(c-b)(\sin \tfrac{1}{2} GEF)^2.$$

Die erſte Formel folgt aus (5. I.), die zweyte aus derſelben, wenn für a geſetzt wird c − 2b, und $1 - (\sin \frac{1}{2} DEF)^2$ mit $(\cos \frac{1}{2} DEF)^2$, das iſt mit $(\sin \frac{1}{2} GEF)^2$ vertauſcht wird.

In der zweyten Formel iſt b dem in der erſten Formel entgegengeſetzt.

18. Die hier betrachtete Epicykloide, ſo ſehr ſie bloß etwas Beſchauliches ſcheint, hat doch ihren praktiſchen Nutzen. Die Zähne der Kämme der Räder in Maſchinen, und die Hebedaumen, welche Hebel bewegen, müſſen nach einer Epicykloide geformt ſeyn, wenn die Maſchine einen gleichförmigen Gang haben ſoll. Es ſey AB der Halbmeſſer des Rades bis an den Punkt, wo der Zahn oder Kamm zuerſt von dem Triebſtecken berührt wird; ED der Halbmeſſer des Getriebes bis an die Axe der Triebſtecken, die hier als eine Linie ohne Dicke betrachtet werden. Das Getriebe dreht ſich wie der erzeugende Kreis für eine Epicykloide um den Mittelpunct, aber wälzt ſich nicht, dagegen ſchiebt ſich der Umfang des Rades unter demſelben weg. Es iſt einerley, ob der Kreis DiG ſich auf BD wälzt, und dadurch C nach E rückt, oder ob der Bogen BD ſich unter BC wegſchiebt. Stellt man ſich die Epicykloide auf der Ebene des Kreiſes um A gezeichnet vor, ſo bleibt bey der Wälzung der beſchreibende Punct immer auf jener krummen Linie. Iſt auf dem Rade der Kamm nach der Epicykloide BF geformt, und verhalten ſich die Winkel, welche B und F beſchreiben, umgekehrt wie AB und EF, ſo ſchiebt der Kamm den Trieb-

ſtecken ungezwungen fort, ohne Klemmung und Schlottern. Auch bleibt das Verhältniß der gegenwirkenden Kräfte immer daſſelbe, wie in der dritten Abtheilung, Artikel, Rad und Getriebe, gezeigt werden wird.

Iſt AB der Halbmeſſer einer Daumenwelle, BF der epicykloidiſch geformte Hebedaumen, GFg ein Hebel, der um den Ruhepunct G gedreht wird, und verhalten ſich die von AB und GFg zugleich beſchriebenen Winkel wie GD : AB, ſo wirkt der Hebedaumen ungezwungen auf den Hebel, indem er ſich daran hinſchiebt, und von GFg berührt wird, ohne Verluſt an Kraft und ohne Ungleichheit in dem Verhältniſſe der entgegen wirkenden Kräfte. S. Hebedaumen in der dritten Abtheilung.

19. Dieſe nützliche Anwendung iſt die Veranlaſſung zu der Conſtruction der Epicykloiden geweſen. Römer, ein Däniſcher Aſtronom, gerieth auf dieſe Curve, als er die ſchicklichſte Geſtalt der Zähne oder Kämme eines Rades ſuchte, um das J. 1674. Dies bezeugt Leibnitz in einem Briefe an Joh. Bernoulli (Commerc. epiſt. I. 347.). Er hat es von Römer ſelbſt, wie er mit ihm zugleich in Paris war, und von Huygens vernommen. De la Hire hat eine ausführliche, aber ſehr verwickelt abgefaßte Abhandlung über die Epicykloiden und ihre Anwendung in der Mechanik, geſchrieben, die in einer kleinen beſondern Sammlung: Mémoires de Mathématiques et de Phyſique, à Paris 1694, befindlich iſt. Er erwähnt nichts von Römer, und ſcheint ſich dieſe geometriſche und mechaniſche Entdeckung zuzueignen.

20. Die äußere Epicykloide, die von einem auf dem Umfange eines ſich wälzenden Kreiſes befindlichen Puncte beſchrieben wird, iſt die Brennlinie für zurückgeworfene Strahlen an einem Kreiſe. Der Halbmeſſer der Baſis iſt halb ſo groß als der von dem zurückwerfenden Kreiſe, und doppelt ſo groß als der von dem erzeugenden Kreiſe, wie es de la Hire in einer Abhandlung über die Brennlinien, in der gedachten Sammlung zuerſt gezeigt hat. Auch iſt die Brennlinie eine Epicykloide, wenn die Strah-

len von dem Endpuncte eines Durchmeſſers auffallen. S. Brennlinie und Cauſtica.

21. Wenn die Baſis der Epicykloide einen unendlichen großen Halbmeſſer hat, ſo verwandelt ſie ſich in eine gerade Linie, und der erzeugende Kreis giebt eine Cykloide.

Iſt aber der Halbmeſſer des erzeugenden Kreiſes unendlich groß, ſo entſteht durch Abwicklung des Umfanges der Baſis eine Linie, welche man die Evolvirende nennen kann. Die Baſis iſt ihre Evolute. Anſtatt des Bogens FD iſt eine gerade Linie, die dem Bogen BD gleich iſt, von dem Anfange der Abwicklung an bis an den Berührungspunct, ſ. Evolute.

22. Das ganze Verfahren für die äußere Epicykloide kann man auf die innere anwenden. In der Rechnung wird b durchgehends negativ. Denn in dem Dreyeck AEF wird für dieſe die Seite AE = a — b ſtatt a + b an der äußern. Es iſt zur deutlichern Einſicht rathſam, die Zeichnung und Rechnung für dieſen Fall beſonders zu machen.

Auch ſieht man aus dem für die eigentliche Epicykloide angewandten Verfahren, wie die Unterſuchung für geſtreckte und verkürzte Epicykloiden anzuſtellen ſeyn würde.

Halley hat in den Philoſ. Tranſ. nr. 218. für den Flächenraum aller Arten von Cykloiden und Epicykloiden verglichen mit dem Flächenraum der zugehörigen Kreisſegmente folgenden Satz bewieſen: Die Area dieſer Curven verhält ſich zu der Area des erzeugenden Kreiſes, wie die Summe der doppelten Geſchwindigkeit des Mittelpunctes und der Geſchwindigkeit der drehenden Bewegung zu der Geſchwindigkeit dieſer letztern, und eben ſo überhaupt die zuſammengehörigen Flächenräume an der Curve und dem Kreiſe. Die Räume werden von dem Scheitel an gerechnet, und von dem Bogen der Baſis, der Curve und dem Durchmeſſer PQ begränzt, ſ. 14.

23. Man kann jede Figur über einer andern Figur in derſelben Ebene auf die Art, wie einen Kreis über einem andern, ſich wälzen, und einen Punct in der Ebene der

erſtern eine Linie beſchreiben laſſen. De la Hire hat in den Memoiren der Pariſer Akademie vom J. 1706. den Abriß zu dem Verfahren gegeben, der aber unzureichend iſt, obgleich Montucla den Aufſatz als ausführlich und nett geſchrieben empfiehlt. Hingegen hat in derſelben Sammlung vom J. 1707. Nicole Formeln angegeben, durch welche die Gleichung für die auf gedachte Art erzeugte krumme Linie gefunden wird. Es iſt ein Eliminations-Proceß zwiſchen drey Paaren veränderlicher Größen, nämlich den rechtwinklichten Coordinaten der drey Curven. So wie Nicole die Methode vorträgt, ſcheint die bewegte Curve mit dem Wälzen zugleich rutſchen zu können. Er bemerkt nicht, daß die Elemente der beiden Curven, der bewegten und der unbeweglichen, gleich groß ſind, aber doch in der Formel, als wenn ſie verſchieden wären, beybehalten werden müſſen, weil Differentiale an zwey verſchiedenen Curven nicht mit einander verglichen werden können.

24. Wenn eine Parabel auf einer ihr gleichen ſich wälzt, und zuerſt die Scheitelpuncte zuſammenfallen, ſo beſchreibt der Scheitelpunct jener eine Ciſſoide. Nicole a. a. O. S. 124. der holl. Ausg.

25. Der Brennpunct der beweglichen Parabel beſchreibt, bey dieſer Vorausſetzung, eine gerade Linie, die ſenkrecht auf die Axe der Parabel durch den Punct geht, der auſſerhalb ſo weit von dem Scheitel abſteht, als der Brennpunct von demſelben.

26. Wenn eine Ellipſe auf einer ihr gleichen ſich wälzt, und die Scheitelpuncte beider zuerſt in eins fallen, ſo beſchreiben die Brennpuncte jener Kreiſe, deren Mittelpunct der andere Brennpunct iſt, und der Durchmeſſer die große Axe. Eben ſo verhält es ſich mit zwey Hyperbeln, bey gleicher Vorausſetzung. Der Durchmeſſer der beſchriebenen Kreiſe iſt die Hauptaxe. Dieſes beruht darauf, daß die Linien, die in der Ellipſe und Hyperbel von den Brennpuncten nach einem Puncte der Curven gezogen werden, mit der berührenden gleiche Winkel machen. In der Parabel kommt ſtatt der einen Linie eine parallele mit der Axe.

27. Eine ſphäriſche Epicykloide wird von einem Puncte des Umfanges eines ſich um ſeinen Mittelpunct drehenden Kreiſes beſchrieben, indem derſelbe zugleich auf einem andern Kreiſe herumgeführt wird, der in einer andern Ebene liegt, welche aber mit der Ebene jenes einen unveränderlichen Winkel macht. Ein ſenkrechter Kegel, der eine Ebene mit einer Seite berührt, und auf ihr herumrollt, ſo daß die Spitze an derſelben Stelle bleibt, beſchreibt mit einem Puncte des Umfanges ſeiner Grundfläche eine ſolche Epicykloide. Von dieſer handeln Hermann in den Comment. Acad. Petrop. T. I. ferner Joh. Bernoulli, Maupertuis, Nicole und Clairaut in den Memoiren der Pariſer Akademie vom J. 1732. Lexell in den Actis Petrop. T. III. a. a. 1779.

28. Will man verſchiedene Methoden zur Entwickelung der Eigenſchaften der Epicykloide kennen lernen, ſo ſehe man nach Halleys Abhandlung in den Philoſ. Tranſ. nr. 218. die vorher angeführte Abhandlung von de la Hire; L'Hôpital Analyſe des infin. petits, nr. 100. ff. Ioh. Bernoulli Lect. Hoſpit. Lect. XXI. ſeqq. Newtoni Principia Phil. nat. Prop. 48. 49. Euleri Introd. in Anal Infin. T. II. §. 523. ff.

Epipedometrie iſt derjenige Theil der Geometrie, der von der Vergleichung der Flächen handelt, nach einigen die Vergleichung von Körpern, die einerley Grundfläche haben. Das Wort wird jetzt nicht mehr gebraucht.

Epitagma, Anordnung, ein Kunſtwort in der alten Geometrie, womit Pappus die verſchiedene Anzahl und Lage der Puncte in der Aufgabe von dem beſtimmten Schnitte einer Linie, als beſondere Fälle verſchiedener Aufgaben bezeichnet, in der Nachricht, die er von des Apollonius Schrift über dieſe Aufgabe ertheilt. Collect. mathem. L. VII. praef. S. beſtimmter Schnitt.

Eratoſthenes, Sieb des (Cribrum, Κόσκινον) iſt eine Methode dieſes alten ſehr gelehrten Mathematikers und Aſtronomen im 3ten Jahrh. vor C. G. die Primzah-

len aus den übrigen Zahlen auszuſondern. Sie iſt folgende. Man ſetzt die Reihe aller ungeraden Zahlen hin, ſo weit als man es nöthig findet, als:

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 21,
23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39,
41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, etc.

Man ſtreicht zuerſt jede dritte Zahl nach 3 aus, als 9, 15; etc. dann das Quadrat von 5 oder 25, und jede 5te Zahl nach 25, als 35, 45, etc. darauf das Quadrat von 7 oder 49, und jede 7te Zahl nach 49. So fährt man fort, bis daß die erſte nicht ausgeſtrichene Zahl, die zunächſt auf diejenige folgt, deren Vielfache zuletzt ausgeſtrichen worden, ſo beſchaffen iſt, daß ihr Quadrat größer iſt, als die letzte Zahl der Reihe, mit welcher man ſie beſchließt. Die nun übrig gebliebenen Zahlen ſind einfache oder Primzahlen.

Nikomachus in ſeiner Einleitung zur Arithmetik, und aus ihm Boethius in ſeinem Abriſſe derſelben, haben von dieſem Verfahren Nachricht gegeben. Sie machen aber zugleich die Factoren der Zahlen, welche Vielfache von andern ſind, bemerklich, und fangen deswegen immer bey der Einheit des Vielfachen an, nicht bey ihrem Quadrat. Der bildliche Name eines Siebes, den das Verfahren erhalten hat, zeigt an, daß dieſes nicht die Abſicht des Eratoſthenes geweſen iſt, ſondern das Ausſondern der Primzahlen.

Horsley hat in den Philoſ. Tranſact. Vol. 62. eine Abhandlung über das Sieb des Eratoſthenes geliefert. Er iſt mit den gedachten beiden Schriftſtellern unzufrieden, daß ſie die Erfindung des alten Griechen verſtellt haben. Sie iſt hier nach ſeiner Erklärung vorgetragen. In der ſchönen Oxforder Ausgabe des Aratus vom J. 1672. iſt eine Tafel der ungeraden Zahlen von 1 bis 113, mit den Theilern der zuſammengeſetzten unter ihnen, angehängt, unter der Aufſchrift, Sieb des Eratoſthenes. Dieſe Tafel iſt alſo nach der Vorſtellung des Nikomachus gemacht, vermuthlich von irgend einem Commentator deſſelben.

Erdmeßkunſt, ſ. Geometrie.

Erhebung einer Zahl zu einer Dignität oder Potenz iſt, ein Product aus Factoren machen, deren jeder ihr gleich iſt.

Erklärung, (definitio), mathematiſche, iſt die deutliche Darſtellung eines mathematiſchen Begriffs durch Worte mit Hinzufügung des Wortzeichens, welches für den Begriff unveränderlich gebraucht werden ſoll.

In reinen mathematiſchen Erklärungen iſt die Darſtellung des Begriffs als Subject eines Satzes zu betrachten, deſſen Prädicat das Wortzeichen iſt, wenn gleich nach der grammatiſchen Stellung dieſes das Subject zu ſeyn ſcheint. Das Wortzeichen zum Subject machen, iſt nur, es grammatiſch erklären. Es iſt hier nicht der Fall, daß das Erklärte außer uns gegeben, und uns ſchon undeutlich und unvollſtändig bekannt wäre, ſo daß die Erklärung den deutlichen und vollſtändigen Begriff von der Sache geben muß, ſondern in der reinen Mathematik entſpringen alle Begriffe gleichſam auf unſerm eigenen Grund und Boden. Die Erklärungen enthalten eine Form der Größe, welche wir eigenmächtig bilden. Wir gehen alſo von dem Begriffe zu dem Wortzeichen, nicht von dem ſchon irgendwoher gegebenen Wortzeichen zu dem Begriffe und deſſen Auseinanderſetzung. So hat man erſt die Form der Kegelſchnitte gefunden, und darauf die Benennungen, Ellipſe, Parabel, Hyperbel, eingeführt. Wenn auch ſinnliche Gegenſtände Veranlaſſung zu einer geometriſchen Form geben, ſo iſt dieſes nur zufällig und die abſtracte Form gehört doch ganz dem Verſtande zu. Arithmetiſche und analytiſche Zuſammenſetzungen ſind ganz reine Producte des Verſtandes.

Eine mathematiſche Erklärung braucht nur in ſo fern bewieſen zu werden, daß zu zeigen iſt, wie die darin liegende Form der Größe möglich, und geometriſch oder analytiſch dargeſtellt werden kann Z. B. Euklides erklärt ein Quadrat als eine vierſeitige Figur mit vier gleichen Seiten und rechten Winkeln. In dem Syſtem zeigt er, wie eine ſolche Figur verzeichnet wird.

Die Eigenſchaften einer Form der Größe kommen ihr ausſchließlich zu, nämlich nach dem grammatiſchen Sinne des Worts, Eigenſchaft. Daher kann man dieſelbe Form oft ohne Zwang auf verſchiedene Arten charakteriſiren. Z. B. die Erklärung, welche Euklides in der 5ten Erkl. des 5ten Buchs von proportionalen Größen giebt, (ſ. Proportion), ward von ihm gewählt, weil ſie zugleich auf rationale und irrationale Verhältniſſe ſich anwenden läßt, ohne daß man für die letztern eine beſondere Erweiterung oder Ergänzung nöthig hat. Die Neuern pflegen die Erklärung zu nehmen, daß für proportionale Größen die Exponenten der Verhältniſſe gleich ſind, weil dieſes zur Rechnung bequem iſt. Nimmt man Euklidens Erklärung, ſo folgt daraus der Lehrſatz, daß die Exponenten der Verhältniſſe gleich ſind, ſie mögen rational oder irrational ſeyn; ſo wie nach der Erklärung der Neuern die Euklidiſche ſich in einen Lehrſatz verwandelt. — Von den geraden Parallelen kann man verſchiedene Definitionen machen, wodurch dann ein verſchiedener Gang in dem Theile des Syſtems, welcher die Parallelen betrifft, verurſacht wird. Was nach der einen Methode zum Grunde gelegt wird, das wird nach der andern Folge. — Eine Ellipſe iſt eine krumme Linie, die auf eine gewiſſe Art durch den Durchſchnitt eines Kegels mit einer Ebene entſteht; man kann ſie auch durch die Gleichung erklären, welche aus dieſer Entſtehungsart hergeleitet wird, ohne inzwiſchen dabey dieſe Entſtehung anzugeben. Man kann auch eine Eigenſchaft der Ellipſe zum Grunde legen, daß ſie diejenige krumme Linie ſey, in welcher die Summe der beiden aus zwey beſtimmten Puncten an den Umfang gezogenen Linien unveränderlich iſt.

Ermeßliche, vergleichbare, commenſurable, Größen ſind ſolche, welche von einem und demſelben Maaße gemeſſen werden, als alle ganze Zahlen, und alle Brüche, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen ſind, oder auf ſolche gebracht werden können.

Ermeßliche Zahlen unter ſich ſind ſolche, die zwar einzeln von der Einheit oder einem aliquoten Theile

derſelben nicht gemeſſen werden, allein ſich doch wie ganze Zahlen verhalten, z. B. $\sqrt{8} : \sqrt{18}$, die ſich verhalten wie 2 : 3, weil $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, und $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Dieſe Art irrationaler oder abſolut unvergleichbarer Größen nennt man communicantes. Wolfii Elem. Anal. §. 63.

Ermeßliche Größen in der Potenz ſind ſolche, deren Quadrate von einer und derſelben rationalen Zahl, als geometriſche von einem und demſelben Flächenraume, gemeſſen werden, wie $\sqrt{5}$ und $\sqrt{17}$. Unter dieſe gehören auch die gleich vorher angeführten relativ ermeßlichen Größen. Die in der Potenz ermeßlichen Größen kommen in dem 10ten Buche der Euklidiſchen Elemente viel vor.

Erniedrigung einer Gleichung iſt, ſie auf die einfachſte Form, der ſie fähig iſt, oder den möglich niedrigſten Grad bringen. Dieſes geſchieht, nachdem alle Glieder auf eine Seite das Gleichheitszeichen gebracht ſind, durch Abſonderung des Factors, der nicht zum Weſentlichen der Verbindung der Größen in der Gleichung gehört.

Errathende Rechenkunſt (Arithmetica divinatoria) iſt eine Sammlung von arithmetiſchen Spielereyen, Zahlen, die jemand im Sinne hat, durch Verknüpfung mit andern Zahlen zu entdecken. Dahin mag man auch rechnen, wenn aus mehrern Dingen das von jemanden in Gedanken gewählte durch Abzählen und Verſetzungen angezeigt wird, und mehreres dergleichen. Sie dient zur Beluſtigung, bisweilen auch zur Übung in Überſicht arithmetiſcher Verbindungen, wodurch ſie bey dem Unterricht junger Leute gut zu gebrauchen iſt. In den natürlichen Magie von Wiegleb und Roſenthal findet ſich ein reicher Vorrath dieſer Kunſtſtücklein. In den Recréations mathématiques par Ozanam, T. I. ſind manche für Anfänger dienliche Aufgaben enthalten. Daſelbſt werden angeführt Problêmes plaiſans et delectables par Bachet. Schwenters mathematiſche und philoſophiſche Erquickſtunden, 1651. nebſt den beiden

Fortſetzungen von Harsdörfer, liefern auch dergleichen, ſo wie Ioco-ſerierum naturae et artis, ſ. Magiae naturalis centuriae tres, Auctore Aſpaſio Caramuelio (Kirchero), 1666. 4.

Ein paar Beyſpiele mögen zur Anleitung dienen, die Beweiſe der Vorſchriften in dieſen Büchern zu finden.

Eine Zahl x, die jemand in Gedanken hat, zu entdecken, laſſe man ihn dazu 2 addiren, die Summe mit der Zahl multipliciren, dann zu dem Product 1 addiren, und dann die Summe beider, a, angeben. Dieſe iſt das Quadrat von x + 1, wodurch alſo x leicht gefunden wird.

Die Zahl beſtehe aus zwey Ziffern, den Zehnern a, und den Einern b, ſo iſt ſie 10 a + b. Man laſſe ſie mit 2 multipliciren, und zu dem Product eine beliebige Zahl, 7, addiren, ſo entſteht die Summe 20 a + 2b + 7. Dieſe werde mit 5 multiplicirt, wodurch 100 a + 10 b + 35 erhalten wird. Dieſes Product laſſe man mit 10 multipliciren, und dann eine Zahl, 4, addiren, ſo ergiebt ſich 1000 a + 100 b + 354. Dieſe Zahl laſſe man ſich angeben, und ziehe von derſelben die bekannte Zahl 354 ab, ſo ſind die beiden erſten Ziffern die geſuchte Zahl.

Auf dieſe Art kann man zwey und mehrere Zahlen herausbringen, wenn ſie nicht über 9 ſind. Wären ſie größer als 9, und kleiner als 12, ſo müßte man ſtatt der Multiplicatoren 2 und 5, die 2, 3, 4, 6 gebrauchen, wodurch noch mehr Mannigfaltigkeit des Verfahrens entſteht; die überſchießende bekannte Zahl muß aber duodekadiſch ausgedruckt werden. Bey noch größern Zahlen hätte man ſich eines mehr erweiterten Zahlenſyſtems zu bedienen. Dies iſt ein Beytrag zu der errathenden Rechenkunſt, den man in den Sammlungen noch nicht finden wird.

Drey Zahlen, x, y, z, durch Hülfe der Algebra zu entdecken, laſſe man ſich die Summen je zweyer, als x + y; x + z; y + z, geben, ſo hat man drey Gleichungen für die drey unbekannten Größen, woraus ſie leicht beſtimmt werden.

Euthymetria wird bisweilen derjenige Theil der Geometrie genannt, welcher die Betrachtung der geradlinichten Figuren enthält. Die erſte Hälfte des Worts bedeutet das Gerade.

Evolution, Abwicklung einer krummen Linie, iſt die ſtetige Bewegung einer geraden berührenden Linie und eines beſtimmten Punctes auf derſelben durch alle ihre Lagen an der Curve. Man lege auf oder an eine krumme Linie AMm (Fig. 19.) einen vollkommen biegſamen Faden ohne Dicke, das iſt, eine biegſame mathematiſche Linie, die mit der Curve völlig zuſammenfällt, befeſtige ihn in irgend einem Puncte m, und verlängere ihn in einem andern Puncte A nach der Richtung der berührenden AB, der Faden werde nach dieſer Richtung geſpannt, und nach der Seite jenes Punctes m hin bewegt, immer geſpannt, ohne Drehung, ſo daß in dem Puncte M der gerade Theil des Fadens die Curve daſelbſt berühre, da der übrige Theil noch auf dem Bogen Mm liegt. Irgend ein Punct des Fadens, als der Anfangspunct A des Bogens ſelbſt, oder einer auf der berührenden AB, wie B, beſchreibt eine Curve BNn, die man die durch Evolution erzeugte (oder evolvirende, abwickelnde) nennt, ſo wie die AMm die abgewickelte, oder Evolute. Es erhellt, daß der gerade Theil des Fadens MN der Summe des Bogens AM und der geraden AB iſt, wenn B der beſchreibende Punct iſt.

1. Der Radius MN der Evolvirenden BNn iſt auf dieſelbe ſenkrecht

Die Coordinaten der Evolute ſeyn $AP = x$; $PM = y$; der Evolvirenden $AQ = t$; $QN = u$, beide Paare rechtwinklichte, die Abſciſſen AP, AQ auf der die Curve in A berührenden. Der Bogen $AM = s$, der Radius $MN = z$. Es iſt $PM + QN = (MS + SN)$. ſin $MSP = MN$. ſin MSP. Nun iſt tang $MSP = \frac{\partial y}{\partial x}$ (berühr. Linie 14.), alſo ſin $MSP = \frac{\partial y}{\sqrt{(\partial y^2 + \partial x^2)}}$

$= \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial z}$, weil der Bogen AM und der Radius MN immerfort gleichviel zunehmen. Folglich $y + u = \frac{z\partial y}{\partial z}$. Eben ſo iſt $QP = MN . \cos MSP$, oder $x - t = \frac{z\partial x}{\partial z}$. Die Differentiation giebt $\partial y + \partial u = \partial y + \frac{z\partial^2 y}{\partial z}$, wenn ∂z oder ∂s unveränderlich genommen wird, oder $\partial u = \frac{z\partial^2 y}{\partial z}$. Eben ſo iſt $\partial t = - \frac{z\partial^2 x}{\partial z}$. Da ∂s unveränderlich geſetzt iſt, ſo iſt $\partial . (\partial x^2 + \partial y^2) = 0$, alſo $\partial x \partial^2 x = - \partial y \partial^2 y$, und $\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial^2 y}{\partial^2 x} = \frac{\partial x}{\partial y}$.

Nun iſt $QS = QN . \tan QNS = QN . \tan SMP$ $= \frac{u\partial x}{\partial y}$, alſo iſt $QS = \frac{u\partial u}{\partial t}$. Dieſes iſt aber der Werth der Subnormale für den Punct N oder die Ordinate u, (berühr Linie 41.), alſo iſt NS ſenkrecht auf die Curve BNn.

2. Die berührende MN an der Evolute bis an die Evolvirende iſt der Halbmeſſer der Krümmung an dieſer.

Es ſey $\frac{\partial u}{\partial t} = p$, der Halbmeſſer der Krümmung in N ſey $= r$, ſo iſt $r = -(1 + p^2)^{\frac{3}{2}} . \frac{\partial t}{\partial p}$ (Krümmungskreis, 2.). Da $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial y}$ iſt, ſo iſt $p = \frac{\partial x}{\partial y}$, und

$$\partial p = \frac{\partial^2 x \partial y - \partial x \partial^2 y}{\partial y^2} = \frac{(\partial y^2 + \partial x^2)\partial^2 x}{\partial y^3} = \frac{\partial z^2 \partial^2 x}{\partial y^3}.$$

In (1.) iſt gefunden $\partial t = -\frac{z\partial^2 x}{\partial z}$, alſo iſt

$\frac{\partial t}{\partial p} = -\frac{z\partial y^3}{\partial z^3}$. Ferner iſt $1 + p^2 = \frac{\partial y^2 + \partial x^2}{\partial y^2}$

$= \frac{\partial z^2}{\partial y^2}$, und $(1 + p^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{\partial z^3}{\partial y^3}$. Folglich iſt $r = z$.

3. Die Evolute iſt der geometriſche Ort der Mittelpuncte der Krümmungskreiſe für diejenige Linie, die aus ihrer Evolution entſteht, und wird von den Halbmeſſern der Krümmung berührt. Dieſe Eigenſchaft kann man auch zur Erklärung der Evoluten gebrauchen.

4. Aus der Gleichung für die Evolvirende BNn läßt ſich mittelſt der in (1.) gefundenen Formeln immer die für die Evolute herleiten. Denn es iſt erſtlich

$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial x}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}} = \frac{p}{\sqrt{(p^2 + 1)}}$, und $\frac{\partial y}{\partial z} =$

$\frac{\partial y}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(p^2 + 1)}}$. Ferner iſt

$z = -(p^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial t}{\partial p}$, alſo iſt $\frac{z\partial x}{\partial z} = -(p^2 + 1)$

$\times \frac{p\partial t}{\partial p}$, und $\frac{z\partial y}{\partial z} = -(p^2 + 1) \cdot \frac{\partial t}{\partial p}$. Daraus

werden nun die in (1.) zwiſchen den Coordinaten beider Linien gefundenen Gleichungen folgende:

$$x = t - (p^2 + 1) \cdot \frac{p\partial t}{\partial p}$$

$$y = -u - (p^2 + 1) \cdot \frac{\partial t}{\partial p}.$$

Aus der Gleichung für die Evolvirende werden die Differen⸗tial⸗Quotienten p, und $\frac{\partial t}{\partial p}$ hergeleitet, und durch t nebſt u gegeben. Setzt man die Werthe derſelben in jene beiden Gleichungen, ſo hat man nebſt der für die Curve drey Glei⸗chungen, woraus man die beiden veränderlichen t, u her⸗ausſchaffen, und eine Gleichung zwiſchen x und y erhalten kann

Die Abſciſſen x und t kann man, wo man will, anfan⸗gen laſſen, da es ihr Unterſchied iſt, der in der erſtern Glei⸗chung durch p und $\frac{\partial t}{\partial p}$ gegeben wird.

5. Aus der Gleichung für die Evolute läßt ſich nicht immer eine Gleichung für die Evolvirende, von Differen⸗tialen befreyte, herleiten. Iſt die krumme Linie rectifica⸗bel, ſo iſt z eine Function von x und y in endlichen Aus⸗drücken, und die Differentialquotienten, $\frac{\partial x}{\partial z}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$ wer⸗den durch x und y gegeben. Aus den beiden in (1.) ge⸗fundenen Gleichungen und der für x und y gegebenen läßt ſich nun ſowohl x als y herausſchaffen, ſo daß eine Glei⸗chung für t und u hervorgeht.

Iſt aber z keine algebraiſche Function, von x und y, ſo iſt die Gleichung zwiſchen t und u keine algebraiſche. Denn wenn ſie es wäre, ſo wäre die Gleichung zwiſchen x und y nicht allein auch eine algebraiſche, ſondern die Evolute wäre auch rectificabel und z eine algebraiſche Function von x und y. Es kommt nun darauf an, ob die Gleichung, welche man durch die Subſtitution der in (4.). gefundenen Werthe von x und y in der Gleichung für die⸗ſelbe erhält, ſich integriren läßt.

6. Exempel. Die Evolvirende BNn ſey eine Para⸗bel, deren Axe BQ iſt, die Gleichung für die Evolute zu finden.

Die Abſciſſen der Parabel laſſe man in dem Scheitel anfangen, wohin dann auch der Anfang der Abſciſſen x an der Evolute gelegt wird, zufolge der Bemerkung in (4.).

Der Parameter der Parabel ſey a, ſo daß ihre Gleichung iſt, $at = uu$. Alſo iſt $a\partial t = 2u\partial u$; $p = \frac{a}{2u}$;

$$p^2 + 1 = \frac{aa + 4uu}{4uu};\ \partial p = -\frac{a\partial u}{2uu},$$ folglich

$$x = t + \frac{aa + 4uu}{2a}$$

$$y = \frac{aa + 4uu}{aa} . u - u = \frac{4u^3}{aa}.$$

Die Verbindung mit der Gleichung $at = uu$ giebt

$x - \frac{1}{2}a = \frac{3uu}{a}$, alſo $(x - \frac{1}{2}a)^3 = \frac{27u^6}{a^3}$. Da

$y^2 = \frac{16u^6}{a^4}$, ſo iſt $(x - \frac{1}{2}a)^3 = \frac{27}{16}ay^2$,

die Gleichung für die Evolute. Wenn in derſelben $x = \frac{1}{2}a$ genommen wird, ſo iſt $y = 0$, alſo iſt der Anfang der Evolute in A, wo $AB = \frac{1}{2}a$, und der Halbmeſſer der Krümmung an der Evolvirenden in B iſt $= \frac{1}{2}a$. Dieſer Werth folgt auch aus der allgemeinen Formel für den Halbmeſſer der Krümmung an der Parabel, $r = \frac{(aa + 4uu)^{\frac{3}{2}}}{2aa}$, wenn in derſelben $u = 0$ geſetzt wird.

Man ſetze $AP = w$, ſo iſt $w^3 = \frac{27}{16}ay^2$, welches die Gleichung für eine parabola ſemicubica, oder die Neiliſche mit dem Parameter $\frac{27}{16}a$ iſt. Sie hat auf der andern Seite der Abſciſſenlinie einen dem Zweige AMm ähnlichen und gleichen, beide ins Unendliche fortlaufend,

und in A eine Spitze, da hier die berührende in die Abſciſſenlinie fällt. Vergl. Th. 1. S. 137. f.

7. Zu einem Beyſpiele des Verfahrens, aus der Evolute die Evolvirende zu finden, nehme man zur Evolute die Neiliſche Parabel AMm, mit dem Parameter a, ſetze hier $AP = x$; $PM = y$; ſo iſt für die Curve, $x^3 = ay^2$; die Differentialgleichung, $3x^2\partial x = 2ay\partial y$; das Differential des Bogens oder des Radius MN,

$$\partial z = \partial x \sqrt{\left(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{4a + 9x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \partial x.$$

Die Integration giebt

$$z = \frac{a}{27}\left(\frac{4a + 9x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} + c,$$

wo c eine willkührliche Linie iſt, die von der Länge abhängt, welche man der Linie AB giebt. In A iſt $x = 0$, und

$z = \frac{8a}{27} + c$, ſo daß $AB = \frac{8a}{27}$ iſt, wenn $c = 0$ genommen wird.

Die beiden Gleichungen für die Coordinaten an beiden Linien ſind (1.)

$$y + u = \frac{z\partial y}{\partial z};$$

$$x - t = \frac{z\partial x}{\partial z}.$$

Daraus iſt

$$\frac{y + u}{x - t} = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3x^2}{2ay}, \text{ oder}$$

$$2ay^2 + 2auy = 3x^3 - 3x^2t.$$

Die Verbindung mit der Gleichung für die Curve giebt

$$2auy = x^3 - 3tx^2.$$

Dieſe quadrirt, und mit eben derſelben verglichen giebt

$$4au^2 = x(x - 3t)^2 \qquad (A).$$

Die Gleichung $x - t = \frac{z\partial x}{\partial z}$ wird durch gehörige Subſtitution

$$x - t = \frac{2}{27}(4a + 9x) + 2c\left(\frac{a}{4a + 9x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

oder

$$9x - 27t - 8a = 54c\left(\frac{a}{4a + 9x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aus dieſer Gleichung und der gleich vorher gefundenen (A) ſchaffe man x weg, ſo erhält man eine Gleichung für die Evolvirende mit der beſtimmten Conſtante c.

Man ſetze $c = 0$, ſo iſt $9x - 27t = 8a$, oder $9(x - 3t) = 8a$, oder $81(x - 3t)^2 = 64a^2$. Dieſe Gleichung verbinde man mit der Gleichung (A), ſo entſteht die Gleichung $81u^2 = 16ax$, und, für x ſeinen Werth geſetzt, $81u^2 = 16a(\frac{8}{9}a + 3t)$, oder

$$u^2 = \frac{16}{27}a\left(\frac{8}{27}a + t\right).$$

Dieſes iſt die Gleichung für eine Parabel, deren Parameter $= \frac{16}{27}a$ iſt, mit dem Abſtande $\frac{8}{27}a$ oder AB, des Anfangs der Abſciſſen vom Scheitel. Der Parameter der Parabel und ihrer Evolute verhalten ſich wie $16 : 27$, ſo wie es auch in (6.) gefunden iſt.

8. Man ſieht hieraus, wie man einer gegebenen krummen Linie eine parallele (gleichlaufende) ziehen könne, das iſt, eine ſolche, die ihre Richtung in den ſucceſſiven Puncten eben ſo ändert, wie die gegebene, wobey die parallelen berührenden beider in den correſpondirenden Puncten einen gegebenen Abſtand haben, wie in zwey concentriſchen Kreiſen. Man ſuche zu dem Ende die Gleichung für die Evolute AMm einer gegebenen Linie BNn, und ſetze den Anfangspunct der Abſciſſen in A auf der geraden BAP. Aus jener Gleichung leite man den Werth von z oder $\int(\partial x^2 + \partial y^2)$ her, und beſtimme die Conſtante ſo, daß

für $x = o$ der Werth von z an der parallelen Curve von dem an BNn, oder von AB, um den gegebenen Abſtand der parallelen berührenden verſchieden ſey. Nun hat man aus der Gleichung für die Evolute, und den beiden allgemeinen, $y + u = \frac{z\partial y}{\partial z}$, und $x - t = \frac{z\partial x}{\partial z}$, die Coordinaten, x, y, wegzuſchaffen, um die Gleichung für die geſuchte Linie zu erhalten.

Zum praktiſchen Gebrauch (bey Gewölbebogen, Kämmen der Räder in Maſchinen) mag man die krumme parallele ſo beſchreiben, daß man zuerſt die Evolute durch Hülfe einiger Puncte zeichne, und an dieſer, ſtatt des vorher gebrauchten Fadens, ein Linial herumführe, welches die Evolute ſtetig berührt, und mit einem darauf bemerkten Puncte an ſeiner Schärfe die gegebene Curve beſchreibe, ſo wird irgend ein anderer daran bemerkter Punct eine parallele mit jener beſchreiben. Oder anſtatt die Evolute zu zeichnen, ziehe man mehrere Normalen an die gegebene Curve, und trage darauf von dieſer an den Abſtand der parallelen von jener, ſo erhält man eine Anzahl Puncte, die durch einen freyen Zug zu verbinden ſind.

Ein ſehr gutes Beyſpiel an der Ellipſe giebt von Praſſe in Diſſertatione de Ellipſeos evoluta et aequidiſtantibus. Lipſiae 1798.

Kaeſtner de curvis aequidiſtantibus, Commentt. Soc. Goetting. T. XI. und in der Analyſis des Unendl. §. 95.

9. Die krumme Linie zu finden, deren Evolute mit ihr in den zuſammengehörigen, durch Normale an dieſer, und berührende an jener (der Evolute) verbundenen Puncten gleich große Ordinaten hat.

Die krumme Linie ſey ANB (Tab. X. Fig. 20.), und ihre Evolute AMC. Die Normale an jener NM berührt dieſe in M. Es ſey nun die Ordinate $NQ = PM$, ſo iſt $NS = SM$, oder $MN = 2NS$. Mit Beybehaltung der vorigen Bezeichnungen iſt $y = u$, alſo $2y = \frac{z\partial y}{\partial z}$,

oder $\frac{2\partial z}{z} = \frac{\partial y}{y}$. Die Integration dieſer logarithmiſchen Differentiale giebt $\frac{zz}{aa} = \frac{y}{b}$ (Different. Formeln 14.), wo a und b zwey willkührliche Conſtanten ſind. Alſo iſt $zz = \frac{aa}{b} y = \frac{aa}{b} u$, oder kürzer $zz = 4cu$, wo c eine unveränderliche Größe bedeutet.

Die Subnormale QS iſt $= \frac{u\partial u}{\partial t}$ (berühr. Linie, 42.), alſo iſt $NS^2 = NQ^2 + QS^2 = u^2 \left(\frac{\partial t^2 + \partial u^2}{\partial t^2}\right)$. Da $2NS = z$, und $zz = 4cu$, ſo iſt $u(\partial t^2 + \partial u^2) = c\partial t^2$, oder $u\partial u^2 = (c-u)\partial t^2$, und

$$\partial u \sqrt{\frac{u}{c-u}} = \partial t,$$

als die Differentialgleichung für die geſuchte evolvirende Linie.

Die Gleichung integrirbar zu machen, verwandle man ſie in folgende,

$$\frac{u\partial u}{\sqrt{(cu-uu)}} = \partial t.$$

Die Integration (ſ. Integralformeln) giebt

$t = \frac{1}{2} c$ Ang. ſin. verſ. $\frac{2u}{c} - \sqrt{(cu-uu)}$, wobey Conſt $= 0$ iſt. Es ſey Ang. ſin. verſ. $\frac{2u}{c} = \varphi$, ſo iſt $\sin \varphi^2 = \frac{2u}{c}\left(2 - \frac{2u}{c}\right) = \frac{4(cu-uu)}{cc}$, alſo iſt

$$t = \tfrac{1}{2} c (\varphi - \sin \varphi)$$
$$u = \tfrac{1}{2} c (1 - \cos \varphi).$$

Es iſt nämlich $1 - \frac{2u}{c} = \cos\varphi$.

Jene beiden Gleichungen gehören für die Cykloide (ſ. Cykloide, I.), welche durch die Wälzung eines Kreiſes, deſſen Durchmeſſer c, von einem Puncte des Umfanges beſchrieben wird. Die Benennungen, x, y, a, a. a. O. ſind hier mit t, u, $\frac{1}{2}c$ vertauſcht.

Die Subnormale QS iſt $\frac{u\partial u}{\partial t} = \sqrt{(cu - uu)}$ $= \frac{1}{2}c\sin\varphi$. Da SP = QS iſt, ſo iſt AP oder $x = \frac{1}{2}c(\varphi + \sin\varphi)$. Man ziehe AE ſenkrecht auf AP und MV parallel der letztern, ſo iſt an der Evolute

$$AV = \tfrac{1}{2}c(1 - \cos\varphi)$$

$$VM = \tfrac{1}{2}c(\varphi + \sin\varphi).$$

Dieſe Linien ſind die Coordinaten einer Cykloide, deren erzeugender Kreis den Durchmeſſer c hat, wie die ANB, aber an der Cykloide AMC iſt A der Scheitel, von welchem an die Abſciſſen auf der Axe AE genommen werden. Die Werthe von AV und VM haben eben die Form, welche die von EQ und QM in dem Art. Cykloide, II. haben. Nur gehören daſelbſt dieſe Ordinaten zu demſelben Puncte mit den Coordinaten AP, PM, hier aber gehören AV und VM zu einem andern Puncte M als der durch Q und QN beſtimmte N iſt, außer in dem Falle $\varphi = 90°$.

Man nehme AE = c, ſo iſt $\cos\varphi = -1$; $\varphi = \pi$, und $EC = \frac{1}{2}c\pi$, dem halben Umfange des erzeugenden Kreiſes. Die Evolute der halben Cykloide ANB iſt ſie ſelbſt in einer umgekehrten und entgegengeſetzten Lage. Die Evolute der andern Hälfte ſchließt ſich an AMC in C mittelſt einer Spitze und gemeinſchaftlicher berührenden zwiſchen beiden

10. Man krümme zwey blecherne Streifen nach der Linie AMC, und füge ſie auf die Art zuſammen, wie die beiden Hälften der Evolute der Cykloide ſich an einander ſchließen, ſtelle ſie umgekehrt, ſo daß CFB lothrecht, und B der unterſte Punct ſey. Dann lege man an AMC einen

Faden mit einem Gewichte in A (welches man man ſich als einen einzigen ſchweren Punct zu gedenken hat), ſo ſchwingt dieſer ſchwere Punct in der Cykloide hin und her. Läßt man ihn von irgend einem Puncte N an fallen, ſo gebraucht er dieſelbe Zeit bis zu dem unterſten Puncte, und von da wieder bis zu dem in der andern Hälfte der Cykloide mit N gleich hoch liegenden, wie von jedem andern Puncte. Dieſe merkwürdige Entdeckung, ſo wie von der Evolute der Cykloide, hat Huygens gemacht, und in der Schrift, Horologium oſcillatorium, Pariſiis 1673. Fol. erwieſen. Die Gleichheit der Schwingungszeiten findet nur in einem leeren Raume ſtatt, und in einem Mittel, deſſen Widerſtand der Geſchwindigkeit proportional iſt. Euleri Mechanica T. II. §. 584.

11. Die Evolute der Epicykloide zu finden, deren beſchreibender Punct auf dem Umfange des erzeugenden Kreiſes liegt.

Es iſt (Fig. 18.) BDQ der Grundkreis, A ſein Mittelpunct; FDG der erzeugende Kreis; E der Mittelpunct; F der beſchreibende Punct, GFT die berührende; FD die Normale, auf welcher der Mittelpunct des zu F gehörigen Krümmungskreiſes O iſt. In dem Artikel, Epicykloide, iſt geſetzt $AD = a$; $DE = b$; $AF = z$. Ferner iſt daſelbſt (15.) gefunden $FO = \frac{2(a+b)}{a+2b} \times DF$. Man ſetze $\frac{2(a+b)}{a+2b} = m$, und für DF ſeinen Werth, $2b \sin G$, ſo iſt $FO = 2mb \sin G$. Eben daſelbſt (5. I.) iſt gezeigt, daß $\sin G^2 = \frac{zz-aa}{4b(a+b)}$, und (6. I.) daß $\sin AFg = \frac{a+2b}{z} \sin G$. Da FO ſenkrecht auf die berührende Fg oder FG iſt, ſo iſt $\cos AFO = \frac{a+2b}{z} \sin G$. Die Linie AO aus dem Mittelpuncte A an den Mittelpunct

K

der Krümmung wird in dem Dreyeck AFO durch AF, FO und den Winkel AFO gegeben. Es iſt nämlich

$$AO^2 = AF^2 + FO^2 - 2AF \times FO \times \operatorname{coſ} AFO.$$

Aus der zweyten der obigen Formeln iſt

$$zz = aa + 4b(a+b) \operatorname{ſin} G^2,$$

alſo iſt

$$AO^2 = aa + 4b(a + b - m(a + 2b) + m^2 b) \operatorname{ſin} G^2$$
$$= aa - 4(m-1)b(a - (m-1)b) \operatorname{ſin} G^2.$$

Dieſer Werth von AO hat dieſelbe Form mit dem für z, indem ſtatt des Halbmeſſers b des erzeugenden Kreiſes hier $-(m-1)b$, das iſt, $-\frac{ab}{a+2b}$ geſetzt iſt. Aber die Evolute der Epicykloide kann nicht eine innere ſeyn, wie die Negation von b ſonſt nach (Epicykloide, 22.), anzeigt, weil dieſe nach dem Umfange des Grundkreiſes hin hohl iſt, die Evolute aber nach der äußern Epicykloide und daher nach dem Grundkreiſe hin convex ſeyn muß. Allein in dem Artikel, Epicykloide (17.) iſt bemerkt, daß die Formel,

$$zz = cc - 4b(c-b)(\operatorname{ſin} \tfrac{1}{2} GEF)^2$$

auch für die äußere Epicykloide gehört, nur daß der Wälzungswinkel von dem entfernteſten Puncte des bewegten Kreiſes an gerechnet wird, ſo wie auch c den Abſtand dieſes Punctes von dem Mittelpuncte des ruhenden Kreiſes bedeutet. Alſo iſt auch hier für die Evolute eine äußere Epicykloide zu nehmen, an welcher der Abſtand des Scheitels von $A = a$; der Halbmeſſer des bewegten Kreiſes $= (m-1)b$ oder $\frac{ab}{a+2b}$, alſo der Halbmeſſer des ruhenden $= \frac{aa}{a+2b}$, und der Wälzungswinkel 2G von dem entfernteſten Puncte des bewegten Kreiſes an gerechnet wird. Der Scheitel liegt in B; der Radius zu der erſten Spitze macht mit AB den Winkel $\frac{b\pi}{a}$ oder $\frac{b}{a} \cdot 180°$.

An der innern Epicykloide liegt eine Spitze in B, der nächſte Scheitelpunct um den Winkel $\frac{b\pi}{a+2b}$ an dem Mittelpuncte A davon entfernt, wo der Radius $= \frac{aa}{a+2b}$ iſt. Die Gränzen für den Radius ſind an beiden Epicykloiden dieſelben, nämlich a und $\frac{aa}{a+2b}$, aber bey demſelben Wälzungswinkel iſt die Lage ganz verſchieden.

12. Ein anderes Verfahren, die Evolute der Epicykloide zu finden lehrt Joh. Bernoulli, Lect. Hoſpit. XXIV.

Tſchirnhauſen hat ſchon gefunden, daß die Brennlinie des Kreiſes für parallele Strahlen, die eine Epicykloide iſt, durch Abwickelung die Brennlinie eines im Durchmeſſer doppelt ſo großen Kreiſes erzeugt. Es iſt aber nur für dieſen beſondern Fall, daß er es darthut. Acta Erud. 1690, pag. 169.

13. Die Evolute der Epicykloide iſt derſelben ähnlich. Die Baſis und der erzeugende Kreis der letztern haben die Halbmeſſer, a, b; an der Evolute haben dieſe Kreiſe die Halbmeſſer $-\frac{aa}{a+2b}$; $\frac{ab}{a+2b}$, welche ſich wie a:b verhalten. S. analytiſche Ähnlichkeit.

Die Halbmeſſer der Krümmung an beiden Linien für gleiche Wälzungswinkel verhalten ſich wie die Halbmeſſer der erzeugenden Kreiſe Denn die Chorde dieſes Winkels, von dem Berührungspuncte des erzeugenden Kreiſes mit dem Grundkreiſe bis an den beſchreibenden Punct ſey an der evolvirenden $=f$, an der Evolute $=g$, ſo iſt an jener der Halbmeſſer der Krümmung $= \frac{2(a+b)}{a+2b} f$. Setzt man für a und b die gleichnamigen Halbmeſſer, die zu der Evolute gehören, ſo bleibt der Factor $\frac{2(a+b)}{a+2b}$ derſelbe, und

der Halbmeſſer der Krümmung iſt $\frac{2(a+b)}{a+2b}g$. Da k und g ſich wie die Halbmeſſer ihrer Kreiſe verhalten, ſo verhalten ſich die Halbmeſſer der Krümmung eben ſo.

Bey der ähnlichen Form haben Epicykloide und Evolute entgegengeſetzte Lage. Darum nennt man ſie auch verkehrt ähnlich. S. Käſtners Anal. d. Unendl. §. 578. ff.

14. Die Linie, welche durch die Abwickelung eines Kreiſes beſchrieben wird, iſt als eine Epicykloide anzuſehen, deren erzeugender Kreis einen unendlich großen Halbmeſſer hat. Der Kreisbogen FD (Fig. 18.) wird dadurch zu einer geraden Linie, der Winkel E wird Null, und W. FDE ein Rechter, ſo daß FD die BD berührt. Wir werden dieſes aber aus der unmittelbaren Betrachtung dieſer Linie folgern.

Es ſey ADBA (Tab. X. Fig. 21.) ein Kreis, deſſen Mittelpunct C iſt. Man ziehe einen Halbmeſſer CD, und durch D darauf die ſenkrechte DF, nehme DF gleich dem Bogen AD, ſo iſt F ein Punct der durch die Evolution entſtandenen Linie.

Man ſetze $AC = a$, $CF = z$, ACF oder $ACE = \omega$, ſo iſt $\frac{z}{a} = \sec DCF$, und $DCF = \text{Ang. sec.} \frac{z}{a}$, alſo $ACD = \omega + \text{Ang. sec} \frac{z}{a}$, und der Bogen AED = $= a\left(\omega + \text{Ang. sec.} \frac{z}{a}\right)$. Dieſem iſt die gerade DF gleich. Alſo iſt $a\left(\omega + \text{Ang. sec} \frac{z}{a}\right) = \sqrt{(zz - aa)}$, und

$$\omega = \frac{\sqrt{(zz - aa)}}{a} - \text{Ang. sec.} \frac{z}{a}.$$

Hieraus entſteht die Differentialgleichung,

$$\partial\omega = \frac{\sqrt{(zz-aa)}}{az}\partial z.$$

Es iſt nämlich das Differential des erſten Theils von $\omega = \frac{z\partial z}{a\sqrt{(zz-aa)}}$, und ∂. Ang. ſec $\frac{z}{a} = \frac{a\partial z}{z\sqrt{(zz-aa)}}$, (Different. Formeln, 33.), wo $\frac{s}{a}$ ein Bogen oder Winkel für den Halbmeſſer als Einheit iſt, wie derſelbe hier angenommen iſt.

Die Gleichung entſteht aus der für die Epicykloide (ſ. dieſe, 5.), wenn b unendlich groß geſetzt wird.

Der Bogen AF iſt $= \frac{zz-aa}{2a}$, oder die dritte proportionale zu dem Durchmeſſer AB und dem Kreisbogen AD. — Denn es ſey AF $= s$, ſo iſt $\partial s = \sqrt{(z^2\partial\omega^2 + \partial z^2)}$, (Rectification), das iſt, $\partial s = \frac{z\partial z}{a}$ alſo $s = \frac{zz}{2a}$ + Conſt. Für $z = a$ iſt $s = 0$, alſo Conſt $= -\frac{1}{2}a$, und $s = \frac{zz-aa}{2a}$. Da Bog. AD $= \sqrt{(zz-aa)}$, ſo folgt daraus der zweyte Ausdruck für AF.

Die Area ACF iſt $= \frac{(zz-aa)^{\frac{3}{2}}}{6a}$. Denn es iſt ihr Differential $= \frac{1}{2}z^2\partial\omega$ (ſ. Quadratur), und für $\partial\omega$ ſeinen Werth geſetzt, iſt es $= \frac{z\partial z\sqrt{(zz-aa)}}{2a}$, woraus ſogleich das Integral, als die Area, ohne eine Conſtante zu bedürfen, folgt.

Die Area AEDFA iſt $= \frac{(zz-aa)^{\frac{3}{2}}}{6a} = \frac{(\text{Bog. AD})^3}{6a}$.

Denn das Dreyeck CDF iſt gleich dem Kreisſector ACD. Addirt man zu der Area ACF jenes, und ſubtrahirt dafür dieſen, ſo wird die Area zwiſchen den Bogen, AF, AD und der geraden DF erhalten.

Zieht man BG ſenkrecht auf den Endpunct B des Durchmeſſers AB, und nimmt BG gleich dem halben Umfange des Kreiſes, ſo iſt G ein Punct der Curve, und die Area AEBGA gleich dem ſechſten Theile des mit dem Halbmeſſer BG beſchriebenen Kreiſes. — Denn da der Halbkreis $= \pi a$ iſt, ſo iſt die Area AEBGA $=$ $\frac{\pi^3 a^3}{6a}$ $\frac{1}{6}\pi . \pi^2 a^2$. Die Area des mit dem Halbmeſſer πa beſchriebenen Kreiſes iſt $\pi(\pi a)^2$.

Der Halbmeſſer der Krümmung in F iſt $=$ DF. Denn es ſey die ſenkrechte CT aus dem Mittelpuncte C auf die berührende FT $= t$, der Halbmeſſer der Krümmung $= r$, ſo iſt $r = \frac{z\partial z}{\partial t}$, (ſ. Krümmungskreis). Es iſt aber CT $=$ DF, da DF den Kreis berührt, und auf die Evolvirende ſenkrecht iſt, alſo iſt $t = \sqrt{(zz-aa)}$, und $\partial t = \frac{z\partial z}{\sqrt{(zz-aa)}}$, folglich $r = \sqrt{(zz-aa)} =$ DF.

Die letztere Formel folgt ſogleich aus der für den Halbmeſſer der Krümmung an der Epicykloide, wenn (ſ. daſ. 15.) der Halbmeſſer b unendlich groß genommen wird, alſo Bogen und Chorde ſich gleich werden. Wegen der Formel für den Bogen AF, um ſie aus der für die Epicykloide (ſ. daſ. 8.) herzuleiten, iſt zu bemerken, daß für einen verſchwindenden Winkel φ iſt $1 - \text{coſ}\,\varphi = \frac{1}{2}\varphi^2$, (ſ. Cyklometrie, 6.), und daß der Bogen der Epicykloide ſich auch ſo ausdrucken laſſe, $s = \frac{4b(a+b)}{a}(1-\text{coſ}\,G)$,

oder $\frac{4b(a+b)}{a}$ ($1-\text{coſ}\frac{1}{2}E$), woraus ſich denn für ein unendliches b, mit Zuziehung jener Formel, der Werth des Bogens ergiebt. Was die Area betrifft, ſo iſt zu merken, daß ein Kreisſegment für den Winkel φ mit dem Halbmeſſer b iſt $= \frac{1}{2} b^2 \varphi - b^2 \text{ſin} \frac{1}{2} \varphi . \text{coſ} \frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{2} b^2 (\varphi - \text{ſin}\, \varphi)$. Da $\text{ſin}\, \varphi = \varphi - \frac{1}{6} \varphi^3 +$ etc. iſt (Cyklometrie, 5.) ſo verwandelt ſich für ein verſchwindendes φ das Segment in $\frac{1}{12} b^2 \varphi^3$, wo $b \varphi$ der Bogen zu dem verſchwindenden Winkel iſt. Mittelſt dieſes Werthes des Segments verwandelt ſich die Formel für die Epicykloide (10.) in die hier gefundene.

Die Abwicklung des Kreiſes kann unendlich oft wiederholt werden, daher die dadurch erzeugte Curve unendlich viele, ſich immer mehr erweiternde Umläufe um C macht.

15. Die Linie, deren Evolute der Kreis iſt, hat einen wichtigen Nutzen in der Mechanik. Wenn die Hebelatte eines ſenkrechten Stampfers mit gleichförmiger Kraft und Bewegung ohne Klemmung gehoben werden ſoll, ſo muß der Hebedaumen nach einer Curve, wie jene iſt, geformt ſeyn. Es iſt AB der Durchmeſſer der Daumenwelle oder eines concentriſchen Kreiſes. Man ſehe meine Encyklopädie, 2te Ausg. Th. III. S. 476.

16. Die mechaniſche Conſtruction der Curve iſt leicht. Man ſetze BG ſenkrecht auf AB in B, und mache BG dem halben Umfange gleich, ſo genau als es der Maaßſtab zuläßt. Den halben Umfang theile man in 3, oder 4 oder mehr Theile, und in eben ſo viele die Linie BG, ſo erhält man für jeden Theilungspunct wie D die Länge der auf CD ſenkrechten DF. Auf ähnliche Art wird die krumme Linie weiter fortgeſetzt. Man kann ſich bequem des Halbmeſſers der Krümmung in jedem Puncte bedienen, und die Curve beynahe aus Kreisbogen zuſammen ſetzen.

17. Die Evolute der logarithmiſchen Spirallinie, an welcher der Winkel der Curve mit der berührenden ein halber Rechter iſt, iſt ſie ſelbſt, in einer ähnlichen Lage, wie dieſe; iſt jener Winkel ein anderer, auch beſtändiger, ſo iſt die Evolute eine ähnliche Spirale. S. Spirallinie.

18. Die Evolution einer krummen Linie iſt zuerſt von Huygens eingeführt worden. In der Schrift, Horologium oſcillatorium, hat er ſie ſynthetiſch, nach der Methode der Alten, behandelt. Die Analyſis des Unendlichen war 1673. als die Schrift herauskam, noch nicht im Gebrauche, nur Newtons Eigenthum. Tſchirnhauſens Bemerkung über die Evolution einer Epicykloide in einem einzelnen Falle iſt in (12.) angeführt. Jakob Bernoulli fand, daß die logarithmiſche Spirallinie mit dem (17.) angegebenen beſtändigen Winkel zur Evolute ſich ſelbſt hat. Acta Erud. 1692. Hernach zeigte G. W. Kraft in den ältern Commentarien der Petersburger Akademie, T. II. a. a. 1727, daß nur die Cykloide, die Epicykloiden, und die Spiralen durch Abwickelung ſich ſelbſt oder ähnliche erzeugen. Euler hat dieſe Unterſuchung auch vorgenommen, und auf die Evoluten der Evoluten angewandt. Inveſtigatio curvarum, quae evolutae ſui ſimiles producunt, Comm. Acad. Petrop. vet. T. XII. Etwa dreyßig Jahre nachher hat er dieſe Unterſuchung noch allgemeiner angeſtellt, mit der in einem ſo langen Zeitraume gewonnenen Erweiterung der Analyſis. Inveſtigatio curvarum, quae ſimiles ſunt ſuis evolutis, vel primis, vel ſecundis, vel tertiis, vel ordinis cujuscunque. Nova Acta Petrop. T. I. a. a. 1783. Ein Auszug aus der ältern Euleriſchen Abhandlung in Käſtners Analyſis d. Unendl. §. 578 — 590.

Evolution, analytiſche, iſt entweder daſſelbe mit Ausziehung einer Wurzel aus einer zwey- oder mehrtheiligen Größe, oder allgemeiner, die Umwandlung irgend einer analytiſchen Zuſammenſetzung in ein Aggregat von Gliedern, es ſey von einer endlichen Anzahl oder einer unendlichen, z. B. eines Products, eines Quotienten, der Wurzel einer Gleichung, der Größe, nach welcher eine Reihe geordnet iſt, wohin auch der zuerſt angeführte Fall gehört. Das entgegengeſetzte der Evolution iſt Involution.

Exhauſtions-Methode iſt ein Verfahren, Größen, welche ſich durch ihre vollſtändigen Theile nicht

vergleichen laſſen, vermittelſt anderer Größen zu vergleichen, welche jene zwar nicht vollkommen erſchöpfen, aber doch ihnen als Gränzen unbeſtimmt nahe gebracht werden können.

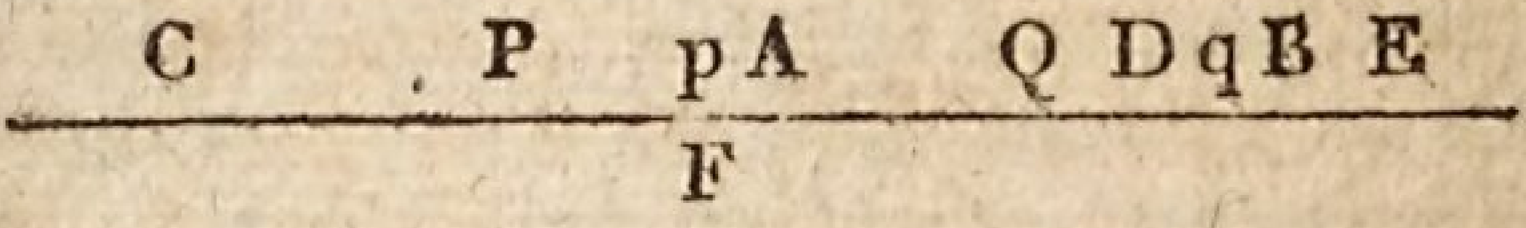
Die alten Geometer bedienten ſich deſſelben bey Vergleichung krummlinichter Figuren, krummer Oberflächen und runder Körper. Es machte ihre Analyſis des Unendlichen aus, welche näher zu kennen es ſich verlohnt, ſowohl um ſie mit der unſrigen, ſo viel weiter greifenden, zu vergleichen, als auch um zu ſehen, wie künſtlich ſie ein ſehr einfaches Werkzeug zu gebrauchen gewußt haben. Sie betrachteten eine krumme Linie nicht als ein Polygon von unendlich vielen Seiten; ſie zerlegten Figuren, Körper und Oberflächen, nicht in unendlich viele, unendlich kleine Theile, ſondern das Krumme unterſchieden ſie ſorgfältig von dem Geradlinichten, und verglichen nur Theile, die oſtenſibel ſind, oder eine endliche, vergleichbare Größe haben. Sie betrachteten aber die krummlinichten Figuren als Gränzen von geradlinichten, und zeigten, daß das Verhältniß derſelben zu einer ebenen weder größer noch kleiner ſeyn könne, als ein gewiſſes beſtimmtes, und ſo auch an Körpern und Oberflächen. Es war bey ihnen ein Grundſatz, daß jede Größe ſo oft genommen werden kann, bis ſie jede Größe ihrer Art übertrifft; ſie würden aber den Satz, daß eine unendlich kleine Größe, unendlich oft genommen, etwas endliches giebt, ſchwerlich ſich haben gefallen laſſen.

Ein Satz, der zu den Beweiſen in der Geometrie des Krummen von den Alten gebraucht wird, iſt folgender: Sind zwey ungleiche Größen, A, a, gegeben, und man nimmt von der größern A mehr als die Hälfte weg, von dem Reſte wieder mehr als die Hälfte, und ſo immer fort, ſo kommt man irgend einmahl auf einen Reſt, der kleiner iſt, als die gegebene kleinere Größe a. Euklides Elemente, X, 1. Die Alten ſagten nicht, die Theile einer Größe können unendlich klein genommen oder gedacht werden.

Die Exhauſtions-Methode, welche, wie geſagt, die Analyſis des Unendlichen der Alten ausmacht, iſt von viererley Art. Die erſte lernt man aus dem zwölften Buche

der Euklidiſchen Elemente, die andern aus den Schriften des Archimedes kennen.

I. Die erſte Methode hat folgenden Gang. Die nicht erſchöpfenden Theile zweyer Größen, welche dieſen aber unbeſtimmt nahe kommen können, verhalten ſich beſtändig wie zwey gegebene, $a:b$, ſo verhalten ſich auch die Gränzen wie $a:b$.



Es ſtellen die Linien CA, CB die beiden zu vergleichenden Größen vor, dieſe mögen nun Linien, Flächen oder Körper ſeyn, als allgemeine Zeichen, wie die Buchſtaben bey den Neuern. Die Theile CP, CQ beider Größen ſind auf eine gewiſſe Art der Form nach beſtimmt, es ſey nun, daß ſie einerley Form oder verſchiedene haben; ſie haben dadurch, als zuſammengehörige Größen, ein gegebenes Verhältniß, $a:b$, bey veränderlicher Größe, und können ihren Gränzen, CA, CB, ſo nahe kommen, daß der Unterſchied kleiner iſt als irgend eine gegebene Größe. Verhalten ſich nun CA und CB nicht wie $a:b$, ſo ſey $a:b = CA:Z$, wo Z entweder kleiner oder größer als CB iſt. Es ſey zuerſt Z kleiner als CB, und werde durch CD angedeutet. Man nehme von CB den Theil Cq, der die gegebene Form hat, und größer als CD ſey, welches der Vorausſetzung nach möglich iſt, und von CA den Theil Cp, ebenfalls von der gegebenen Form, und mit Cq zuſammengehörig, ſo iſt $Cp:Cq = a:b$. Da $CA:CD = a:b$ ſo iſt auch $Cp:Cq = CA:CD$. Nun iſt $Cp < CA$ iſt, alſo muß $Cq < CD$ ſeyn. Dieſes widerſpricht dem Vorigen, daß $Cq > CD$ ſey. Alſo iſt Z nicht kleiner als CB. — Eben ſo wird bewieſen, daß nicht ſeyn kann $b:a = CB:Y$, wenn Y kleiner als CA iſt.

Zweytens ſey Z größer als CB, und werde durch CE bezeichnet, ſo daß $a:b = CA:CE$, oder $b:a = CE:CA$ ſey. Man mache $CE:CA = CB:CF$, ſo iſt, da $CE > CB$ ſeyn ſoll, auch $CA > CF$. Nun iſt ange-

nommen b:a = CE:CA, alſo iſt b:a = CB:CF, wo CF kleiner als CA iſt. Dieſes iſt nach dem erſten Falle unmöglich. Alſo iſt nicht a:b = CA:CE, wo CE größer als B iſt.

Da nun das Verhältniß der durch CA, CB bezeichneten Größen weder größer noch kleiner ſeyn kann als das gegebene, ſo iſt es dieſem gleich.

Das zwölfte Buch der Euklidiſchen Elemente enthält größtentheils Anwendungen dieſer Methode. Im 2ten Satze wird erwieſen, daß Kreisflächen ſich wie die Quadrate ihrer Durchmeſſer verhalten. Hier ſind CA, CB die Kreisflächen, CP, CQ oder Cp, Cq, eingeſchriebene gleichnamige ordentliche Polygone. Die Form iſt hier, daß es gleichſeitige Figuren von gleicher Anzahl der Seiten ſind. Dieſe verhalten ſich wie die Quadrate der Durchmeſſer ihrer zugehörigen Kreiſe, und können denſelben ſo nahe kommen, daß der Unterſchied kleiner wird als irgend eine anzugebende Größe. Pappus leitet hieraus den Satz her, daß die Umfänge der Kreiſe ſich wie ihre Durchmeſſer verhalten, und bemerkt, daß dieſes auch daraus fließet, daß die Umfänge ähnlicher gleichſeitiger Vielecke ſich wie die Durchmeſſer der zugehörigen Kreiſe verhalten. Collect. mathem. IV. 11.

Der 5te Satz iſt, daß dreyſeitige Pyramiden von gleicher Höhe ſich wie ihre Grundflächen verhalten. Die Vorbereitung dazu gehört zu den künſtlichſten in der Elementar-Geometrie. Euklides ſchneidet von den beiden Pyramiden Stücke ab, die ſich wie die Grundflächen verhalten, und in jeder zwey Pyramiden übrig laſſen, die kleiner als irgend eine gegebene Größe ſind. Die beiden gegebenen Pyramiden ſind hier die durch CA, CB bezeichneten Größen, die Summen der folgeweiſe abgeſchnittenen Stücke, welche alle einzeln ſich wie die Grundflächen der Pyramiden verhalten, daher die Summen auch daſſelbe Verhältniß haben, ſind CP, CQ, oder Cp, Cq.

Der 10te Satz iſt: Jeder Kegel iſt der dritte Theil eines Cylinders, welcher mit ihm gleiche Höhe und dieſelbe Grundfläche hat. Hier ſind Kegel und Cylinder die beiden

zu vergleichenden Größen; die annähernden ſind eine Pyramide und ein Prisma über gleichnamigen ordentlichen Polygonen der Grundfläche jener Körper, mit derſelben Höhe. Dieſe haben das Verhältniß 1 : 3, daher Kegel und Cylinder daſſelbe haben.

Der 11te Satz iſt: Kegel und Cylinder von gleicher Höhe verhalten ſich wie ihre Grundflächen. Es verhalten ſich nämlich die Pyramiden über den ähnlichen ordentlichen eingeſchriebenen Polygonen wie dieſe Polygone, das iſt, wie die Kreisflächen, alſo ihre Gränzen, die Kegel, eben ſo; und auch die Dreyfachen der Kegel oder die Cylinder.

Der 12te Satz iſt: Ähnliche Kegel und Cylinder ſind in dreyfachem Verhältniſſe der Durchmeſſer ihrer Grundflächen. Hier wird gezeigt, daß die Pyramiden über den ähnlichen Polygonen der Grundflächen bey derſelben Höhe mit den Kegeln das dreyfache Verhältniß der Durchmeſſer haben. Daß ſie den Kegeln näher als um jeden gegebenen Unterſchied kommen können, iſt vorher ſchon gewieſen. Die Kegel, die Euklides betrachtet, ſind ſenkrechte.

Der 18te Satz iſt: Kugeln ſind in dem dreyfachen Verhältniß ihrer Durchmeſſer. Nämlich ähnliche in den Kugeln beſchriebene Polyedra verhalten ſich wie die Würfel ihrer Durchmeſſer (in dem dreyfachen Verhältniſſe derſelben), und können ihnen näher als um jede gegebene Größe kommen.

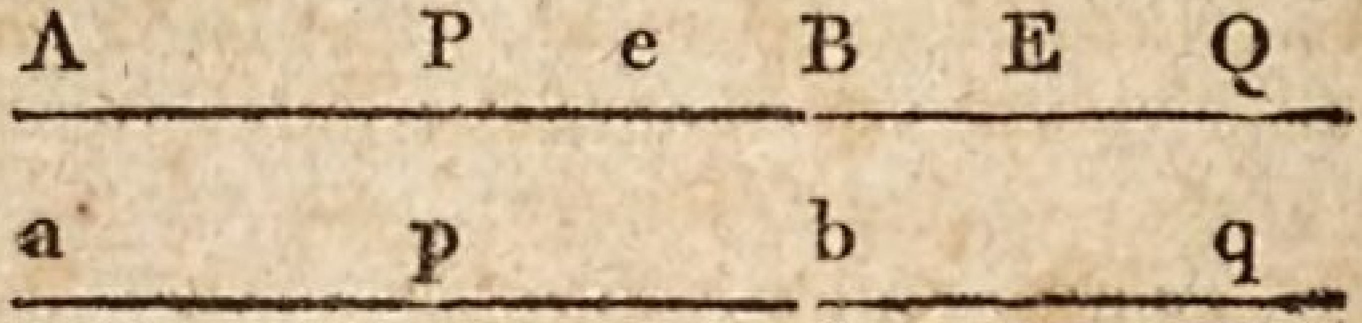
Archimedes beweiſet auf dieſe Art (von Konoiden und Sphäroiden, Satz 5.) den Satz, daß die Fläche einer Ellipſe ſich zu dem Kreiſe über ihrer großen Axe verhält wie die kleine Axe zu der großen. Es ſey AB (Tab. X. Fig. 22.) die große Axe, CD die halbe kleine, ADB die Hälfte der Ellipſe, AEB ein Halbkreis über AB. In dem Kreiſe werde ein gleichſeitiges Vieleck (deſſen Seitenzahl ein Vielfaches der Vier ſey) beſchrieben, und von den Winkelpuncten e werden mit EC parallelen gezogen, welche die Ellipſe in den Puncten d treffen. Durch die ſucceſſiven Puncte d nebſt D werden Chorden gelegt, ſo entſtehen in der Ellipſe Vierecke, wie CDdc, cddc, und in dem Kreiſe eben ſolche. Es iſt CE : CD = ce : cd

(Ellipſe, 1.), und daher verhalten ſich die Vierecke über derſelben Grundlinie in beiden Figuren wie CE:CD. Sie zerfallen nämlich jedes in zwey Dreyecke, von welchen die auf gleiche Art liegenden dieſes Verhältniß haben. Daſſelbe Verhältniß haben auch die beiden Paare von Dreyecken bey A und B. Die Polygone in beiden Figuren verhalten ſich alſo auch wie CE:CD. Da dieſes Verhältniß beſtändig bleibt, wie groß auch die Anzahl der Vierecke oder der Chorden genommen wird, und da die Polygone immer weniger von dem Kreiſe und der Ellipſe verſchieden werden, ſo muß jenes Verhältniß auch für ihre Gränzen, den Kreis und die Ellipſe, gelten. Archimedes beweiſet aber dieſes noch auf folgende, beſondere Art.

Man nehme einen Kreis Z, deſſen Halbmeſſer z die mittlere proportionale zwiſchen den beiden AC, CD (a und b) iſt; den Kreis über AB nenne man A, die Ellipſe E. Es iſt nun A:Z = aa:zz = a:b (ſ. Proportion). Iſt Z der Ellipſe nicht gleich, ſo ſey zuerſt Z größer als E. In dem Kreiſe Z beſchreibe man ein gleichſeitiges Vieleck, ſo daß dieſes von Z weniger unterſchieden ſey als E es iſt. Dadurch wird das Polygon in Z größer als E geſetzt. Da das Polygon in A zu dem in E ſich wie a:b verhält, eben ſo wie jenes zu dem in Z, ſo iſt das Polygon in E dem in Z gleich. Es müßte alſo das Polygon in E größer als die Ellipſe ſelbſt ſeyn. Folglich iſt Z nicht größer als E. — Es ſey nun die Ellipſe größer als der Kreis Z. In der Ellipſe werde ein Vieleck beſchrieben, das von jener weniger unterſchieden ſey als der Kreis Z von der Ellipſe E. (Dieſes iſt möglich, weil das Dreyeck in einem Abſchnitte größer iſt als die Hälfte deſſelben). So iſt das Vieleck in E größer als der Kreis Z. Nun iſt vorher erwieſen, daß das Vieleck in Z dem in E gleich iſt, alſo wäre jenes Vieleck größer als der Kreis. — Demnach iſt die Ellipſe ſo groß als der Kreis, und verhält ſich zu dem Kreiſe über der großen Axe, wie die kleine Axe zur großen.

II. Eine beſtimmte Größe A liegt zwiſchen zwey andern unbeſtimmten, aber der Form nach gegebenen Größen,

ſo daß ihr Unterſchied von dieſen beliebig klein gemacht werden kann. Eine andere gleichfalls beſtimmte Größe B liegt zwiſchen denſelben oder noch weniger verſchiedenen Größen, (indem die größere kleiner als die größere jener, und die kleinere größer als die kleinere jener iſt), ſo ſind A und B gleich groß.



In der allgemeinen Abbildung bedeuten AB, ab zwey beſtimmte Größen von verſchiedener Form, AP, AQ zwey unbeſtimmte, zwiſchen welchen AB liegt, ſo daß das Verhältniß AP : AQ dem von 1 : 1 näher kommen möge, als irgend ein Verhältniß einer kleinern zu einer größern Größe. Eben ſo falle ab zwiſchen zwey Größen ap, aq, deren Verhältniß dem von 1 : 1 näher kommen könne, als irgend ein Verhältniß zweyer auf ähnliche Art ungleichen Größen, und ap ſey entweder gleich AP oder größer, ſo wie aq gleich AQ oder kleiner. Bey dieſen Annahmen müſſen die in der Form verſchiedenen, AB, ab, gleich groß ſeyn.

Man mag dieſes gleich daraus ſchließen, daß ſonſt die Verhältniſſe AP : AQ und ap : aq dem von 1 : 1 nicht unbedingt nahe genommen werden könnten. Wäre ab größer oder kleiner als AB, wie es die AE oder Ae ſind, ſo wäre entweder das Verhältniß AB : AE oder das Ae : AB, die Gränze für AP : AQ.

Die Beweisart des Archimedes im Allgemeinen iſt folgende.

Man ſetze erſtlich ab ſey größer als AB, oder gleich AE. Da das Verhältniß AQ : AP dem 1 : 1 ſich unbedingt nähern kann, ſo kann daſſelbe kleiner als das, AE : AB, genommen werden *). Da ferner aq ſo groß oder kleiner

*) Ein Verhältniß a : b iſt kleiner als ein anderes, c : d, wenn der Quotient der Diviſion von a durch b kleiner iſt als der von c durch d; es iſt größer in dem entgegengeſetzten Falle.

als AQ iſt, und ab = AE, ſo iſt das Verhältniß aq : AP kleiner als das, ab : AB. Dieſes iſt nicht möglich, da aq größer als ab, und AP kleiner als AB iſt.

Man ſetze zweytens ab ſey kleiner als AB, oder gleich Ae. Man nehme nun das Verhältniß AQ : AP kleiner als AB : Ae, ſo iſt, weil ap ſo groß oder größer als AP iſt, das Verhältniß AQ : ap kleiner als AB : ab. Dieſes iſt nicht möglich, weil AQ größer als AB, und ap kleiner als ab iſt.

Demnach muß ab = AB ſeyn.

1. Ein Beyſpiel giebt die bekannte von Archimedes gemachte Vergleichung der Kreisfläche mit einem Dreyeck, deſſen Grundlinie den Umfang des Kreiſes, und die Höhe der Halbmeſſer deſſelben iſt. Der Kreis iſt die durch AB bezeichnete Größe, das Dreyeck die ab; die AP iſt ein eingeſchriebenes ordentliches Vieleck, die AQ ein ähnliches umgeſchriebenes; die Größen, ap, aq, ſind einerley mit dieſen.

2. Archimedes erweiſet in dem erſten Buche von Kugel und Cylinder, 13ten Satze, daß eines ſenkrechten Cylinders Oberfläche einem Kreiſe gleich iſt, der zum Halbmeſſer die mittlere proportionale zwiſchen der Seite des Cylinders und dem Durchmeſſer ſeiner Grundfläche hat. Die Oberfläche des Cylinders fällt zwiſchen die Oberflächen zweyer Prismen, deren eines mit ſeinen Seitenflächen den Cylinder berührt, das andere ſeine Seitenlinien in der cylindriſchen Fläche liegen hat. Die Oberflächen der Prismen ſind dem Rechteck von dem Umfange der Grundfläche und der Höhe des Prisma gleich. Die Grundflächen der beiden Prismen, wenn ſie ähnliche gleichſeitige Vielecke ſind, können ſich näher als um jeden angebbaren Unterſchied kommen, alſo auch die darauf errichteten Prismen. Was von ihnen gilt, gilt auch von ihrer Gränze. Archimedes ſchließt aber nicht aus einem allgemeinen Grundſatze, ſondern gebraucht Vergleichungen, die jedem Falle beſonders angemeſſen ſind. Die Grundfläche des Cylinders heiße A, der Kreis, deſſen Halbmeſſer die angegebene mittlere proportionale iſt, heiße B. Um

und in den Kreis A ſeyn gleichſeitige ähnliche Vielecke gezeichnet, auf welchen Prismen, ſo hoch als der Cylinder, errichtet werden. Die Oberflächen dieſer Prismen (ohne die Grundflächen) werden in Dreyecke verwandelt. Dieſe mögen, D, d, heißen. Um und in den Kreis B werden Vielecke, jenen Vielecken ähnliche, gezeichnet. Das äußere iſt dem Dreyeck D gleich, das innere kleiner als das Dreyeck d. Hier ſind die cylindriſche runde Oberfläche und der Kreis B die in der allgemeinen Darſtellung der Methode durch die Linien AB, ab bezeichneten Größen; die beiden Dreyecke ſind die Linien AP, AQ; die beiden zu dem Kreiſe B gehörigen Vielecke ſind durch ap, aq vorgeſtellt, von welchen die ap der AP immer gleich, aber aq kleiner als AQ iſt. Nun zeigt Archimedes nach der angegebenen Methode, daß der Kreis B weder kleiner noch größer ſeyn kann, als die cylindriſche runde Oberfläche, alſo derſelben gleich iſt.

3. Auf gleiche Art erweiſet Archimedes (Satz 15.), daß die krumme Oberfläche eines gleichſeitigen Kegels einem Kreiſe gleich iſt, der zum Halbmeſſer die mittlere proportionale zwiſchen der Seite des Kegels und dem Halbmeſſer des Grundkreiſes hat.

Einen andern Beweis dieſes Satzes, nach derſelben Methode, giebt Maclaurin, treatiſe of fluxions, pag. 11.

4. Die Oberfläche einer Kugel iſt das Vierfache des größten Kreiſes derſelben. Archimedes a. a. O. Satz 31. Der Vorbereitungs- und Hülfsſätze zu dem Erweiſe ſind viele, die aber ſehr verdienen ſtudirt zu werden. In einem Kreiſe werde ein gleichſeitiges Vieleck beſchrieben, wovon die Anzahl der Seiten ein vierfaches der Vier iſt; um den Kreis ein ähnliches, deſſen Seiten mit denen jenes parallel ſind. Den Kreis und die beiden Vielecke laſſe man ſich um einen Durchmeſſer drehen, ſo beſchreibt der Kreis eine Kugel, und die beiden Vielecke beſchreiben Polyedra, deren Oberfläche theils aus Kegelflächen, theils aus Kegelzonen beſtehen. Zwiſchen beiden liegt die Oberfläche der Kugel. Das Verhältniß der Oberflächen von den beiden Polyedren iſt das duplicirte

der Seiten in den beiden Vielecken, und kann dem Verhältniſſe der Gleichheit näher als jedes gegebene gebracht werden. Ferner iſt die Oberfläche des innern Polyedrum kleiner als das Vierfache des größten Kreiſes der Kugel, die des äußern Polyedrum größer als dieſes Vierfache. Demnach ſind die Oberfläche der Kugel und das Vierfache ihres größten Kreiſes zwiſchen denſelben Größen enthalten, wie in dem allgemeinen Schema die AB, ab zwiſchen AP und AQ, welchen hier ap und aq gleich ſind. Die Oberfläche der Kugel iſt alſo gleich dem Vierfachen ihres größten Kreiſes. Archimedes zeigt beſonders, daß jene nicht größer noch kleiner ſeyn könne als dieſes.

5. Eine Kugel iſt das Vierfache eines Kegels, deſſen Grundfläche dem größten Kreiſe der Kugel, und deſſen Höhe ihrem Halbmeſſer gleich iſt. Archimedes a. a. O. Satz 32. Es werden wieder zwey ſolche Polyedra in und um die Kugel conſtruirt, wie in (4.). Zwiſchen beiden liegt die Kugel. Das Verhältniß beider Körper iſt das triplicirte der Seiten in den beiden Vielecken, durch deren Umdrehung die Polyedra erzeugt werden, und kann dem Verhältniſſe der Gleichheit näher als jedes gegebene gebracht werden. Ferner iſt das innere Polyedrum kleiner als das Vierfache eines Kegels, deſſen Grundfläche dem größten Kreiſe der Kugel, und deſſen Höhe dem Halbmeſſer der Kugel gleich iſt, das äußere aber größer als dieſes Vierfache. Daraus folgt nun wie bey (4.), daß die Kugel dem Vierfachen dieſes Kegels gleich iſt.

Pappus giebt einen andern Beweis des Satzes von der Vergleichung der Kugel mit einem Kegel, Collect. mathem. V. 35.

6. Die Oberfläche eines Kugelſchnittes, der kleiner iſt als die Halbkugel, iſt einem Kreiſe gleich, der zum Halbmeſſer die vom Scheitel des Abſchnittes an den Umfang des Grundkreiſes gezogene gerade Linie hat. Archimedes a. a. O. S. 40. Dieſe Oberfläche fällt zwiſchen die Oberflächen der Abſchnitte zweyer ſolcher Polyedren, als vorher conſtruirt ſind, über dem Grundkreiſe. Das Verhältniß dieſer Oberflächen kann dem der Gleichheit näher kommen

als jedes gegebene zweyer ungleichen Größen. Ferner iſt die innere polyedriſche Oberfläche kleiner als der angegebene Kreis, die äußere aber größer. Daher ergiebt ſich der Satz. Von der Oberfläche eines Abſchnitts, der größer iſt als die Kugel, wird das nämliche erwieſen, als Folgerung, da die Oberflächen des größern und kleinern Abſchnitts zuſammen die ganze Oberfläche der Kugel ausmachen.

7. Ein Kugelausſchnitt iſt einem Kegel gleich, deſſen Grundfläche der Oberfläche des Kugelabſchnitts, und deſſen Höhe dem Halbmeſſer der Kugel gleich iſt. Archimedes a. a. O. S. 42. Der Kugelausſchnitt fällt zwiſchen zwey polyedriſche, deren Verhältniß dem der Gleichheit unbedingt nahe kommen kann. Der innere dieſer beiden Ausſchnitte iſt kleiner als der angegebene Kegel, der äußere iſt größer. So findet hier die Anwendung des Grundſatzes Statt.

Der Weg, den Archimedes bey den Beweiſen dieſer Sätze genommen hat, iſt lang, und für ungeduldige Leſer nicht gemacht. Der große Scharfſinn aber, den er bey der Anwendung geringer Hülfsmittel bewieſen hat, iſt zur Übung des mathematiſchen Geiſtes vortrefflich. Jüngern Mathematikern ſind ſeine Schriften überhaupt ſehr zu empfehlen. Zu dem erſten Buche von Kugel und Cylinder (und Kegel) wird das hier beygebrachte eine brauchbare Einleitung ſeyn. Hauber hat eine ſehr gute Ueberſetzung der beiden über Kugel und Cylinder mit einigen Zuſätzen geliefert. Tübingen 1798.

III. Archimedes bedient ſich zu einigen feinen Unterſuchungen in der höhern Geometrie noch eines Verfahrens, welches ganz beſonders den Namen, Exhauſtions-Methode, verdient, und ſich unſerer Analyſis des Unendlichen nähert. Es iſt im Allgemeinen folgendes. Eine Größe Q werde in mehrere Theile getheilt, deren Menge größer, und deren Quantität kleiner als nach irgend einer Angabe gemacht werden kann. Es ſey $Q = a + b + c + d + e +$ etc. Die Theile werden nach einem gewiſſen Geſetze auf doppelte Weiſe verändert, ſo daß aus Q zwey neue Größen entſtehen,

$$Q + q = (a + \alpha) + (b + \beta) + (c + \gamma) + (d + \delta) + \text{etc.}$$

$$Q - q = (a - \mathfrak{a}) + (b - \mathfrak{b}) + (c - \mathfrak{c}) + (d - \mathfrak{d}) + \text{etc.}$$

Man könne nun die Größen $Q + q$ und $Q - q$ jede mit einer andern vergleichen, ſo daß die Werthe derſelben einen gemeinſchaftlichen Theil haben, dem ſie deſto näher kommen, je mehr der Theile a, b, c, etc. genommen werden. Dieſer Theil iſt der Werth von Q, da Q die gemeinſchaftliche Gränze beider Reihen iſt, an welcher ſie ſich entgegen kommen.

Das leichteſte Beyſpiel dieſer Methode giebt der paraboliſche Kegel, nach Archimedes von Konoiden und Sphäroiden, Satz 23. Es ſey (Fig. 23.) BAC, eine Parabel, deren Axe AD iſt, auf welche die Chorde BC ſenkrecht gezogen iſt. Man laſſe die Figur ſich um die Axe AD ganz herumdrehen, ſo beſchreibt ſie einen paraboliſchen Kegel. Dieſer ſoll mit dem Cylinder, der über der Grundfläche mit dem Durchmeſſer BC die Höhe AD hat, verglichen werden. — Man theile AD in irgend eine Anzahl gleicher Theile, und ziehe durch die Theilungspuncte parallele Chorden mit BC. Durch die Puncte, wo dieſe die Parabel treffen, ziehe man Parallelen mit AD bis an die beiden nächſten Chorden und ihre Verlängerungen. Die Rechtecke und das paraboliſche Segment beſchreiben bey der Umdrehung der Figur jene Cylinder, dieſe paraboliſche Kegelſegmente. Der Unterſchied aller äußern Cylinder, wie LMNO, von allen innern, wie PQRS, iſt der unterſte äußere Cylinder BEFC. Dieſer kann kleiner gemacht werden als jeder angegebene Raum. Da die Quadrate der Chorden, wie QR, ſich wie die dazu gehörigen Abſciſſen der Axe, AT, verhalten, ſo verhalten ſich die cylindriſchen Segmente des umgeſchriebenen und eingeſchriebenen Körpers wie die zugehörigen Abſciſſen, bey dem äußern bis zu der untern Baſis, bey den innern bis zu der obern genommen. Sie machen daher, jede Folge für ſich, eine arithmetiſche Reihe aus, deren Glieder ſich wie die Zahlen, 1, 2, 3, 4, etc. verhalten. Beide Reihen enthalten dieſelben Glieder, nur daß die Reihe der äußern Cylinder

ein Glied mehr hat als die Reihe der innern. Nun iſt in einer arithmetiſchen Reihe die Summe aller Glieder größer als die halbe Summe von eben ſo vielen, dem größten von ihnen gleichen, hingegen iſt die Summe aller Glieder ohne das größte kleiner als eben dieſe halbe Summe (Archim. 1. S.), das iſt, die Summe der äußern Cylinder iſt größer als der halbe Cylinder über der mit DC beſchriebenen Grundfläche bey der Höhe AD, ſo wie die Summe der innern Cylinder kleiner iſt als die Hälfte dieſes Cylinders. Beide Summen ſind um den unterſten Cylinder BCFE unterſchieden, der durch fortgeſetzte Halbtheilungen von AD kleiner als jede gegebene Größe werden kann. Der paraboliſche Kegel liegt ebenfalls zwiſchen beiden Summen. Folglich iſt derſelbe der Hälfte des Cylinders, mit dem Halbmeſſer DC und der Höhe AD, gleich.

Archimedes gebraucht hier auch die Beweisart, wodurch gezeigt wird, daß der paraboliſche Kegel weder größer noch kleiner ſeyn könne als des gedachten Cylinders Hälfte, vergleicht aber die paraboliſchen Kegel mit einem geradlinichten, der dieſelbe Grundfläche und Höhe hat. Da er aber doch den Cylinder zur Vergleichung mit dem geradlinichten Kegel gebraucht, ſo wird es bequemer ſeyn, ſeine Beweisart zur Vergleichung mit dem Cylinder anzuwenden. Man bezeichne den paraboliſchen Kegel durch K, den Cylinder über BC bey der Höhe AD durch C, den umgeſchriebenen Körper durch U, den eingeſchriebenen durch E. Wenn K nicht iſt $=\frac{1}{2}C$, ſo ſey erſtlich K größer, und der Unterſchied $=u$, ſo daß $K-\frac{1}{2}C=u$. Man nehme der Theile auf AD ſo viele, daß der unterſte Cylinder BF kleiner werde als u, oder daß $U-E<u$ ſey. So iſt $U-E<K-\frac{1}{2}C$. Da $U>K$ iſt, ſo iſt $E>\frac{1}{2}C$. Vorher aber iſt erwieſen, daß $E<\frac{1}{2}C$ iſt, alſo kann der paraboliſche Kegel nicht größer ſeyn als die Hälfte des Cylinders. — Zweytens mag er nun kleiner ſeyn, und der Unterſchied ſey u, ſo daß $\frac{1}{2}C-K=u$. Wiederum ſey $U-E<u$, ſo iſt $U-E<\frac{1}{2}C-K$. Da $E<K$, ſo iſt $U<\frac{1}{2}C$. Es iſt aber vorher erwieſen, daß $U>\frac{1}{2}C$ iſt, folglich kann der paraboliſche Kegel auch nicht kleiner

ſeyn als die Hälfte des Cylinders. Es iſt alſo der Abſchnitt des paraboliſchen Kegels BAC halb ſo groß als der Cylinder über derſelben Grundfläche bey derſelben Höhe.

Der geradlinichte Kegel mit denſelben Beſtimmungen iſt der dritte Theil des Cylinders, und verhält ſich daher zu dem paraboliſchen wie $\frac{1}{3}$ zu $\frac{1}{2}$ oder wie 2 : 3. Zu vergleichen der Artikel, Cubirung, Th. I. S. 580.

Auf eine ähnliche Art vergleicht Archimedes den Abſchnitt eines hyperboliſchen Kegels und eines Sphäroids mit einem geradlinichten Kegel über einerley Grundfläche bey gleicher Höhe. Die Berechnung aber iſt hier ſchwerer, weil die cylindriſchen Segmente des eingeſchriebenen und umgeſchriebenen Körpers die Summe oder der Unterſchied zweyer Theile ſind, von welchen der eine ein Glied aus einer arithmetiſchen Reihe, der andere ein Glied aus einer Reihe von Quadraten iſt. In der Abhandlung von den Spirallinien, Satz 10. findet Archimedes, daß

$$3(aa + 4aa + 9aa \ldots + n^2a^2) = n^3a^2 + n^2a^2 + a(a + 2a + 3a \ldots + na)$$

iſt, (vergl. arithmet. Reihen höh. Ordn. 14.), und giebt in der Abhandlung von den Konoiden, 3. Satz, die Größen an, zwiſchen welchen die Summe einer arithmetiſchen Reihe und der Reihe von Quadraten mit gleichförmig abnehmenden Wurzeln liegt. Nämlich wenn $(ab + 2ab + 3ab \ldots + nab) + (b^2 + 4b^2 + 9b^2 \ldots + n^2b^2) = S$ iſt, ſo hat das nfache von den beiden größten Gliedern dieſer beiden Reihen, oder $n(nab + n^2b^2)$, zu der Summe S ein kleineres Verhältniß als $a + nb : \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}nb$; aber zu der um das letzte Glied jeder der beiden Reihen verminderten Summe, $S - nab - n^2b^2$, ein größeres Verhältniß als das angegebene. Archimedes druckt den Satz ganz in Worten aus, und führt den Beweis an einer Zeichnung, die durch einen Fall ſich auf alle mögliche Fälle anwenden läßt.

Für die Hyperbel iſt das Quadrat der Ordinate, $yy = \frac{bb}{aa}(2ax + xx)$, wo die Abſciſſen x von dem näch-

ſten Scheitel an genommen werden, für die Ellipſe iſt $yy = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$. Man wird leicht einſehen, wie Archimedes das jetzt eben angezeigte Gränzverhältniß bey dem hyperboliſchen Konoid gebraucht hat. Für die Ellipſe iſt eine Abänderung eines Vorzeichens nöthig. Die Größen a, b bedeuten in den Gleichungen für die beiden krummen Linien nicht daſſelbe, was in den beiden vorher aufgeſtellten Reihen.

Man vergleiche mit dieſer Methode den Inhalt eines Körpers zu finden, die Auflöſung, welche die Integralrechnung giebt, Artikel, Cubirung. Dieſe iſt freylich viel kürzer, aber jene läßt die Zuſammenſetzung des Körpers und die Vergleichung mit einem einfachern deutlicher einſehen. Die Methode der Neuern iſt in einiger Abſicht, was eine Maſchine bey Fabrikarbeiten. Sie dient die Arbeit zu fördern, ohne daß man nöthig hat immer auf ihre Wirkungsart zu achten. Doch muß man auch wiſſen, wie weit man ohne Maſchine zu kommen vermöge.

Das Verfahren, wodurch Archimedes den von ſeiner Schneckenlinie nach jedem Umlaufe des Halbmeſſers beſchriebenen Flächenraum mit dem Kreiſe vergleicht, iſt ein ganz ähnliches. In dem Artikel, Spirale, wird davon etwas angeführt werden.

Die Fläche der Parabel zwiſchen ihrem Bogen BAC und der Chorde BC konnte Archimedes auf dieſe Art nicht finden, weil die Rechtecke, die in die Parabel und um dieſelbe beſchrieben werden, dergleichen PQRS und LMNO ſind, ſich wie die Quadratwurzeln aus den zugehörigen Abſciſſen, AT, At, verhalten. Die Summe einer Anzahl von Wurzeln aus Zahlen, die in arithmetiſcher Fortſchreitung ſind, konnte er nicht angeben, das iſt, mit einer gegebenen Größe vergleichen. Zwar hätte er den Raum zwiſchen dem Bogen AC, einer mit AD parallelen durch C, und einer auf AD durch den Scheitel A ſenkrechten leicht mit dem Rechteck von AD und DC vergleichen können, weil er, wie ſchon bemerkt iſt, die Summe von Quadraten,

deren Wurzeln in arithmetiſcher Progreſſion ſind, zu beſtimmen wußte. Allein er gebraucht, vielleicht um ſeinen Scharfſinn zu zeigen, ein ſehr künſtliches Hülfsmittel, die Verbindung der Statik mit der Geometrie, in der Abhandlung von der Quadratur der Parabel.

Es ſey BAC (Fig. 24.) eine Parabel, deren Axe AD iſt, und BC darauf ſenkrecht. Dieſe BC werde in irgend eine Anzahl gleicher Theile, wie BE, EF, FG, etc. getheilt. Durch die Theilungspuncte werden auf BC ſenkrechte Linien, EM, FN, GO, etc. gezogen, welche die Parabel in M, N, O, etc. ſchneiden; auch wird auf dieſelbe noch BP ſenkrecht geſetzt. Aus C werden durch die Durchſchnittspuncte, M, N, O, etc. die geraden CM, CN, CO, etc. gezogen, welche die auf BC ſenkrechten in H, I, K, etc. nach ihrer Folge treffen. So entſtehen die Vierecke EH, FI, GK, etc. und für den letzten Theilungspunct Z das Dreyeck CZX, deſſen Seite CX die Parabel in C berührt, indem hier zwey Durchſchnittspuncte in einen Berührungspunct zuſammen fallen. Dieſe Vierecke nenne man die umgeſchriebenen. Die Durchſchnittspuncte m, n, o, etc. der CM und übrigen mit den Perpendikeln auf der Seite nach C hin geben die eingeſchriebenen Vierecke Em, Fn, Go, etc. wozu bey C das Dreyeck ZCY kommt. Nun beweiſet Archimedes, erſtlich, daß die Summe der umgeſchriebenen Vierecke nebſt dem Dreyecke ZCX größer iſt als der dritte Theil des Dreyecks BCP; zweytens, daß die Summe der eingeſchriebenen Vierecke, Em, Fn, etc. nebſt dem Dreyecke ZCY kleiner iſt als der dritte Theil eben des Dreyecks BPC. Dieſes wird durch Hülfe der Statik erwieſen. Man ſtelle ſich die Parabelfläche mit der Chorde BC an dem Arme eines Hebels, deſſen Ruhepunct in B iſt, aufgehängt vor, ſo daß der Scheitel A zu unterſt liege. An dem andern Arme des Hebels, in einer Entfernung von B, ſo groß als BC, werde eine ſchwere Fläche an einem mathematiſchen Faden ohne Schwere aufgehängt, und halte dem Dreyeck BPC das Gleichgewicht, ſo iſt dieſe Fläche der dritte Theil des Dreyecks. Nun wird gezeigt, daß das

umgeſchriebene Viereck BEMH größer iſt als die Fläche, welche in dem Abſtande BC auf der andern Seite des Ruhepunctes B dem Trapezium BPeE das Gleichgewicht hält; daß eben ſo die folgenden Vierecke EMNF, FNOG, etc. jedes größer ſind als die Fläche, die in dem gedachten Abſtande dem Trapezium EefF, FfgG, etc. wovon jene Vierecke nach ihrer Folge ein Theil ſind, das Gleichgewicht hält. Die Summe aller dieſer Vierecke nebſt dem Dreyeck ZCX iſt alſo größer als der dritte Theil des Dreyecks BPC. Hingegen iſt jedes der eingſchriebenen Vierecke wie Em, Fn, etc. kleiner als die Fläche, welche in dem Abſtande BC auf der andern Seite des Ruhepunctes dem Trapezium, wovon es ein Theil iſt, als EefF, FfgG, etc. das Gleichgewicht hält. Die Summe aller dieſer Vierecke, nebſt dem Dreyeck ZCY iſt daher kleiner als der dritte Theil des Dreyecks BPC. Nun zeigt Archimedes, daß die Parabelfläche weder größer noch kleiner ſeyn kann, als der dritte Theil eben dieſes Dreyecks. Beide ſind die gemeinſchaftliche Gränze für die umgeſchriebenen und eingeſchriebenen Vierecke. Daraus folgt endlich vermittelſt einer Eigenſchaft der Parabel, daß der paraboliſche Abſchnitt BAC ſich zu den geradlinichten Dreyeck BAC, das mit demſelben einerley Grundfläche und Höhe hat, wie 4 : 3 verhält. Der Satz wird von Archimedes auch für den Fall erwieſen, da die Grundlinie oder Chorde BC nicht ſenkrecht auf AD iſt. Das Dreyeck BAC iſt alsdann dasjenige, welches zwiſchen den Endpuncten der Chorde und dem Scheitelpuncte des zugehörigen Durchmeſſers liegt.

IV. Zwey Größen, A, B, ſind beide die Gränzen einer Reihe abnehmender Größen, $a + b + c \ldots + q +$ etc. ſo daß der Unterſchied derſelben und der Reihe kleiner als irgend eine Größe gemacht werden kann: es iſt $A = B$. Denn es ſey das Gegentheil möglich, und entweder $A > B$ oder $A < B$. Man nehme von der Reihe ſo viele Glieder, $a + b + c \ldots + q$, daß der Unterſchied der Summe derſelben von A kleiner ſey, als der Unterſchied zwiſchen A und B, ſo müßte eben dieſe Summe größer ſeyn als B, welches der Vorausſetzung widerſpricht. Nämlich,

wenn $a + b + c \ldots + q = S$; $A - B = u$, und $A - S < u$ iſt, ſo iſt $S > B$. Eben ſo, wenn $B - A = u$ iſt, nehme man $B - S < u$, ſo iſt $S > A$, auch wider die Vorausſetzung.

Archimedes gebraucht dieſe Beweisart bey einer andern Methode für die Quadratur der Parabel, als die gleich vorher beſchriebene iſt. Es iſt BAB (Fig. 25.) eine Parabel, in welcher AC die Axe oder ein anderer (der Axe paralleler) Durchmeſſer; und BB eine Chorde, die von AC in C halbirt wird. Es ſeyn die beiden AB von dem Scheitel A an B gezogen, und durch die Mitte D von BC die beiden DE parallel mit AC bis an die Parabel, welche die beiden AB in F ſchneiden. Das Dreyeck AEB iſt der achte Theil des Dreyecks BAB. Denn in der Parabel iſt $EF : FD = 1 : 2$, es mag AC die Axe oder ein anderer Durchmeſſer ſeyn. Beſchreibt man auf dieſelbe Art in jedem der entſtandenen vier Abſchnitte ein Dreyeck, ſo iſt ein ſolches der achte Theil des Dreyecks AEB. Fährt man mit derſelben Einſchreibung fort, ſo machen das Dreyeck BAB und die folgenden eingeſchriebenen zuſammengehörigen Dreyecke, (als die beiden AEB, dann die vier Drenecke in den Segmenten AE, EB, AE, EB. u. ff.) eine geometriſche Reihe mit dem Exponenten $\frac{1}{4}$ aus. Die Summe einer ſolchen Progreſſion mit dem dritten Theile des kleinſten Gliedes verhält ſich zu dem größten Gliede wie 4 : 3. Demnach iſt $\frac{4}{3} \triangle BAB$ die Gränze aller in dem paraboliſchen Abſchnitt eingeſchriebenen Drenecke; und der Abſchnitt ſelbſt iſt auch ihre Gränze, weil jedes in einem der Abſchnitte eingeſchriebene Dreyeck größer als die Hälfte deſſelben iſt. Folglich iſt der paraboliſche Abſchnitt $= \frac{4}{3} \triangle BAB$.

Die von Cavaleri gebrauchte Methode des Untheilbaren (ſ. Th. I. S. 415.) iſt zwar auf der einen Seite eine Erweiterung der Exhauſtions-Methode der Alten, aber dabey weniger befriedigend, wegen der darin zum Grunde gelegten Vorſtellungen. Die Abkürzung, daß die Gränze, welcher ſich zwey Reihen nähern, ſtatt dieſer unmittelbar geſetzt wird, ohne beſonders zu zeigen, daß der geſuchte Werth weder größer noch kleiner ſeyn kann, möchte erlaubt

ſeyn, wo ſie der Evidenz nicht nachtheilig iſt. Wallis erweiterte die Methode der Alten noch mehr dadurch, daß er die Summen oder Gränzen von manchen Reihen fand, welche den Alten noch nicht erreichbar geweſen waren. Unſere Integrations-Methode iſt aber nicht als eine höhere Art der Exhauſtion anzuſehen. Denn dieſe mit gehöriger Schärfe behandelt, iſt keine Summirung unendlich vieler, unendlich kleiner, Größen. In der Encyclopédie méthodique wird zwar geſagt, die Differentialrechnung ſey nichts anders als jene Methode der Alten, auf eine einfache und bequeme Analyſis gebracht; allein dieſes iſt eine zu flüchtige und verwirrende Vergleichung. Das zeigt die in dem gegenwärtigen Artikel vorgetragene Erörterung derſelben. Hutton ſagt in ſeinem Wörterbuche der Mathematik und Phyſik, daß auf der Methode der Exhauſtion die vom Cavaleri gebrauchte Methode des Untheilbaren beruhe, welche nur eine kürzere Art von Exhauſtion ſey, desgleichen die Arithmetik des Unendlichen von Wallis, welche wiederum eine Verbeſſerung der Methode des Untheilbaren ſey; und dann ferner die Methode der Incremente, Differentiale, Fluxionen und unendlichen Reihen. Die Vergleichung mit den Methoden von Cavaleri und Wallis iſt richtig; die neue Analyſis des Unendlichen iſt aber etwas ganz anders da, wo ſie nicht eine Summe, ſondern das für eine Function charakteriſtiſche Verhältniß der Veränderungen ſucht, und von dieſem auf die Function ſelbſt zurückgeht. Dieſes iſt eine ganz andere, viel höhere und ergiebigere Art die Relationen der Größen zu entdecken, als jene ältern Summirungen durch Gränzen der Reihen. Maclaurin hat in der Einleitung zu ſeinem Werke über die Fluxionen von der Exhauſtions-Methode der Alten einen ſehr lehrreichen und ausführlichen Unterricht gegeben.

Exponent iſt erſtlich die Zahl, welche den Grad einer Potenz anzeigt, und kann eine ganze, eine gebrochne, rationale oder irrationale, eine poſitive oder negative Zahl ſeyn, ſ. Potenz. Zweytens iſt es die Zahl, womit das Vorderglied eines Verhältniſſes zu multipliciren iſt, um

das Hinterglied deſſelben zu erhalten, oder es iſt das Hinterglied ſelbſt, wenn das Vorderglied die Einheit iſt, oder darauf gebracht wird. Einige verſtehen unter Exponent eines Verhältniſſes den Quotienten von der Diviſion des Vordergliedes durch das Hinterglied. So wäre der Exponent von 3:12 der Bruch $\frac{3}{12}$ oder $\frac{1}{4}$, da nach der erſtern Erklärung der Exponent 4 iſt. In der That iſt es willkührlich, ob man die eine oder die andere Beſtimmung wählt, weil die Glieder eines einzelnen Verhältniſſes verwechſelt werden können. Allein bey einer geometriſchen Progreſſion heißt der Exponent der Quotient von der Diviſion eines folgenden Gliedes durch das vorhergehende; und daher muß man dieſes auch bey einem einzelnen Verhältniſſe beybehalten.

Hutton ſagt, daß angeſehene Mathematiker die Logarithmen als Exponenten der Verhältniſſe anſehen. Ich finde nur, daß Halley die Logarithmen erklärt, als Numeri rationem exponentes, welches man wohl Statt finden laſſen kann, wiewohl doch Maaßen der Verhältniſſen deutlicher ſeyn möchte. Nämlich der Logarithme zeigt an, wie ein Verhältniß aus mehrern unter ſich gleichen Verhältniſſen, die ein Grundverhältniß ſind, zuſammengeſetzt wird. So iſt für das Verhältniß $a^m : b^m$ oder $(a:b)^m$, die Zahl m das Maaß, weil es aus m unter ſich gleichen Verhältniſſen a:b zuſammengeſetzt wird, wenn m eine ganze Zahl iſt. Für das Verhältniß $(a:b)^{\frac{m}{n}}$ iſt der Bruch $\frac{m}{n}$ das Maaß, welches anzeigt, daß man das aus m gleichen Verhältniſſen a:b zuſammengeſetzte in n gleiche zerlegen ſoll. Es iſt nöthig, zwey verſchiedene Begriffe mit zwey verſchiedenen Worten zu bezeichnen.

Exponent eines Gliedes in einer Reihe heißt auch die Stellenzahl deſſelben, z. B. in der Reihe der ungeraden Zahlen iſt 9 der Exponent des Gliedes 17. Allein man wird hier beſſer das Wort, Stellenzahl, oder Stellenzeiger, gebrauchen.

Exponential-Größe, oder Exponential-Formel, iſt eine Potenz, deren Exponent eine veränderliche Größe iſt, wie a^x, oder z^x. Die Wurzel der Potenz mag eine unveränderliche oder veränderliche Größe ſeyn. Eine ſolche, wie die hier angegebene, iſt eine Exponential-Größe vom erſten Grade. Iſt der Exponent wieder eine Exponentialgröße, ſo iſt die Größe eine ſolche vom zweyten Grade. So giebt es mehrere Grade dieſer Größen, als

I. a^x, II. a^{x^y}. III. $a^{x^{y^z}}$. u. ſ. f.

Nennt man $x^y = p$, ſo iſt der zweyte Ausdruck $= a^p$. Iſt $y^z = p$, und $x^p = q$, ſo iſt der dritte $= a^q$.

Eine beſondere Gattung iſt,

$$r^{r^{r^{r^{\alpha}}}}$$

welcher unterhalb mehrere r beygefügt werden mögen. Condorcet hat über die Eigenſchaften dieſer Form von Größen Unterſuchungen angeſtellt, die Euler fortgeſetzt hat, in einer Abhandlung, de formulis exponentialibus replicatis. Acta Acad. Petrop. T. I. a. a. 1777. Setzt man $r^\alpha = \beta$; $r^\beta = \gamma$; $r^\gamma = \delta$; $r^\delta = \varepsilon$, ſo iſt der obige Ausdruck $= \varepsilon$ oder r^δ. Dieſe Art Größen wächſt ungeheuer an, wenn für r nur eine mäßige Zahl genommen wird. Setzt man nur $r = 2$, und dazu $\alpha = 0$, ſo iſt $\beta = 1$; $\gamma = 2$; $\delta = 4$; $\varepsilon = 16$, aber $r^\varepsilon = \zeta = 65536$, und $r^\zeta =$ wird eine Zahl von 19729 Ziffern. Setzt man $r^\alpha = \alpha$, ſo bleiben alle Glieder der Reihe gleich groß. Z. B. jedes $= 2$, wenn $\alpha = 2$, wodurch $r = \sqrt{2}$ wird.

Setzt man $r^\alpha = \alpha + i$, wo i unendlich klein iſt, ſo iſt es möglich, daß die Glieder der Reihe, β, γ, δ, etc. immerhin unendlich wenig zunehmen, und daß ein unendlich entferntes Glied, r^ω, noch endlich iſt. Umgekehrt wird es möglich ſeyn, von einem ſolchen endlichen Gliede

r^ω auf ein unendlich entferntes, $r^\alpha = \alpha$, zu kommen, mit Beyſeiteſetzung der unendlich kleinen Abweichung i. Man vertauſche die Benennungen α und ω, ſo daß r^α das Anfangsglied, und r^ω ein unendlich davon entferntes ſey. Die Glieder der Reihe nähern ſich einer endlichen Gränze, r^ω, wofern $r^\omega = \omega$ iſt. Dieſes giebt $\omega \log r = \log \omega$, und $l\, r = \frac{l\,\omega}{\omega}$. Nun darf r nicht größer genommen werden, als es nach dieſer Gleichung ſeyn kann. Der größte oder kleinſte Werth einer Function wird gefunden, wenn ihr Differential = 0 geſetzt wird. Nun iſt

$$\partial.\frac{l\,\omega}{\omega} = \frac{1}{\omega^2}(1 - l\,\omega)\,\partial\omega.$$

(Differentialformeln, 5 u. 14.), wenn man die natürlichen Logarithmen nimmt. Da die natürlichen Logarithmen ſich wie die künſtlichen, zu denſelben Zahlen gehörigen, verhalten, ſo iſt es hier gleichgültig, ob man dieſe oder jene nimmt. Iſt $l\omega$ größer als 1, oder ω größer als die Baſis der natürlichen Logarithmen, ſo iſt das Differential des Quotienten $\frac{l\,\omega}{\omega}$ negativ, ſo daß dieſer abnimmt, wenn ω wächſt. Daher iſt der Werth deſſelben für $\omega =$ der Baſis, ein Größtes. Die Baſis ſey = e, ſo iſt in dem Falle eines Größten, $\log.\text{nat}\, r = \frac{1}{e}$. Es iſt $e = 2{,}7182818\ldots$, und $\frac{1}{e} = 0{,}3678794\ldots$ Der Modulus des Briggiſchen Syſtems iſt $= 0{,}43429448\ldots = M$, und log. Brigg. r $= \frac{M}{e} = 0{,}1597680\ldots$ alſo $r = 1{,}444668\ldots$ Das iſt die Gränze der Werthe von r, bey welchen die formula replicata, ſo weit man ſie fortſetzt, immer einen endlichen Werth behält.

Nimmt man r kleiner als 1,444668.. ſo giebt es zwey Werthe für ω, um die Gleichung $r^\omega = \omega$ zu erfüllen. Denn wenn man wiederum $r^\alpha = \alpha + i$ ſetzt, wo i einen unendlich kleinen Werth hat, ſo mag i auch negativ ſeyn, oder es iſt $r^\alpha = \alpha \pm i$, ſo daß man mit einem größern α und ſubtractiven i auf daſſelbe Glied der Reihe, als mit einem kleinern α und additiven i, kommen mag. Doch die weitern Unterſuchungen hierüber hat man in der angeführten Abhandlung nachzuſehen. Das hier vorgetragene iſt anders abgefaßt als es von Euler geſchehen iſt, und wird zur Erläuterung dienen können.

Den Coefficienten einer Exponential-Größe kann man, wenn es dienſam iſt, in eine Potenz von derſelben Wurzel mit der veränderlichen Potenz verwandeln. Z. B. es iſt $ha^x = a^{m+x}$, wenn $a^m = h$ iſt.

Umgekehrt kann man den Exponenten einer veränderlichen Potenz um eine beliebige Größe vermindern, und dafür einen Coefficienten ſetzen.

Die Wurzel einer Exponential-Größe kann man beliebig in eine andere verwandeln, wenn dagegen der Exponent gehörig umgeändert wird. So iſt $b^x = a^{mx}$, wenn $a^m = b$ gemacht wird.

Die Entwickelung einer Exponentialgröße durch eine Reihe iſt in dem Artikel, Differenzenrechnung (25.) gezeigt. Es iſt

$$a^u = 1 + \frac{u}{c} + \frac{u^2}{2c^2} + \frac{u^3}{6c^2} + \frac{u^4}{24c^4} + \text{etc.}$$

wo c:1 das Gränzverhältniß des Logarithmen einer Zahl zu dem Überſchuſſe der Zahl über die Einheit iſt, in dem Syſtem mit der Baſis a. Man ſetze $a^u = e^x$, wo e die Baſis der natürlichen Logarithmen, und x der Logarithme der Zahl a^u in dieſem Syſtem iſt. In demſelben iſt $c = 1$, alſo

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + \text{etc.}$$

Nun iſt $\log \text{nat. } a^u = u \, \text{l nat. } a$, und $\text{l nat } e^x = x$, alſo $x = u \, \text{l nat}$, und

$$a^u = 1 + u\,la + \tfrac{1}{2}u^2(la)^2 + \tfrac{1}{6}u^3(la)^3 + \tfrac{1}{24}u^4(la)^4 + \text{etc.}$$

Man ſieht, daß $\frac{1}{c} = \text{l nat. a}$ iſt. Dieſes folgt auch aus der Formel für $l(x+u)$ a. a. O. (24.), wenn darin $x=1$ geſetzt wird. Man bezeichne den Logarithmen von $1+u$ in dem Syſtem, wozu das Gränzverhältniß $c:1$ gehört, durch $L(1+u)$; und den von $1+u$ in dem natürlichen Syſtem durch $l(1+u)$, ſo iſt

$$l(1+u) = u - \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{4}u^4 + \text{etc.}$$

und $L(1+u) = c\,l(1+u)$.

In dieſer Formel iſt $1+u$ die Zahl zu einem Logarithmen, in jener für a^u aber iſt u der Logarithme einer Zahl. Die Baſis des Syſtems mit dem Gränzverhältniſſe $c:1$ ſey a, ſo iſt $La=1$. Setzt man nun $1+u=a$, ſo iſt $1=c\,la$, $\frac{1}{c} = la$.

Es giebt auch Exponentialgrößen mit unmöglichen Exponenten. Solche kommen bey der Vergleichung der Kreisbogen und der Logarithmen, oder eines circularen und hyperboliſchen Sectors vor. S. Differentialformeln, 48-50. und Goniometrie, VIII.

Exponential-Gleichung iſt eine Gleichung, worin Exponentialgrößen vorkommen. Dergleichen iſt $a^x=y$; oder, $z^x=y$; oder $x^x=y$; oder, $ae^{x+2} + be^{x+1} + ce^x = y$; oder $ae^{2x} + be^x = y$.

Dieſe Gleichungen werden, wenn es angeht, mittelſt der Logarithmen aufgelöſet. Die erſte der angeführten verwandelt ſich in dieſe: $x \log a = \log y$, ſo daß durch Hülfe der berechneten Tafeln jede der beiden, x, y, durch die andere gefunden wird. Die zweyte und dritte werden eben ſo behandelt. Die vierte Gleichung verwandle man zuerſt in dieſe, $e^x(ae^2+be+c)=y$, und ſetze $\log e=1$, ſo iſt $x + l(ae^2+be+c) = ly$. Aus der letzten Gleichung den Werth von x durch y zu finden hat man eine quadratiſche Gleichung, worin e^x die Wurzel iſt, aufzulöſen. Hat man die beiden Werthe von e^x gefunden, ſo findet man x vermittelſt der Logarithmen. In dem Die-

tionnaire encyclopédique wird von dieſer Gleichung geſagt, daß x in derſelben nur durch Probiren gefunden werden könne.

Die gegebenen Coefficienten kann man, wenn man es dienlich findet, mit in die Exponentialgröße ziehen; auch die Wurzel derſelben in eine andere verwandeln, nach Anleitung des vorhergehenden Artikels.

Exponential-Curve iſt eine ſolche, deren Gleichung eine exponentiale iſt. Dergleichen iſt die logarithmiſche, für welche iſt $y = a^x$, alſo $x = \frac{ly}{la}$. Weil Logarithmen ſich auf bloße Zahlen beziehen, ſo iſt hier eine lineariſche Größe zur Einheit gemacht. Dieſe ſey abſolut genommen $= b$, ſo iſt $\frac{x}{b} = \frac{l(y:b)}{l(a:b)}$, wo die Quotienten $\frac{x}{b}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{a}{b}$ numeriſche Größen ſind, ſ. Abmeſſung.

Die logarithmiſche Spirale iſt auch eine ſolche Curve. Ihre Gleichung iſt, $e^{\frac{\varphi}{m}} = \frac{y}{a}$, wo a ein gegebener Radius, y irgend ein anderer Radius, φ der Winkel deſſelben mit dem Radius a, und m eine gegebene Zahl iſt. Die Wurzel e iſt die Baſis der natürlichen Logarithmen.

Joh. Bernoulli betrachtet in einem Aufſatze: Principia calculi exponentialium, Acta Erud. 1697. Opp. T. I. nr. 36. die krumme Linie, deren Gleichung iſt, $x^x = y$. Für die Quadratur ihres Flächenraumes, von der Ordinate zu der Abſciſſe $x = 0$ bis zu der $x = 1$, findet er die durch ihre Form merkwürdige Reihe,

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \text{etc.}$$

Das Differential der Area $y\partial x$ iſt hier $= x^x \partial x$. Das unbeſtimmte Integral davon wird in dem Artikel, Integralformeln, gefunden.

Exponentialrechnung iſt die Entwickelung ſolcher Relationen, die von Exponentialgrößen abhangen. Sie hat es entweder bloß mit dieſen und andern endlichen Größen zu thun, oder ſie führt zugleich ihre Differentiale ein. Zu jener Rechnung mit endlichen Größen iſt in den vorhergehenden Artikeln Anleitung gegeben. Sie erfordert nur, daß man mit der Potenzenrechnung und der Theorie der Logarithmen bekannt ſey. Von der zweyten iſt in dem Artikel, Differentialformeln, IV. gehandelt.

Leibnitz und Joh. Bernoulli haben dieſe Rechnung jeder für ſich erfunden. ſ. Differentialrechnung, Th. I. S. 858.

Exterminatio iſt eben das was eliminatio, ſ. Artikel, Elimination.

Extrema et media ratio bey der Eintheilung einer geraden Linie iſt, wenn die ganze ſich zu dem größern Abſchnitte, wie dieſer ſich zu dem kleinern verhält. Es iſt alſo ſo viel als eine Linie nach einer ſtetigen Proportion theilen. S. Euklides Elemente. B. VI. Erkl. 3. und VI. 30. auch II. 11. Die Aufgabe kommt bey ihm zweymahl vor. Sie iſt in dem erſten Theile dieſes Wörterbuchs auch zweymahl aufgelöſet, einmahl nach einer geometriſchen Analyſis, S. 91. zum zweytenmahl durch algebraiſche Rechnung, S. 110.

Die Aufgabe wird zu der Verzeichnung eines gleichſeitigen Fünfecks gebraucht. Man hat ehedem auch dieſe Eintheilung die ſectio divina genannt.

Eylinie, Eyrundung. ſ. Ovale.

F.

Facit iſt die Antwort auf eine numeriſche Rechnungsfrage, als die geſuchte Summe vorgegebener Größen, das Product zweyer Zahlen, das vierte Glied einer Proportion, von welcher drey Glieder gegeben ſind. Die Auflöſung einer

allgemeinen Frage zeigt, wie das geſuchte aus den gegebenen Größen zuſammengeſetzt wird.

Factor heißt jede der beiden Zahlen, die mit einander multiplicirt werden, wodurch eine Zahl entſteht, welche das Product, Factum, genannt wird, ſ. Multiplication. Ein Factor kann wiederum ein Product von zwey Factoren ſeyn, und ſo kann eine Zahl aus vielen Factoren beſtehen. Von der Zerlegung einer Zahl in ihre einfachſten Factoren, ſ. Theilbare Zahl.

Ein Aggregat von Größen, die ihrer Quantität nach unbeſtimmt gelaſſen werden, eine algebraiſche oder analytiſche Formel, in Factoren zu zerlegen, ordnet man es nach den Potenzen einer der darin vorhandenen Größen, und ſetzt das Aggregat $= 0$, um die Formel wie eine Gleichung behandeln zu können. Eine Gleichung

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - \ldots + k = 0,$$

habe die Wurzeln p, q, r, s, etc. ſo iſt ſie ein Product aus den Factoren $x-p$, $x-q$, $x-r$, $x-s$, etc. Sind die Wurzeln alle mögliche Größen, ſo iſt das Aggregat von ihren Terminis ein Product von m einfachen Factoren, wie $x-p$ iſt. Um die Gleichung zu erfüllen, muß einer dieſer Factoren Null geſetzt werden; ſoll das Aggregat irgend einen Werth haben können, ſo bleibt der Werth von x unbeſtimmt. Hat die Gleichung unmögliche Wurzeln, zwey, oder vier, oder überhaupt eine gerade Anzahl derſelben, ſo giebt jedes Paar zuſammengehöriger unmöglicher Wurzeln einen möglichen trinomiſchen Factor, $xx - \alpha x + \beta\beta$ wo $\beta\beta > \frac{1}{4}\alpha\alpha$ iſt. Die Zerlegung eines allgemeinen Ausdrucks einer zuſammengeſetzten Größe in Factoren hängt alſo von der Auflöſung der Gleichungen ab.

Bey der Differentiation einer Gleichung zwiſchen zwey veränderlichen Größen kann ein veränderlicher Factor in der Differentialgleichung entſtehen. Eine gegebene Differentialgleichung kann daher von der Beſchaffenheit ſeyn, daß der Factor fehlt, den ſie haben muß, um die endliche Gleichung aus ihr zu erhalten, ſo daß ſie ohne denſelben

nicht integrirbar iſt. Dieſer Factor muß alſo wieder hergeſtellt werden. Es iſt oft nicht leicht ihn zu finden. S. Integration der Differentialgleichungen.

Facultät, numeriſche, iſt ein Product aus Factoren, die in arithmetiſcher Progreſſion auf einander folgen. Dieſe ſey, a, a + r, a + 2r, a + 3r ...., a + mr − r, ſo iſt das Product dieſer m Glieder eine numeriſche Facultät. Unter dieſer Benennung begreife man auch die Quotienten von zwey ſolchen Producten mit gleich vielen Factoren.

1. Euler hat zu allererſt in ſeiner Differentialrechnung, P. II. cap. 16. 17. dieſe Form einer Größe nebſt andern verwandten betrachtet, die er zuſammen functiones inexplicabiles nennt. Vandermonde hat darüber eine Abhandlung in den Schriften der Pariſer Akademie vom J. 1772. geliefert, und eine eigne Bezeichnungsart dazu gebraucht. Kramp hat kürzlich die Natur der von ihm ſo benannten numeriſchen Facultäten ausführlich unterſucht, ihre Entwickelung in andere Formen gelehrt, und ihre Anwendung in der höhern Analyſis gezeigt. Dieſe mit vielem Scharfſinn ausgeführte Theorie nimmt einen beträchtlichen Theil ſeines Werkes über die Strahlenbrechung ein: Analyſe des refractions aſtronomiques et terreſtres, à Leipſic, 1799. 210 pag. in 4. Die Benennung, Facultät, iſt, wie man ſieht, dem Kunſtwort, Potenz oder Dignität, analog. Lacroix nennt das Product aus Factoren mit gleichen Unterſchieden, von dem Factor x an, eine puiſſance de x du ſecond ordre, in dem Traité des différences et des Series, à Paris. 1800, worin von dieſer analytiſchen Form mehreremale Gebrauch gemacht wird.

2. Man nehme folgeweiſe einen, zwey, drey, und ſo fort mehrere Factoren, ſo erhält man eine Reihe von Größen, die nur in einer Abſicht ein gemeinſchaftliches Geſetz der Zuſammenſetzung haben, in anderer aber, nämlich in der Anzahl der Factoren, unterſchieden ſind, nämlich:

$$\overset{1}{a},\quad \overset{2}{a(a+r)},\quad \overset{3}{a(a+r)(a+2r)}$$

$$\overset{4}{a(a+r)(a+2r)(a+3r)}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$\overset{m}{a(a+r)\ldots(a+mr-r)}.$$

Die Form dieſer Glieder läßt ſich durch die Stelle m nicht auf eine übereinſtimmende Art angeben, wie es bey algebraiſchen und transſcendenten Functionen angeht, in welchen die veränderliche Größe, die als Stellenzahl dient, zwiſchen zwey endlichen Werthen alle mögliche dazwiſchen liegende haben kann, daher die Function ſich auf eine ſtetige Art verändert. Die numeriſchen Facultäten ändern ſich ſprungweiſe. Man kann in einer Reihe von Größen dieſer Form keine einſchalten, ohne die Art der Formation weſentlich zu ändern. Darum nannte Euler ſie functiones inexplicabiles.

3. Den erſten Factor einer numeriſchen Facultät nenne man die Baſis; die Anzahl der Factoren den Exponenten. Kramp bezeichnet eine Facultät, deren Baſis a, Exponent m, und in deren zugehörigen Progreſſion der Unterſchied der Glieder r iſt, durch $a^{m|r}$. Iſt der Exponent eine zuſammengeſetzte Zahl, wie m + n, ſo iſt die Bezeichnung, $a^{(m+n)|r}$, oder auch $a^{m+n|r}$, wo das Exponentenzeichen ſich auf alle vorhergehende Theile bezieht. Es iſt, wenigſtens im Schreiben, bequemer ſtatt des Buchſtaben I ein Komma zu gebrauchen, wie in $a^{m,r}$ oder $a^{m+n,r}$. Dieſe Bezeichnung wird in dem gegenwärtigen Artikel gebraucht werden.

4. Den letzten Factor einer Facultät kann man zum erſten nehmen. Die Facultät ſey

$$a(a+r)(a+2r)\ldots(a+mr-r),$$

ſo iſt, wenn $a+mr-r=b$ geſetzt wird,

$$a^{m,+r}=b^{m,-r}.$$

Hieraus ſieht man, wie Facultäten mit entgegengeſetzten Differenzen eine in die andere verwandelt werden, wobey aber eine Umänderung der Baſis geſchieht.

5. Der Exponent beſtehe aus zwey Theilen, $m + n$, ſo iſt die Facultät, $a(a+r)\ldots(a+mr-r)(a+mr)\ldots(a+(m+n-1)r)$, alſo iſt

$$a^{m+n,r} = a^{m,r}(a+mr)^{n,r},$$

und auch

$$a^{m+n,r} = a^{n,r}(a+nr)^{m,r},$$

wo zu dem erſten Factor n Factoren, a bis $a+(n-1)r$, genommen ſind, und zu dem andern Factor die übrigen von $a+nr$ an.

6. Daraus folgt $a^{m,r}(a+mr)^{n,r} = a^{n,r}(a+nr)^{m,r}$.

7. Exempel. Es iſt das Product $1.2.3\ldots 2n$ gleich dem Producte der beiden Producte oder Facultäten, $1.3.5\ldots 2n-1$. und $2.4.6\ldots 2n$, oder $(1.2.3\ldots n)2^n$. Nach der angenommenen Bezeichnung iſt nun $1^{2n,1} = 1^{n,2} \times 1^{n,1}\, 2^n$. Aus (5.) iſt $1^{2n,1} = 1^{n,1}(1+n)^{n,1}$. Folglich iſt $(1+n)^{n,1} = 1^{n,2}.2^n$, das iſt, $1+n.2+n\ldots 2n = 1.3.5\ldots(2n-1).2^n$. Dieſer Satz iſt in dem Artikel, Binomial-Coefficienten, 12. gebraucht, und daſelbſt auf eine andere Art erwieſen worden.

8. Es ſey n kleiner als m, ſo iſt $\dfrac{a^{m,r}}{a^{n,r}} = (a+nr)^{m-n,r}$. Denn von den m Factoren des Zählers werden n Factoren, a bis $a+(n-1)r$, durch die Diviſion mit dem Nenner abgeſchnitten, und es bleiben $m-n$ Factoren von $a+nr$ bis $a+(m-1)r$.

9. Der Exponent in dem Nenner ſey größer als in dem Zähler, ſo iſt $\dfrac{a^{m,r}}{a^{m+n,r}} = \dfrac{1}{(a+mr)^{n,r}}$.

Wenn dieſer Fall dem nächſtvorhergehenden gleich behandelt wird, ſo iſt

$$\frac{a^{m,r}}{a^{m+n,r}} = (a+(m+n)r)^{-n,r},$$

und es iſt

$$(a+(m+n)r)^{-n,r} = \frac{1}{(a+mr)^{n,r}},$$

Es ſey $a+(m+n)r = b$, ſo iſt

$$b^{-n,r} = \frac{1}{(b-nr)^{n,r}},$$

$$\text{oder } b^{-n,r} = \frac{1}{(b-r)^{n,-r}}.$$

Dieſe Ausdrücke ſind dem für Potenzen, $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$, analog.

10. Man multiplicire auf beiden Seiten der vorletzten Formel in (9.) mit $(b-nr)^{m,r}$, wo m größer als n ſey, ſo iſt $(b-nr)^{m,r}.b^{-n,r} = \frac{(b-nr)^{m,r}}{(b-nr)^{n,r}}$.

Der Zähler des Bruches iſt das Product

$$b-nr.b-nr+r\ldots b-r.b..b+(m-n)r-r.$$

Der Nenner iſt das Product $b-nr\ldots b-r$. Alſo iſt

$$(b-nr)^{m,r}.b^{-n,r} = b^{m-n,r}.$$

Dieſe Formel folgt aus der zweyten in (5.) wenn daſelbſt n negativ genommen wird.

11. Die Differenz ſey negativ, ſo iſt, $n < m$ geſetzt, $\frac{a^{m,-r}}{a^{n,-r}} = (a-nr)^{m-n,-r}$, und $\frac{a^{m,-r}}{a^{m+n,-r}} = \frac{1}{(a-mr)^{n,-r}}$.

Wenn der letztere Fall dem erſtern gleich behandelt wird, ſo iſt der Quotient $= (a-(m+n)r)^{-n,-r} = \frac{1}{(a-mr)^{n,-r}}$. Setzt man $a-(m+n)r = b$, ſo iſt

$$b^{-n,-r} = \frac{1}{(b+nr)^{n,-r}},$$

oder auch $b^{-n,-r} = \frac{1}{(b+r)^{n,r}}$.

12. Es iſt $b^{0,+r} = 1$, und $b^{0,-r} = 1$, ſo daß 1 das gemeinſchaftliche Glied der beiden Reihen $1;\ b;\ b(b+r);\ b(b+r)(b+2r);$ etc. und $1;\ \frac{1}{b-r};\ \frac{1}{(b-r)(b-2r)};$ etc. iſt, ſo wie der Reihen $1;\ b;\ b(b-r);\ b(b-r)(b-2r);$ etc. und $1;\ \frac{1}{b+r};\ \frac{1}{(b+r)(b+2r)};$ etc.

Auch iſt, wenn in der letzten Formel (11.) die Baſis $b = 0$ geſetzt wird

$$0^{-n,-r} = \frac{1}{r^{n,r}} = \frac{1}{r.2r...nr}.$$

13. Die numeriſchen Facultäten ſind ganz leicht zu behandeln, wenn der Exponent eine ganze Zahl iſt, dieſe mag poſitiv oder negativ ſeyn. Allein wenn der Exponent ein Bruch iſt, ſo entſteht eine Schwierigkeit, da eine Facultät mit gebrochnem Exponenten eine andere Form erhalten muß als eine, deren Exponent eine ganze Zahl iſt. Die Formel $a^{\frac{m}{n},r}$ kann nichts anders bedeuten als ein in der Reihe der Facultäten mit ganzen Exponenten eingeſchaltetes Glied zwiſchen den beiden Gliedern, deren Stellenzahlen die dem Bruche $\frac{m}{n}$ nächſten ganzen Zahlen ſind.

In dem Artikel, Einſchalten, §. 40. ff. iſt gezeigt, wie eine Reihe von Facultäten interpolirt wird. Es iſt, wenn daſelbſt in (44.) für m+ω geſetzt wird $\frac{m}{n}$, und r für b,

$$a^{\frac{m}{n},r} = \frac{a.a+r.a+2r.\text{ etc.}}{a+\frac{mr}{n}.a+\frac{mr}{n}+r.a+\frac{mr}{n}+2r.\text{etc.}},$$

oder, wenn $a+\frac{mr}{n}=b$ geſetzt wird, welches b aber mit dem in jenem Artikel gebrauchten b (hier r) nicht zu verwechſeln iſt,

$$a^{\frac{b-a}{r},r} = \frac{a.a+r.a+2r.\text{ etc.}}{b.b+r.b+2r.\text{ etc.}}.$$

14. Eben ſo iſt $b^{\frac{a-b}{r},r} = \frac{b.b+r.\text{ etc.}}{a.a+r.\text{ etc.}}$, alſo

iſt $b^{\frac{a-b}{r},r} = 1:a^{\frac{b-a}{r},r}$, oder

$b^{-\frac{m}{n},r} = 1:a^{\frac{m}{n},r}$, oder

$$b^{-\frac{m}{n},r} = 1:\left(b-\frac{mr}{n}\right)^{\frac{m}{n},r},$$

wie für ganze Exponenten in (9.).

15. Für eine negative Differenz iſt auf ähnliche Art, wie für eine poſitive,

$$a^{\frac{m}{n},-r} = \frac{a.a-r.a-2r.\text{ etc.}}{a-\frac{mr}{n}.a-\frac{mr}{n}-r.\text{ etc.}}.$$

Nun ſey $a-\frac{mr}{n}=b$, ſo iſt auf gleiche Art wie in (14.), $b^{-\frac{m}{n},-r} = 1:a^{\frac{m}{n},-r}$, oder

$$b^{-\frac{m}{n}, -r} = 1 : \left(b + \frac{mr}{n}\right)^{\frac{m}{n}, -r},$$

wie für ganze Exponenten in (11.). Aber die zweyte Form daſelbſt iſt hier nicht anwendbar. Die in (4.) gezeigte Verwandlung einer Facultät in Rückſicht der Differenz hat bey gebrochnen Exponenten nicht ſtatt.

16. Das Product zweyer Facultäten mit gebrochnen Exponenten, $a^{\frac{b-a}{r}, r} \times \alpha^{\frac{\beta-\alpha}{r}, r}$, iſt

$$= \frac{a.\alpha.a+r.\alpha+r.a+2r.\alpha+2r.\ \text{etc.}}{b.\beta.b+r.\beta+r.b+2r.\beta+2r.\ \text{etc.}}$$

Eben dieſen Bruch giebt das Product der beiden Facultäten, $a^{\frac{\beta-a}{r}, r} \times \alpha^{\frac{b-\alpha}{r}, r}$. Alſo iſt

$$a^{\frac{b-a}{r}, r} \times \alpha^{\frac{\beta-\alpha}{r}, r} = a^{\frac{\beta-a}{r}, r} \times \alpha^{\frac{b-\alpha}{r}, r}.$$

17. Es ſey $\alpha = b$, ſo iſt $a^{\frac{b-a}{r}, r} \times b^{\frac{\beta-b}{r}, r}$

$= \frac{a.a+r.a+2r.\ \text{etc.}}{\beta.\beta+r.\beta+2r.\ \text{etc.}}$. Dieſer Bruch iſt

$= a^{\frac{\beta-a}{r}, r}$, alſo iſt $a^{\frac{b-a}{r}, r} \times b^{\frac{\beta-b}{r}, r} = a^{\frac{\beta-a}{r}, r}$.

Man ſetze die Exponenten $\frac{b-a}{r} = m$; $\frac{\beta-b}{r} = n$, ſo iſt $a^{m, r} \times (a+mr)^{n, r} = a^{m+n, r}$, für gebrochne poſitive Exponenten wie für ganze in (5.).

18. Es iſt nämlich $a^{m, r} = \frac{a.a+r.\ \text{etc.}}{a+mr.a+mr+r.\ \text{etc.}}$

und $(a+mr)^{n, r} = \frac{a+mr.a+mr+r.\ \text{etc.}}{a+mr+nr.a+mr+r+nr.\ \text{etc.}}$;

alſo $a^{m, r} \times (a+mr)^{n, r} =$

$\frac{a.a+r.\ \text{etc.}}{a+mr+nr.a+mr+r+nr.\ \text{etc.}}$, das iſt

$a^{m,r} \times (a+mr)^{n,r} = a^{m+n,r}$, wie für ganze Exponenten in (5.).

Die Differenz r darf auch negativ genommen werden, ſo daß $a^{m,-r} \times (a-mr)^{n,-r} = a^{m+n,-r}$ iſt.

19. Offenbar kann man m und n vertauſchen, und es iſt $a^{n,r} \times (a+nr)^{m,r} = a^{m+n,r}$, alſo

$$a^{m,r} \times (a+mr)^{n,r} = a^{n,r} \times (a+nr)^{m,r},$$

wie für ganze Exponenten in (6.).

20. Auch iſt $(a-nr)^{m,r} . a^{-n,r} = a^{m-n,r}$, wie für ganze Exponenten in (10.).

Denn $a^{-n,r} = \frac{1}{(a-nr)^{n,r}}$

$= \frac{a . a+r \text{ etc.}}{a-nr . a-nr+r . \text{ etc.}}$, und $(a-nr)^{m,r}$

$= \frac{a-nr . a-nr+r . \text{ etc.}}{a+(m-n)r . a+(m-n)r+r . \text{ etc.}}$ woraus der Satz unmittelbar folgt.

21. Die Diviſion giebt $a^{\frac{b-a}{r},r} : \alpha^{\frac{\beta-\alpha}{r},r}$

$$= \frac{a . \beta . a+r . \beta+r . a+2r . \beta+2r . \text{ etc.}}{b . \alpha . b+r . \alpha+r . b+2r . \alpha+2r . \text{ etc.}}.$$

Eben dieſen Bruch giebt auch der Quotient

$a^{\frac{\alpha-a}{r},r} : b^{\frac{\beta-b}{r}.r}$, welcher alſo jenem Quotienten gleich iſt.

22. Es ſey $\alpha = b$; $\beta = a$, ſo iſt

$$a^{\frac{b-a}{r},r} : b^{\frac{a-b}{r},r} =$$

$$\frac{a . a . a+r . a+r . a+2r . a+2r . \text{ etc.}}{b . b . b+r . b+r . b+2r . b+2r . \text{ etc.}}.$$

23. Iſt $\alpha = b$, ſo iſt $a^{\frac{b-a}{r},r} : b^{\frac{\beta-b}{r},r}$

$$= \frac{a.\beta.a+r.\beta+r.\text{ etc.}}{b.b.b+r.b+r.\text{ etc.}}.$$

Ein Bruch wie dieſer kann auch als das Product zweyer Facultäten betrachtet werden.

24. Es ſey m eine gebrochne, und p eine ganze Zahl, ſo iſt $a^{m,r} : a^{p,r} = (a+pr)^{m-p,r}$.

Denn $a^m = \frac{a.a+r..\text{ etc.}}{a+mr.a+mr+r.\text{ etc.}}$,

und $a^{p,r} = a.a+r\ldots a+pr-r$. Alſo iſt

$$a^{m,r} : a^{p,r} = \frac{a+pr.a+pr+r\text{ etc.}}{a+mr.a+mr+r.\text{ etc.}}$$

$= (a+pr)^{m-p,r}$.

Der Satz folgt auch aus (18.).

25. Es iſt $a^{m,r} - (a-r)^{m,r} = \frac{mr}{a-r+mr} a^{m,r}$, auch für gebrochne Werthe von m. Man hat nur die Werthe der beiden Facultäten für dieſen Fall zu entwickeln.

Da $a^{m-1,r}(a+mr-r) = a^{m,r}$ iſt (18.), ſo iſt $a^{m,r} - (a-r)^{m,r} = mr.a^{m-1,r}$.

Auch iſt $(a+r)^{m,-r} - a^{m,-r}$

$= \frac{mr}{a+r-mr} a^{m,-r} = mr.a^{m-1,-r}$. Dieſe Formeln dienen zu der Differenzenrechnung für numeriſche Facultäten.

26. Exempel zu (22.). Es iſt (Cyklometrie, 29.)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.\text{ etc.}}{1.1.3.3.5.5.\text{ etc.}}.$$

Alſo iſt

$$\frac{1}{2}\pi = 2^{-\frac{1}{2},2} : 1^{\frac{1}{2},2}.$$

Da $2^{-\frac{1}{2},2} = 1 : 1^{\frac{1}{2},2}$, ſo iſt

$$\frac{2}{\pi} = (1^{\frac{1}{2},2})^2.$$

27. Exempel zu (23.). Es iſt (Cyklometrie, 28.)

$$\sin\frac{1}{2}m\pi = \frac{m.2 - m.2 + m.4 - m.\,\text{etc.}}{1\,.\,1\,.\,3\,.\,3\,.\,\text{etc.}}.$$

Alſo iſt $\sin\frac{1}{2}m\pi = m^{\frac{1-m}{2},2} : 1^{\frac{1-m}{2},2}$.

Setzt man $m = \frac{1}{2}$, ſo iſt $\sin\frac{1}{2}m\pi = \sqrt{\frac{1}{2}}$, alſo $\sqrt{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{4},2} : 1^{\frac{1}{4},2} = 1^{\frac{1}{4},4} : 2^{\frac{1}{4},4}$. Wenn man in der Formel für $\sin\frac{1}{2}m\pi$ alle Factoren des Zählers und Nenners durch dieſelbe Zahl multiplicirt, ſo werden die beiden Baſes und die Differenz dadurch multiplicirt, der Exponent der Factltäten, oder die Stelle des eingeſchalteten Gliedes, welches ſie bedeuten, bleibt unverändert. Hier wird die Baſis $\frac{1}{2}$ in 1, die Baſis 1 in 2, und die Differenz 2 in 4 verwandelt.

Setzt man $m = \frac{1}{3}$, ſo iſt $\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$, und $\frac{1}{2} = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3},2} : 1^{\frac{1}{3},2} = 1^{\frac{1}{3},6} : 3^{\frac{1}{3},6}$.

28. Es iſt

$$\frac{\sin m\pi}{\sin n\pi} = \frac{m.1 - m.1 + m.2 - m.2 + m.\,\text{etc.}}{n.1 - n.1 + n.2 - n.2 + n.\,\text{etc.}}.$$

Folglich

$$\frac{\sin m\pi}{\sin n\pi} = m^{n-m,1} : (1-n)^{n-m,1},$$

oder

$$\frac{\sin m\pi}{\sin n\pi} = m^{1-m-n,1} : n^{1-m-n,1}.$$

Für m, n, und die Differenz 1 können auch Zahlen, die ihnen proportional ſind, geſetzt werden.

29. Aus der Vergleichung der Formeln für ſin $\frac{m\pi}{2n}$ und coſ $\frac{m\pi}{2n}$, a. a. O. folgt

$$\text{tang}\,\frac{m\pi}{2n} = \frac{m.2n - m.2n + m.4n - m.\ \text{etc.}}{n - m.n + m.3n - m.3n + m.\ \text{etc.}}.$$

Dieſes giebt

$$\text{tang}\,\frac{m\pi}{2n} = m^{\frac{n-2m}{2n},\,2n} : (n+m)^{\frac{n-2m}{2n},\,2n},$$

und auch

$$\text{tang}\,\frac{m\pi}{2n} = m^{\frac{1}{2},\,2n} : (n-m)^{\frac{1}{2},\,2n}.$$

30. Die Form eines eingeſchalteten Gliedes in der Reihe der Brüche, deren Zähler und Nenner numeriſche Facultäten ſind, iſt dieſelbe mit der Form des Products oder des Quotienten zweyer numeriſchen Facultäten mit gebrochnem Exponenten. Jene Reihe ſey

$$\frac{a}{b};\ \frac{a.a+r.}{b.b+r.};\ \frac{a.a+r.a+2r.}{b.b+r.b+2r.};\ \text{etc.}$$

Die Stelle eines eingeſchalteten Gliedes Z ſey z, die des erſten Gliedes als Eins genommen. Es iſt (Einſchalten, 46. wo für $m + \omega$ hier zu ſetzen iſt z).

$$Z = \frac{a.a+r.a+2r.\ \text{etc.}}{b.b+r.b+2r.\ \text{etc.}} \times \frac{b+rz.b+r+rz.\ \text{etc.}}{a+rz.a+r+rz.\ \text{etc.}}.$$

oder

$$Z = \frac{a.b+rz.a+r.b+r+rz.a+2r.\ \text{etc.}}{b.a+rz.b+r.a+r+rz.b+2r.\ \text{etc.}}.$$

Folglich iſt nach der angenommmenen Bezeichnung

$$Z = a^{\frac{b-a}{r}, r} : (a + rz)^{\frac{b-a}{r}, r}.$$

Oder, wenn die Exponenten entgegengeſetzt genommen werden, aus (14.),

$$Z = (b + rz)^{\frac{a-b}{r}, r} : b^{\frac{a-b}{r}, r}.$$

31. Es iſt oft möglich, dieſen Quotienten, wenn er nicht unmittelbar mit dem Quotienten zweyer Sinus, oder dem Werthe einer Tangente übereinkommt, durch Hinzufügung einer Anzahl Factoren im Dividendus und Diviſor auf eine ſolche Form zu bringen.

32. Exempel. In der Reihe, $\frac{19}{15}$, $\frac{19.26}{15.22}$, $\frac{19.26.33}{15.22.29}$, etc. wird das Glied geſucht, deſſen Stelle $\frac{43}{7}$ iſt, oder das erſte von 6 eingeſchalteten Gliedern zwiſchen dem ſechſten und ſiebenten Gliede. Hier iſt $a = 19$; $b = 15$, $r = 7$, $z = \frac{43}{7}$, alſo

$$Z = \frac{19.26.23.40.\ \text{etc.}}{15.22.29.36.\ \text{etc.}} \times \frac{58.65.72.79.\ \text{etc.}}{62.69.76.83.\ \text{etc.}}.$$

Der Quotient $\frac{\sin m\pi}{\sin n\pi}$ in (28.) läßt ſich in zwey ſolche Brüche, wie Z enthält, zerlegen. Um Z mit jenem zu vergleichen, da m und n Brüche ſind, multiplicire man alle Factoren in demſelben mit 7, und ſetze $7m = \alpha$, $7n = \beta$, ſo iſt

$$\frac{\sin m\pi}{\sin n\pi} = \frac{\alpha.\alpha + 7.\alpha + 14.}{\beta.\beta + 7.\beta + 14.} \times \frac{7-\alpha.14-\alpha.\ \text{etc.}}{7-\beta.14-\beta.\ \text{etc.}};$$

Da α und β kleiner ſind als 7, ſo ſetze man die Reihen der Factoren in Z rückwärts fort, bis man auf Factoren unter 7 kommt. Dadurch wird

$$Z \times \frac{5.12}{1.\ 8} \times \frac{2.\ 9..51}{6.13..55} = \frac{5.12.19.\ \text{etc.}}{1.\ 8.15.\ \text{etc.}} \times \frac{2.\ 9..51.58.\ \text{etc.}}{6.13..55.62.\ \text{etc.}}.$$

Vergleicht man das Product rechter Hand mit dem für den Quotienten der beiden Sinus, ſo iſt es damit übereinſtimmig, wenn $\alpha = 5$, und $\beta = 1$ geſetzt wird. Es iſt

also $= \frac{\sin \frac{5}{7}\pi}{\sin \frac{1}{7}\pi}$, und daher

$$Z = \frac{1.\ 8}{5.12} \times \frac{6.13..55}{2.9...51} \times \frac{\sin \frac{5}{7}\pi}{\sin \frac{1}{7}\pi}.$$

33. Man ſieht bald, worauf es bey dieſer Reduction ankommt. Es müſſen ſich zwey Vielfache von r, pr und qr finden laſſen, ſo daß $a - pr = \alpha$, und $b + rz - qr = r - \alpha$ ſey, wo α kleiner als r iſt. Auf gleiche Weiſe verhält es ſich bey der Reduction auf die Formel für die Tangente eines Winkels.

34. Das bisherige iſt zwar aus Kramps angeführter Schrift genommen, aber nicht ohne beträchtliche Verbeſſerungen und Ergänzungen. Kramp wendet ohne Bedenken die Formeln, welche für ganze und poſitive Exponenten erwieſen ſind, auf gebrochne und negative an. Daß dieſes verſtattet ſey, iſt hier dargethan. Allein man darf nicht bey gebrochnen Exponenten die poſitive Differenz in eine negative vewandeln, wie es bey ganzen Exponenten angeht. Kramp aber thut dieſes, und geräth dadurch auf Folgerungen, die ihn ſelbſt befremden, denen er aber doch zu Gefallen andere, als ausgemacht anerkannte, Lehren aufopfern will.

35. Er findet, daß der unendlich fortlaufende Bruch, $\frac{a.a+r.a+2r.\ \text{etc.}}{b.b+r.b+2r.\ \text{etc.}}$, gleich ſey $a^{\frac{b-a}{r}, r}$ dividirt

durch $(\text{infin.}\, r)^{\frac{b-a}{r}}$. In der Gleichung, $a^{m,r}\ (a+mr)^{n,r} = a^{n,r}\ (a+nr)^{m,r}$ ſetzt er den Exponenten n unendlich groß. Dadurch, ſagt er, verwandle ſich die Facultät $(a+nr)^{m,r}$ in eine Potenz, $(\text{inf.}\, r)^{m,r}$. Setze man $a+mr=b$, ſo ſey $m=\frac{b-a}{r}$, und $\frac{a^{n,r}}{b^{n,r}} = a^{\frac{b-a}{r}} : (\text{inf.}\, r)^{\frac{b-a}{r}}$. Der Theil linker Hand ſey aber jener unendlich fortlaufende Bruch. Nun gründet jene zum Grunde gelegte Gleichung ſich darauf, daß $a^{m+n,r}$ ſowohl $a^{m,r}\ (a+mr)^{n,r}$ als $a^{n,r}\ (a+nr)^{m,r}$ iſt, (18. 19.). Setzt man n unendlich, ſo iſt $a^{m+n,r}$ gleichgültig mit $a^{n,r}$, und jenes iſt zugleich $a^{n,r}\ (a+nr)^{m,r}$ welches beides ſich nicht gut vereinigen läßt. Zweytens, wenn $\frac{b-a}{r}$ eine ganze Zahl iſt, ſo wird der Bruch eine endliche Facultät mit einem ganzen Exponenten, da der von Kramp angegebene Werth unendlich klein oder unendlich groß bleibt. Drittens, die Facultät $(a+nr)^{m,r}$ iſt für ein unendlich großes n doch nicht als eine Potenz zu betrachten, da m ein Bruch iſt, wenn der vorgegebene Bruch nicht abbricht. Alsdann hat jene Function eben die Form, welche der Bruch hat. Zu jedem unendlichen Factor im Zähler gehört ein unendlicher Factor im Nenner. In dem Artikel, Einſchalten (52. 53.) iſt gezeigt, daß der vorgegebene Bruch als eingeſchaltetes Glied in einer Reihe von Facultäten eine endliche Größe hat.

36. Bey dem Verhältniſſe zweyer Facultäten, mit einerley Differenz, $a^{\frac{c}{r},r} : A^{\frac{c}{r},r}$ geht der unendliche Diviſor aus der Rechnung heraus; allein die Vergleichung der Facultäten mit gebrochnen Exponenten iſt, bey dem

Krampſchen Lehrſatze, auf den Fall gleich großer Exponenten eingeſchränkt.

37. Eben ſo leidet, bey demſelben Lehrſatze, die Formel für das Product zweyer ſolcher Facultäten eine Einſchränkung. Damit es endlich ſeyn könne, muß eine gewiſſe Relation zwiſchen den Exponenten und Differenzen Statt haben. Man ſehe Kramps Schrift §. 34. In §. 35. daſelbſt iſt p geſetzt, wo nach der Rechnung in §. 34. der Exponent q ſtehen ſollte.

38. Es iſt an dieſem Orte die Aufgabe, das ohne Ende fortgeſetzte Product,

$$\frac{A^p B^q}{C^{p+q}} \cdot \frac{(A+r)^p (B+r)^q}{(C+r)^{p+q}} \cdot \frac{(A+2r)^p (B+2r)^q}{(C+2r)^{p+q}} \text{. etc.}$$

in ein Product aus Potenzen zweyer Facultäten zu verwandeln. Kramp bringt eine unendliche Größe hinein, die durch eine andere Annahme wieder in eine endliche, und zwar die Einheit, verwandelt wird. Daſſelbe Reſultat aber wird erhalten, wenn $C = A + mr$, und auch $C = B + nr$ geſetzt wird. Alsdann iſt, da $C^{p+q} = C^p \,.\, C^q$ iſt, und ſo auch bey den Nennern der folgenden Factoren, das vorgegebene Product $= (A^{m,r})^p \times (B^{n,r})^q$, nach (13. u. 16.). Nach Kramps Rechnung ſind m und n von p und q abhängig, welches ſie aber nicht ſind.

Setzt man $B = A + r$, ſo iſt $n = m - 1$; und

$$B^{n,r} = B^{m-1,r} = \frac{(B-r)^{m,r}}{(B-r)^{1,r}} = \frac{A^{m,r}}{A} \text{. Zugleich}$$

ſetze man $p + q = 1$, oder $q = 1 - p$, ſo iſt

$$A^{m,r} = A^p \,.\, \frac{A^{1-p} (A+r)^p}{A+mr} \times$$

$$\frac{(A+r)^{1-p} \ (A+2r)^p}{A+r+mr} \text{. etc.}$$

Der Werth von p iſt willkührlich. Nimmt man $p = m$, ſo hat man die Form eines interpolirten Gliedes in der

N

Reihe der Facultäten, a; a.a+r; a.a+r.a+2r; etc. wie ſie Euler in dem Calc. differ. P. II. §. 401. angiebt.

39. Kramp lehrt zweyerley Entwickelungen einer Facultät, die angeführt zu werden verdienen.

Die erſte iſt die Entwickelung der Facultät mit einer binomiſchen Baſis durch die Facultäten ihrer Theile. Es iſt (Kramp, 54.)

$$(a+b)^{n,r} = a^{n,r} + Aa^{n-1,r}b + Ba^{n-2,r}b^{2,r}$$
$$+ Ca^{n-3,r}b^{3,r} + Da^{n-4,r}b^{4,r} + \text{etc.}$$

wo die Coefficienten, A, B, C, D, etc. die Binomial-Coefficienten in der Potenz $(a+b)^n$ ſind, nämlich $A = n$;

$$B = \frac{n.n-1.}{1.\ 2}; \text{ u. ſ. f.}$$

Den ſinnreichen Beweis, der nur etwas lang iſt, hat man bey dem Verfaſſer ſelbſt nachzuſehen. Der Satz iſt dem binomiſchen Lehrſatze analog, und eine merkwürdige Erweiterung deſſelben. Er gilt auch für gebrochne Exponenten, weil die Facultät $(-mr)^{m+1,r}$ Null iſt, ſo daß die Reihe für $(a-mr)^{n,r}$ mit dem Gliede $a^{n-m,r} \times (-mr)^{m,r}$ abbricht, wenn auch n ein Bruch iſt, und die Coefficienten in dieſem Falle eben die Form erhalten, wie für ganze Werthe von n. Dabey iſt zu merken, daß die bey dem Beweiſe gebrauchte Gleichung, $Z^{n,r} - (Z-r)^{n,r} = nZ^{n-1,r}$ auch für gebrochne n gültig iſt, ſ. 25. Am Ende dieſes Artikels wird ein anderer Beweis dieſer Formel gegeben.

40. Die Lehrſätze, welche Kramp aus dieſer Form einer Facultät zieht (bey ihm nr 61.), können nur für ganze Exponenten gelten. Die Verwandlung einer Differenz in die entgegengeſetzte, welche für ganze Exponenten gilt, (4.), kann nicht für gebrochne angewandt werden. Kramp nimmt ſie auch als für ſolche gültig an, und gründet darauf die Verwandlung einer Integralformel in die Form einer Facultät, bey welcher noch der Übergang einer

Facultät mit einer unendlichen Baſis in eine Potenz zu Hülfe genommen wird.

41. Die zweyte Entwickelung einer Facultät iſt die, welche nach den Potenzen der Differenz geſchieht.

Es ſey $a^{m,r} = a^m + Aa^{m-1}r + Ba^{m-2}r^2 + Ca^{m-3}r^3 + Da^{m-4}r^4 + \text{etc.}$ Da $a^{m,r}$ das Product aus den Factoren $a(a+r)(a+2r)(a+3r)$. etc. iſt, ſo iſt (Buchſtabenrechnung, 19.) A die Summe der Zahlen, 1, 2, 3 ... m − 1; B die Summe der Producte je zweyer; C die Summe der Producte je dreyer; D je vierer, u. ſ. f. Man laſſe für die Zahlen, 1, 2, 3, .. m die Buchſtaben α, β, γ, δ, etc. die gleichnamigen Summen bedeuten, ſo iſt, weil $a^{m+1,r} = (a+mr)a^{m,r}$ iſt nicht allein für ganze Werthe von m, ſondern auch für gebrochne, aus (18.), wenn daſelbſt $n = 1$ geſetzt wird,

$$\alpha = A + m$$
$$\beta = B + mA$$
$$\gamma = C + mB$$
$$\delta = D + mC$$

u. ſ. f.

Nach dieſen Formeln iſt die folgende Tafel berechnet.

m	A	B	C	D	E	F
2	1					
3	3	2				
4	6	11	6			
5	10	35	50	24		
6	15	85	225	274	120	
7	21	175	735	1624	1764	720

Die obigen Formeln ſind rücklaufende.

Jeden Coefficienten, oder jede Summe von Combinationen, unabhängig von den vorhergehenden zu finden, iſt ein Geſchäft der combinatoriſchen Analyſis. Kramp hat zweyerley Aufſöſungen dieſer nicht leichten Auf-

gabe geliefert, aber ohne den Beweis beyzufügen, den mancher Leſer von ihm zu erhalten wünſchen mag.

42. Eine andere, auch rücklaufende Form der Coefficienten iſt folgende.

$$A = \frac{m.m-1}{1.2}.$$

$$2B = \frac{m-1.m-2.}{1.2} A + \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3}.$$

$$3C = \frac{m-2.m-3.}{1.2} B + \frac{m-1\ldots m-3.}{1.2.3} A$$
$$+ \frac{m\ldots m-3.}{1\ldots 4}.$$

$$4D = \frac{m-3.m-4.}{1.2} C + \frac{m-2\ldots m-4.}{1.2.3} B$$
$$+ \frac{m-1\ldots m-4.}{1\ldots 4} A + \frac{m\ldots m-4.}{1\ldots 5}.$$

u. ſ. f.

Es iſt nämlich $(a+mr) \times a^{m,r} = a(a+r)^{m,1}$ aus (6. u. 19.). Da geſetzt iſt $a^{m,r} = a^m + Aa^{m-1} r + Ba^{m-2} r^2 + Ca^{m-3} r^3 +$ etc. ſo iſt auch $(a+r)^{m,1} = (a+r)^m + A(a+r)^{m-1} r + B(a+r)^{m-2} r^2 + C(a+r)^{m-3} r^3 +$ etc. Man entwickele in dieſer letztern Reihe die Potenzen von $a+r$ nach dem binomiſchen Lehrſatze, und multiplicire darauf die Reihe mit a; desgleichen entwickele man das Product aus der Reihe für $a^{m,r}$ in den Factor $a+mr$. Beide Producte gleich geſetzt geben für jeden der Coefficienten, A, B, C, etc. eine Gleichung zur Beſtimmung deſſelben.

43. Umgekehrt laſſen ſich Potenzen der erſten Art, a^m, durch Potenzen der zweyten Art, oder durch Facultäten, ausdrücken. Man ſetze den Unterſchied der Factoren in der Facultät $=1$. Es iſt $a^{m+1,1} = a^{m,1}(a+m)$

nach (5; 18.), alſo iſt $a \,.\, a^{m,1} = a^{m+1,1} - ma^{m,1}$. Mittelſt dieſer Formel kann man die gemeinen Potenzen folgeweiſe in eine Reihe von Facultäten verwandeln. Es iſt.

$$a^{2,1} = a(a+1), \text{ alſo}$$

$$a^2 = a^{2,1} - a^{1,1}.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit a, ſo iſt

$$a^3 = a \,.\, a^{2,1} - a \,.\, a^{1,1}, \text{ das iſt}$$

$$a^3 = a^{3,1} - 3a^{2,1} + a^{1,1}.$$

Daraus iſt

$$a^4 = a^{4,1} - 6a^{3,1} + 7a^{2,1} - a^{1,1}.$$

u. ſ. f.

Allgemein ſey

$$a^m = a^{m,1} - Aa^{m-1,1} + Ba^{m-2,1} - Ca^{m-3,1} + Da^{m-4,1} - \text{etc.}$$

ſo iſt $a^{m+1} =$

$$a^{m+1,1} - (A+m)a^{m,1} + (B+(m-1)A)a^{m-1,1} - (C+(m-2)B)a^{m-2,1} + (D+(m-3)C)a^{m-3,1} - \text{etc.}$$

Hieraus ergeben ſich die Werthe der Coefficienten, wie ſie folgende Tabelle bis zu $m = 9$ darſtellt.

m	A	B	C	D	E	F	G	H
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	3	1	0	0	0	0	0	0
4	6	7	1	0	0	0	0	0
5	10	25	15	1	0	0	0	0
6	15	65	90	31	1	0	0	0
7	21	140	350	301	63	1	0	0
8	28	266	1050	1701	966	127	1	0
9	36	462	2646	6951	7770	3025	255	1

44. In der Reihe der Coefficienten A iſt der erſte Unterſchied derſelben, oder $\Delta A = m$. Hieraus ergiebt

ſich, nach der Differenzenrechnung, (54.), $A = \frac{1}{2}m(m-1)$. Die Reihe der A iſt eine arithmetiſche der zweyten Ordnung.

In der Reihe der B iſt der Unterſchied der Glieder, oder $\Delta B = (m-1) . \frac{m . m-1.}{1.2} = \frac{1}{2}(m^3 - 2m^2 + m)$.

Daraus wird, (a. a. O. 54, 55, 56.).

$$B = \tfrac{1}{24}(3m^4 - 14m^3 + 21m^2 - 10m),$$

oder

$$24B = m.m-1.m-2.3m-5.$$

Da $B = 0$ iſt, für $m = 1$ und $m = 2$, ſo muß der Werth von B die Factoren $m-1$ und $m-2$ haben. Die Reihe der B iſt eine arithmetiſche Reihe der vierten Ordnung.

In der Reihe der C iſt der Unterſchied,

$$\Delta C = (m-2)B = \tfrac{1}{24}m.m-1.m-2.m-2.3m-5.$$
$$= \tfrac{1}{24}(3m^5 - 20m^4 - 49m^3 - 52m^2 + 20m).$$

Man ſetze auf gleiche Art, wie a. a. O. die integrirende Function

$$24C = am^6 - bm^5 + cm^4 - dm^3 + em^2 - fm,$$

ſetze hierin $m+1$ für m, und ziehe die Function 24C von der veränderten $24(C + \Delta C)$ ab, ſo erhält man den Werth von $24\Delta C$, worin die noch unbeſtimmten Coefficienten, a, b, c, d, e, f, enthalten ſind. Die Vergleichung mit dem gegebenen Werthe von $24\Delta C$ giebt die Werthe derſelben, nämlich $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{11}{2}$; $c = \frac{47}{2}$; $d = \frac{97}{2}$; $e = 48$; $f = 18$, ſo daß

$$48C = m^6 - 11m^5 + 47m^4 - 97m^3 + 96m^2 - 36m.$$

Da dieſe Function $= 0$ wird, für $m = 0$; $m = 1$; $m = 2$; $m = 3$, ſo iſt ſie durch $m(m-1)(m-2)(m-3)$ oder $m^3 - 6m^2 + 11m - 6$ theilbar, und der Quotient der Diviſion iſt $m^2 - 5m + 6$, Alſo iſt

$$48C = m.m-1.m-2.m-3.m^2 - 5m + 6.$$

Auf dieſe Art kann man die allgemeinen Ausdrücke für die folgenden Coefficienten erhalten.

45. Leichter geſchieht es auf folgende Art, die an dem Coefficienten C gezeigt werden ſoll. Da ΔC eine ganze

Function von m iſt, die von der erſten bis zur fünften Potenz von m ſteigt, ſo iſt C eine ſolche vom ſechſten Grade, ohne ein unveränderliches Glied. Da ferner C für die Werthe 0, 1, 2, 3, Null iſt, ſo enthält dieſe Function die Factoren m, m−1, m−2, m−3, und einen quadratiſchen $\alpha m^2 - \beta m + \gamma$. Um hierin α, β, γ, zu beſtimmen, muß man drey Werthe von C kennen, als für $m = 4$; $m = 5$; $m = 6$. Nun hat man drey Gleichungen,

I. $1 = 4.3.2.1\ (16\alpha - 4\beta + \gamma)$.

II. $15 = 5.4.3.2\ (25\alpha - 5\beta + \gamma)$.

III. $90 = 6.5.4.3\ (36\alpha - 6\beta + \gamma)$.

Aus dieſen drey Gleichungen wird erhalten $\alpha = \frac{1}{48}$; $\beta = \frac{5}{48}$; $\gamma = \frac{6}{48}$; ſo daß

$$48\,C = m.m-1.m-2.m-3.m^2-5m+6.$$

wie vorher gefunden iſt.

Hieraus erhellt, daß D die Form,

$$\frac{1}{n}\,m.m-1.m-2.m-3.m-4(\alpha m^3-\beta m^2 + \gamma m - \delta)$$

haben müſſe, ſo wie E die Form

$$\frac{1}{p}\,m.m-1\ldots m-5.\alpha m^4-\beta m^3+\gamma m^2-\delta m+\varepsilon.$$

u. ſ. f.

46. Noch einen Weg zur Entdeckung der allgemeinen Werthe dieſer Coefficienten giebt die Differenzenrechnung auf Facultäten angewandt. Dieſes Verfahren lehrt la Croix in dem Traité des différences et des Séries, (§. 903.) welcher den dritten Theil ſeines ſchätzbaren Werks über Differential- und Integralrechnung ausmacht. Es iſt aus (25.), oder durch unmittelbare Entwickelung,

$$(m+1)^{n+1,-1} - m^{n+1,-1} = (n+1)m^{n,-1}.$$

Es ſey $\Delta M = m^{n,-1}$, ſo iſt $M = \frac{1}{n+1}\,m^{n+1,-1}$.

In der Reihe der A iſt $\Delta A = m$, alſo iſt $n = 1$, und $A = \frac{1}{2} m^{2,-1}$.

In der Reihe der B iſt $\Delta B = (m-1)A = \frac{1}{2}(m-1)m^{2,-1} = \frac{1}{2}(m-2)m^{2,-1} + \frac{1}{2}m^{2,-1} = \frac{1}{2}m^{3,-1} + \frac{1}{2}m^{2,-1}$. Alſo iſt $B = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}m^{4,-1} + \frac{1}{3}m^{3,-1})$.

In der Reihe der C iſt $\Delta C = (m-2)B = \frac{1}{24}(3(m-2)m^{4,-1} + 4(m-2)m^{3,-1})$. Es iſt $(m-2)m^{4,-1} = (m-4)m^{4,-1} + 2m^{4,-1} = m^{5,-1} + 2m^{4,-1}$, und $(m-2)m^{3,-1} = (m-3)m^{3,-1} + m^{3,-1} = m^{4,-1} + m^{3,-1}$; alſo $\Delta C = \frac{1}{24}(3m^{5,-1} + 10m^{4,-1} + 4m^{3,-1}$.
Daraus iſt

$$C = \frac{1}{24}\left(\frac{3}{6}m^{6,-1} + \frac{10}{5}m^{5,-1} + \frac{4}{4}m^{4,-1}\right)$$

$$= \frac{1}{48}(m^{6,-1} + 4.m^{5,-1} + 2m^{4,-1}).$$

Die Entwickelung dieſer Formeln giebt dieſelben Werthe mit den vorher gefundenen.

47. Die Potenzen laſſen ſich auch durch Facultäten mit ſubtractiven Unterſchieden der Factoren darſtellen. Es iſt nämlich $a^{m+1,-1} = a^{m,-1}(a-m)$, aus (18.), oder bey ganzen Exponenten m durch unmittelbare Entwickelung. Alſo iſt $a.a^{m,-1} = a^{m+1,-1} + ma^{m,-1}$.
Nun iſt $a = a^{1,-1}$, dadurch

$$a^2 = a^{2,-1} + a^{1,-1}.$$

Hieraus iſt

$$a^3 = a^{3,-1} + a^{2,-1}$$
$$\quad + 2a^{2,-1} + a^{1,-1}$$
$$= a^{3,-1} + 3a^{2,-1} + a^{1,-1}.$$

Allgemein ſey

$$a^{m} = a^{m,-1} + Aa^{m-1,-1} + Ba^{m-2,-1} + Ca^{m-3,-1} + Da^{m-4,-1} + \text{etc.}$$

ſo iſt

$$a^{m+1} = a^{m+1,-1} + (A+m)a^{m,-1} + (B+(m-1)A)a^{m-1,-1} + (C+(m-2)B)a^{m-2,-1} + \text{etc.}$$

Die Coefficienten ſind hier dieſelben wie in (43.), abſolut genommen, ohne Rückſicht auf die Vorzeichen.

48. Die Reihe der Coefficienten A, B, C, etc. läßt ſich rückwärts fortſetzen, indem man m negativ nimmt. Alsdann bekommen die Potenzen negative Exponenten, oder werden das Reciproke der Potenzen mit poſitiven Exponenten. Es iſt zu unterſuchen, ob jene Formeln und dieſe umgekehrten Potenzen zuſammen gehören. Die Brüche,

$$\frac{1}{(a+1)^{m,1}} + \frac{A}{(a+1)^{m+1,1}} + \frac{B}{(a+1)^{m+2,1}} + \frac{C}{(a+1)^{m+3,1}} + \text{etc.}$$

ſollen in den Zählern ſo beſtimmt werden, daß ihre Summe $= a^{-m}$ wird. Dieſes iſt der erſte Theil des Quotienten, welchen die Entwickelung des erſten Bruches, oder des $\frac{1}{a+1.a+2\ldots.a+m.}$ giebt. Alle übrigen Theile der Reihe, in welche dieſer Bruch verwandelt wird, und die Reihen, welche aus den übrigen Brüchen entſtehen, heben ſich gegen einander auf.

49. Es iſt $a^{-m,-1} = \frac{1}{(a+1)^{m,1}}$,

und $a^{-m-1,-1} = \frac{1}{(a+1)^{m+1,1}}$, nach (11.). Da $(a+1)^{m,1} : (a+1)^{m+1,1} = 1 : a+1+m$, nach

(9.), ſo iſt $a^{-m,-1} : a^{-m-1,-1} = a+1+m : 1$, und $a.a^{-m-1,-1} = a^{-m,-1} - (m+1)a^{-m-1,-1}$.

Es ſey nun

$$a^{-m} = a^{-m,-1} + Aa^{-m-1,-1} + Ba^{-m-2,-1} + Ca^{-m-3,-1} + Da^{-m-4,-1} + \text{etc.}$$

ſo iſt

$$a^{-m+1} = a^{-m+1,-1} + (A-m)a^{-m,-1} + (B-(m+1)A)a^{-m-1,-1} + (C-(m+2)B)a^{-m-2,-1} + (D-(m+3)C)a^{-m-3,-1} \text{ etc.}$$

Man nehme zuerſt $m=1$, ſo iſt $a^{-m+1} = a^0 = 1$; und $a^{-m+1,-1} = a^{0,-1} = 1$, nach (12.), alſo $0 = (A-1)a^{-1,-1} + (B-2A)a^{-2,-1} + (C-3B)a^{-3,-1} + (D-4C)a^{-4,-1} + \text{etc.}$ Damit der Werth dieſer Reihe von der Baſis a der Facultäten unabhängig ſey, müſſen die Coefficienten $=0$ ſeyn. Demnach iſt, für $m=1$; $A=1$; $B=2$; $C=6$; $D=24$; $E=120$; etc. Die Coefficienten ſind nun folgende,

m	A	B	C	D	E
1	1	2	6	24	120
2	3	11	50	274	1764
3	6	35	225	1624	13132
4	10	85	735	6769	54152
5	15	175	1960	22449	256193

u. ſ. f.

Die Übereinſtimmung mit den Coefficienten in der Reihe für $a^{m,r}$, §. 41. iſt merkwürdig.

50. Die Differenzen, welche in dieſen Reihen gegeben werden, ſind die jedes Gliedes von dem vorhergehenden, nicht wie in dem Falle (43.) des Gliedes von dem folgenden. Folglich ſind A, B, C, etc. ſolche Functionen

von m, die durch die Subſtitution von $m-1$ für m einen Werth erhalten, der von dem erſtern Werthe den gegebenen Unterſchied hat, nämlich A den Unterſchied m; B den $(m+1)A$; C den $(m+2)B$, u. ſ. f. Hieraus kann man nach der Methode in (44.) die Formeln für die Coefficienten finden, indem man $m-1$ ſtatt m in der noch unbeſtimmten Function von m ſetzt, und die Differenz beider Werthe mit der gegebenen vergleicht, um die noch unbekannten Coefficienten von m zu beſtimmen.

51. Oder man gebrauche die Differenzenmethode in (46.), mit der Abänderung, die wegen der Entgegenſetzung der Differenzen nöthig iſt. Aus (25.) iſt $a^{m,1}-(a-1)^{m,1} = ma^{m-1,1}$, oder wenn man für die Baſis a ſetzt m, und den Exponenten $=n+1$ ſtatt m nimmt,

$$m^{n+1,1}-(m-1)^{n+1,1}=(n+1)m^{n,1}.$$

Dieſe Formel enthält auch den Unterſchied eines folgenden Gliedes in der Reihe der Facultäten mit dem Exponenten $n+1$ von dem vorhergehenden. Iſt nun $\Delta M = m^{n,1}$, ſo iſt $M = \frac{m^{n+1,1}}{n+1}$. Dadurch ergeben ſich die Werthe der Coefficienten folgendergeſtalt.

Es iſt $\Delta A = m$, alſo iſt $A = \frac{1}{2}m^{2,1}$. Ferner iſt $\Delta B = (m+1)A = \frac{1}{2}(m+1)m^{2,1} = \frac{1}{2}(m+2)m^{2,1} - \frac{1}{2}m^{2,1} = \frac{1}{2}m^{3,1} - \frac{1}{2}m^{2,1}$. Daher

$$B = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}m^{4,1} - \tfrac{1}{8}m^{3,1}).$$

Ferner iſt $\Delta C = (m+2)B$. Nun iſt $(m+2)m^{4,1} = (m+4)m^{4,1} - 2m^{4,1} = m^{5,1} - 2m^{4,1}$; auch $(m+2)m^{3,1} = (m+3)m^{3,1} - m^{3,1} = m^{4,1} - m^{3,1}$. Folglich iſt

$$\Delta C = \tfrac{1}{8}m^{5,1} - \tfrac{5}{12}m^{4,1} + \tfrac{1}{6}m^{3,1}$$

und daraus

$$C = \tfrac{1}{48}m^{6,1} - \tfrac{1}{12}m^{5,1} + \tfrac{1}{24}m^{4,1}.$$

oder $C = \frac{1}{48}(m^{6,1} - 4m^{5,1} + 2m^{4,1})$.

Die hier gefundenen Werthe von A, B, C, entſtehen aus denen in (46.), wenn daſelbſt für m geſetzt wird $-m$. So verhalten ſich auch die entwickelten Werthe beiderſeits. Die Reihen für die Potenzen von a^{+m} und a^{-m} machen eine zuſammenhangende Folge aus, ſo wie die Potenzen ſelbſt.

52. Um eine Reihe von Facultäten mit additiven Differenzen zu haben, ſetze man

$$a^{-m} = a^{-m,1} - Aa^{-m-1,1} + Ba^{-m-2,1}$$
$$- Ca^{-m-3,1} + Da^{-m-4,1} - \text{etc.}$$

Es iſt, vermittelſt (9 oder 14.)

$$a^{-m+1,1} = (a-m)\,a^{-m,1}$$

alſo $$a.a^{-m,1} = a^{-m+1,1} + m.a^{-m,1}.$$

Dadurch iſt

$$a^{-m+1} = a^{-m+1,1} - (A-m)\,a^{-m,1}$$
$$+ (B-(m+1)A)\,a^{-m-1,1}$$
$$- (C-(m+2)B)\,a^{-m-2,1}$$
$$+ (D-(m+3)C)\,a^{-m-3,1} - \text{etc.}$$

Die Coefficienten A, B, C, etc. haben eben dieſelben abſoluten Werthe wie in (49.), nur ſind ſie zum Theil in den Vorzeichen von jenen verſchieden.

53. Noch füge ich eine ſehr einfache Deduction des erweiterten binomiſchen Lehrſatzes aus dem angeführten Werke von la Croix §. 904. bey.

Es iſt (aus 25.)

$$(a+1)^{n,-1} = a^{n,-1} + na^{n-1,-1}$$
$$(a+2)^{n,-1} = (a+1)^{n,-1} + n(a+1)^{n-1,-1}$$
$$(a+3)^{n,-1} = (a+2)^{n,-1} + n(a+2)^{n-1,-1}$$

u. ſ. f.

Hier müſſen nun rechter Hand die Facultäten auf dieſelbe Baſis a reducirt werden. Dieſes geſchieht durch Subſtitutionen aus den vorhergehenden Werthen. Es iſt dadurch

$$(a+2)^{n,-1} = a^{n,-1} + 2na^{n-1,-1}$$
$$+ n.n-1.a^{n-2,-1},$$

indem nämlich in der erſten Formel n mit n — 1 vertauſcht wird. Mittelſt dieſer gefundenen Formel wird auf ähnliche Art erhalten

$$(a+3)^{n,-1} = a^{n,-1} + 3na^{n-1,-1}$$
$$+ 3n(n-1)a^{n-2,-1} + n.n-1.n-2.a^{n-3,-1}.$$

Hier entdeckt ſich ſchon ein Geſetz der Formation, Die Factoren, welche von n abhangen, ſind Facultäten mit der Baſis n und Differenz — 1. Die numeriſchen ſind Binomialcoefficienten. Man ſetze

$$(a+b)^{n,-1} = a^{n,-1} + An^{1,-1}.a^{n-1,-1}$$
$$+ Bn^{2,-1}.a^{n-2,-1} + Cn^{3,-1}.a^{n-3,-1}$$
$$+ Dn^{4,-1}.a^{n-4,-1} + En^{5,-1}.a^{n-5,-1} + \text{etc.}$$

wo die Coefficienten A, B, C, etc. Functionen von b ſind.

Nun ſetze man $a+1$ für a, ſo iſt $(a+1+b)^{n,-1}$
$= (a+1)^{n,-1} + An^{1,-1}(a+1)^{n-1,-1} + Bn^{2,-1} \times$
$(a+1)^{n-2,-1} + Cn^{3,-1}(a+1)^{n-3,-1} + \text{etc.}$

Mittelſt der Formel für $(a+1)^{n,-1}$ verwandle man die Facultäten mit der Baſis $a+1$ in Facultäten mit der Baſis a, indem man folgeweiſe für n ſetzt n, n — 1, n — 2, u. ſ. f. Dadurch werden die Coefficienten von $a^{n,-1}$, $a^{n-1,-1}$ u. ſ. w. in der Facultät $(a+1+b)^{n,-1}$ folgende,

$$1 \,\|\, (A+1)n^{1,-1} \,\|\, (B+A)n^{2,-1} \,\|\, (C+B)n^{3,-1} \,\|$$
$$(D+C)n^{4,-1} \,\|\, (E+D)n^{5,-1} \,\|\, + \text{ete.}$$

Die Coefficienten in der Facultät mit der Baſis $a+1+b$ werden aus denen in der Facultät mit der Baſis $a+b$ eben ſo zuſammengeſetzt, wie die Binomialcoefficienten in einer Potenz aus denen in der nächſtvorhergehenden. Nun ſind ſie für die Baſes, $a+1$; $a+2$; $a+3$, die Binomialcoefficienten zu den Potenzen mit den Exponenten 1,

2, 3, alſo ſind die Coefficienten für die Baſes, $a+4$; $a+5$; u. ſ. f. die Binomialcoefficienten zu den Potenzen mit den Exponenten 4, 5, etc. folglich iſt

$$A = b = \frac{1}{1}\, b^{1,-1};\ B = \frac{b.b-1.}{1.2} = \frac{1}{1.2}\, b^{2,-1}.$$

$$C = \frac{b.b-1.b-2.}{1.2.3} = \frac{1}{1.2.3}\, b^{3,-1};\ \text{u. ſ. f.}$$

Setzt man die Diviſoren zu den Facultäten von n, ſo verwandeln ſich dieſe in die Binomialcoefficienten zu der nten Potenz, und es iſt, wenn dieſe durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, etc. bezeichnet werden,

$$(a+b)^{n,-1} = a^{n,-1} + \mathfrak{A}a^{n-1,-1}\,.\,b^{1,-1}$$
$$+ \mathfrak{B}a^{n-2,-1}\,.\,b^{2,-1} + \mathfrak{C}a^{n-3,-1}\,.\,b^{3,-1}$$
$$+ \mathfrak{D}a^{n-4,-1}\,.\,b^{4,-1} + \text{etc.}$$

wie in 39. La Croix bleibt bey der erſtern Form von $(a+b)^{n,-1}$ ſtehen. Die zweyte aber macht die Formel dem binomiſchen Lehrſatze ganz ähnlich.

Fälle, mögliche ſ. Wahrſcheinlichkeitsrechnung.

Falſche Wurzel einer Gleichung, bey manchen ältern Algebraiſten eine unſchickliche Benennung für negative Wurzel einer Gleichung, ſ. Algebra Th. I. S. 58. und Entgegengeſetzte Größen.

Familie krummer Linien iſt der Inbegriff aller krummen Linien, die unter dieſelbe Gleichung von einem unbeſtimmten Grade gehören. Eine ſolche Gleichung ſey z. B. dieſe: $a^{m-1}x = y^m$, ſo begreift dieſe die Gleichungen; $ax = y^2$; $a^2x = y^3$; $a^3x = y^4$; u. ſ. f. Alle die krummen Linien, die durch dieſe Gleichungen beſtimmt werden, gehören unter eine Familie. Das Wort hat alſo mit Geſchlecht (genus) einerley Bedeutung.

Fehler, eine Abweichung von der richtigen und ſcharfen Beſtimmung einer Größe, iſt in arithmetiſchen

und analytiſchen Berechnungen oft unvermeidlich, wegen der Form, in welcher die Größen ſich darſtellen. So können die irrationalen Wurzeln von Zahlen und Gleichungen, nicht vollkommen durch die Einheit und ihre Theile angegeben werden. Alle Reihen-Ausdrücke laſſen einen Theil des Ganzen zurück. Man muß deswegen auf gute Annäherungs-Methoden bedacht ſeyn, um mit dem kleinſten Aufwand an Rechnung die möglichſte Verminderung des Fehlers zu erhalten. Es iſt auch nöthig, die Gränzen zu kennen, welche der übrig gelaſſene Fehler nicht überſteigt.

In der angewandten Mathematik ſind Fehler unvermeidlich, weil die Größen, die durch Beobachtung gegeben werden, nie vollkommen genau zu erhalten ſtehen, es ſey wegen der Werkzeuge ſelbſt, oder wegen ihrer Anwendung. Man muß daher, wenn man die Gränze des Fehlers in den Datis ſchätzen kann, die daraus entſpringenden Fehler in den Reſultaten beſtimmen. Dazu thut die Differentialrechnung nützliche Dienſte. Der Fehler der Beobachtung oder der Angabe wird als eine Differentialgröße betrachtet, und eben ſo der Fehler in dem Reſultate.

Von Cotes iſt eine Abhandlung: aeſtimatio errorum in mixta Matheſi, bey ſeiner Harmonia menſurarum, und in den Oper. miſcell. Lemgoviae 1768. Es werden darin Formeln zur Beſtimmung der Fehler in der Berechnung geradlinichter und ſphäriſcher Dreyecke gegeben, wenn eine Seite oder ein Winkel ein wenig unrichtig angenommen iſt. S. Trigonometriſche Formeln. In der Aſtronomie und in der Feldmeßkunſt iſt es ſehr nöthig, Formeln zur Schätzung der Fehler zu haben, die von der Unrichtigkeit der Werkzeuge, ihrer Stellung, und von der Beobachtung ſelbſt herrühren. Viele dergleichen ſind in Käſtners aſtron. Sammlungen, und was das Feldmeſſen betrifft, in Mayers praktiſcher Geometrie anzutreffen.

Fermats Lehrſätze von den Polygonalzahlen: Jede (ganze) Zahl iſt entweder eine Triangularzahl, oder iſt aus zwey oder drey Triangularzahlen zuſammengeſetzt.

Jede Zahl iſt entweder ein Quadrat, oder ſie iſt aus zwey, drey oder vier Quadraten zuſammengeſetzt. Jede Zahl iſt eine Pentagonalzahl, oder iſt aus zwey, drey, vier oder fünf Pentagonalzahlen zuſammengeſetzt. Auf gleichförmige Art verhält es ſich mit den Hexagonal- Heptagonal- und allen übrigen Polygonalzahlen, nach Maaßgabe der Anzahl ihrer Winkel.

Fermat hat dieſe höchſt merkwürdige Folge von Sätzen als Anmerkung in Bachets Ausgabe des Diophantus zu der 31ſten Aufgabe im IV. B beygefügt. Der Beweis, ſagt er, beruhe auf vielen mannigfaltigen und ſehr verſteckten Eigenſchaften der Zahlen, weswegen er denſelben nicht mittheilen könne; er hätte dazu ein eigenes Werk beſtimmt, worin er die Arithmetik durch dieſe Unterſuchungen beträchtlich erweitern würde. Dieſes Werk iſt aber nicht erſchienen; und in der nicht ſtarken Sammlung ſeiner Werke kommt auch nichts darüber vor.

Die Aufgabe des Diophantus, bey welcher jene Sätze angeführt werden, iſt folgende: Vier Quadratzahlen zu finden, deren Summe mit der Summe ihrer Wurzeln zuſammengenommen eine gegebene Zahl ausmachen. Diophantus fordert hiezu, daß eine gegebene Zahl in vier Quadrate getheilt werde, ohne doch vorher die Art, wie dieſes zu bewerkſtelligen ſey, gezeigt zu haben. Er verſteht aber nicht bloß ganze Zahlen, ſondern nimmt auch gebrochne Zahlen zu den Theilen, wie in dem Beyſpiele ſeiner Aufloſung. Bachet zeigt in der Anmerkung zu der Aufgabe, an den Zahlen von 1 bis 120, daß ſie alle in vier oder weniger Quadrate ganzer Zahlen zerlegbar ſind, wenn ſie nicht ſelbſt ein Quadrat ſind.

Euler hat den Satz von der Zerlegung jeder ganzen Zahl in vier oder weniger Quadrate zu beweiſen geſucht, in den Comment. novis Acad. Petrop. T. V. Den Beweis hat er aber hernach ſelbſt für nicht genugthuend erkannt. La Grange hat in den Nouveaux Mémoires de l'Acad. de Berlin, T. I. 1770. einen ſcharfſinnigen Beweis gegeben, der aber ſchwer und tief geſchöpft iſt. Hernach hat Euler aufs neue den Satz vorgenom-

men, in den Actis Acad. Petrop. T. I. P. II. a. a. 1777. Er geſteht dabey ein, daß ſein Beweis dem Fermatſchen nachſtehen möge, da dieſer auch die andern Zuſammenſetzungen aus Polygonalzahlen habe begreifen ſollen. Dieſen Vorzug räumt er auch in einer andern Abhandlung, de uſu obſervationum in Matheſi pura, Commentarii novi Petrop. T. VI. ein. Gauß hat in den Disquiſitionibus arithmeticis, §. 291. ff. erſtlich erwieſen daß die ganzen Zahlen von der Form 8M + 3 ſich in drey ungerade Quadrate zerlegen laſſen: daß daher jede ganze poſitive Zahl in drey Trigonalzahlen zerlegbar iſt, und dann, daß jede ganze poſitive in vier Quadrate ſich zerlegen läßt, wobey die Null und ihr Quadrat mit aufgenommen werden. Beguelin hat ſich auch mit den Lehrſätzen über die Zerlegung in Trigonal- und Quadrat-Zahlen beſchäftigt, Nouveaux Mem. de l'Acad. de Berlin, pour 1773; 1774. aber ſeine Erweiſe ſind nicht überzeugend; er nimmt ſogar metaphyſiſche Gründe zu Hülfe.

Fermat hat manche ſcharfſinnige Entdeckungen über die Zuſammenſetzung und Zerlegung der Zahlen gemacht. Er wird für den größten Meiſter in dieſer höhern Arithmetik anerkannt. Vielleicht hat er manche Sätze durch empiriſche Bemerkungen gefunden, und dann die Beweiſe geſucht. Es iſt ſehr Schade, daß dieſe alle verloren gegangen ſind. Sie zu finden hat den beſten neuern Analyſten Mühe gemacht, wovon der angeführte Satz ein Beyſpiel iſt.

Hier folgen noch ein paar Sätze, die man nach Fermat benennt.

I. Es ſey p eine Primzahl, und a nicht durch p theilbar, ſo iſt $a^{p-1} - 1$ durch p theilbar.

II. Jede Primzahl von der Form 4n + 1 iſt die Summe zweyer Quadrate.

Den erſtern Satz trägt Fermat nicht ganz ſo vor, wie er hier nach Euler und Gauß angegeben iſt. In der Sammlung ſeiner Werke, S. 163. lautet der Satz ſo: In jeder Reihe von Potenzen, a, a^2, a^3, a^4. etc. iſt eine derſelben a^m, um 1 vermindert, d. i. $a^m - 1$, durch

eine gegebene Primzahl p theilbar, und der Exponent m jener Potenz iſt ein Theiler von $p-1$. Ferner, nachdem die erſte Potenz, welche die verlangte Beſchaffenheit hat, gefunden iſt, ſo iſt jede, unter den folgenden, deren Exponent ein Vielfaches, mn, von dem Exponenten jener iſt, eben ſo beſchaffen, oder $a^{mn}-1$ iſt durch p theilbar. Ich habe nur die Bezeichnungen beygefügt.

Exempel. Es ſey $a=5$, $p=13$; $p-1=12$; ſo iſt m ein Theiler von 12. Verſucht man 4 für m, ſo findet ſich 5^4-1, d. i. 624, durch 13 theilbar. Oder es ſey $p=17$, und $p-1=16$. Hier thut kein Theiler von 16 Genüge, als die Zahl ſelbſt, und $5^{16}-1$ iſt durch 17 theilbar.

Der zweyte Theil des Satzes iſt leicht erwieſen. Es ſey $a^m-1=A$, ſo iſt $a^m=A+1$, und $a^{mn}=(A+1)^n$, alſo $a^{mn}-1=A^n+nA^{n-1}+$ etc. wo in allen Theilen rechter Hand der Factor A enthalten iſt. Da A durch p theilbar iſt, ſo iſt das Ganze, alſo $a^{mn}-1$, durch dieſelbe Zahl theilbar.

Hingegen iſt nicht jede Primzahl ein Theiler von einer der um 1 vergrößerten Potenzen. Wenn die erſte, welche um 1 vermindert durch die Primzahl p theilbar iſt, einen ungeraden Exponenten hat, ſo iſt in der ganzen Reihe keine Potenz anzutreffen, welche a^m+1 durch jene Primzahl theilbar giebt. Fermat findet durch einen künſtlichen Prozeß Primzahlen, welche eine Potenz mit einem ungeraden Exponenten, nachdem ſie um 1 vermindert iſt, ohne Reſt theilen.

Euler hat den Satz I. auf zweyerley Art erwieſen, zuerſt in den ältern Commentarien der Petersburger Akademie, T. VIII. p. 143. und in den neuern, T. VII. p. 70. In dem ſechſten Bande der ältern, S. 106. trägt er den Satz vor, daß a^n-b^n immer durch $n+1$ theilbar ſey, wenn $n+1$ eine Primzahl iſt, die in a und b nicht aufgeht, aber mit der Bemerkung, daß er denſelben nicht erweiſen könne, ob er gleich von der Richtigkeit ſich völlig verſichert halte. Gauß hat in ſeinen Disquiſitionibus

arithmeticis, ſect. III. den zweyten Euleriſchen Beweis gebraucht.

Der Satz II. iſt von Euler in den Comm. novis Acad. Petrop. T. V. erwieſen. Fermat trägt den Satz mit einer Erweiterung in einer Anmerkung zu Bachets Ausgabe des Diophantus p. 127., folgendergeſtalt vor: Numerus primus, qui ſuperat unitate quaternarii multiplicem ſemel tantum eſt hypotenuſa trianguli rectanguli, ejus quadratus bis, cubus 3, quadratoquadratus 4. etc. in infinitum. Es iſt aber das Quadrat von 17 oder 289 nur in die Quadrate 225 + 64 zerlegbar, der Cubus von 5 oder 125 nur in die Quadrate 121 + 4, und 100 + 25. Man muß alſo das Quadrat von Null mit zählen.

Fermat iſt doch durch die Induction einmahl zum Irrthum verleitet worden. Er ſagt in den Opp. mathem. p. 115, daß alle Zahlen von der Form $2^{2^m} + 1$ Primzahlen ſind, als 3, 5, 17, 257, 65537, etc. oder, wie er es mit Worten giebt, numeros a binario quadratice in ſe ductos et unitate auctos eſſe ſemper numeros primos. In dem vorher angeführten Schreiben pag. 162. geſteht er, daß er den Satz noch nicht habe beweiſen können, aber doch an der Richtigkeit deſſelben nicht zweifle. Allein ſchon die Zahl 2^{2^5} oder $2^{32} = 4294967296$ fügt ſich, nach Eulers Bemerkung (Comm. Petr. vet. T. VI. p. 104.), nicht in das Geſetz. Dieſe um 1 vergrößert iſt durch 641 theilbar.

Figur iſt eine durch Flächen oder durch Linien ganz begränzte Ausdehnung. Die erſtere nennt man gewöhnlicher einen Körper oder ein Solidum. Die zweyte, die durch Linien begränzte, iſt entweder eine ebene oder unebene (krummflächige) Figur. Die unebene muß die Lage ihrer Theile ſtetiger Weiſe ändern, wie ein ſphäriſches Dreyeck oder Vieleck, ſonſt iſt ſie nicht Eine, ſondern eine zuſammengeſetzte Figur. Die ebene iſt entweder bloß von geraden Linien eingeſchloſſen, eine geradlinichte, oder von einer ſtetigen zuſammenhangenden

krummen Linie, eine krummlinichte, wie Kreis und Ellipſe, oder von krummen und geraden, eine gemiſchtlinichte.

Figur bedeutet auch jede Zeichnung, die zum Verſtändniß eines Beweiſes und einer Auflöſung beygefügt wird. Bloße Linien und Winkel, zuſammengeſetzte Figuren, Abbildungen von ſinnlichen Gegenſtänden heißen in dieſem Verſtande Figuren. Es iſt ſehr nöthig, daß dieſe gut und deutlich gezeichnet werden. Man muß die Durchſchnittspuncte der Linien einander nicht zu nahe, noch weniger zwey verſchiedene in einen fallen laſſen. Linien, die nicht parallel oder ſenkrecht auf einander ſeyn ſollen, müſſen nicht es zu ſeyn ſcheinen. Die ſich auf einander beziehenden Puncte hat man mit ähnlichen Buchſtaben zu bezeichnen; auch die Linien, die bloß zur Demonſtration dienen, durch einen punctirten Zug zu unterſcheiden, und die richtigen Verhältniſſe der Linien, wo es ſich wegen des Raums thun läßt, zu beobachten; kurz in allem für eine deutliche und genaue Darſtellung zu ſorgen. Insbeſondere hat man bey Zeichnungen, worin die Linien in verſchiedenen Ebenen liegen, darauf zu ſehen, daß keine Verwirrung entſtehe. Bey körperlichen Gegenſtänden wird man durch Schatten der Vorſtellung Deutlichkeit geben, nur daß dieſer nicht den Buchſtabenbezeichnungen hinderlich werde.

Figuren heißen auch zuweilen die Zahlziffern, im Engliſchen heißen dieſe gewöhnlich figures.

Figur eines Durchmeſſers in der Ellipſe und Hyperbel heißt das Rechteck von demſelben und ſeinem Parameter.

Allgemeine Bemerkungen über die geradlinichten Figuren

1. Die geradlinichten Figuren werden erſtlich nach der Anzahl ihrer Seitenlinien unterſchieden: dreyſeitige, vierſeitige . . . vielſeitige; oder nach der Anzahl der Winkel, wofür wir im Deutſchen die Endung Eck gebrauchen: Dreyeck, Viereck . . . Vieleck. Zweytens nach den Verhältniſſen der Seiten unter ein-

ander: gleichſeitige, ungleichſeitige Figuren. Drittens nach den Verhältniſſen der Seiten und Winkel zugleich. Sind dieſe, ſo wie jene, unter ſich ungleich, ſo iſt die Figur eine unregelmäßige; ſind jene, ſo wie dieſe, alle einander gleich, ſo iſt die Figur eine regelmäßige; ſind die Seiten einander gleich, die Winkel aber nicht, oder umgekehrt, ſo mag man die Figur eine halb regelmäßige nennen. Zwey Figuren, von einerley Anzahl Seiten oder Winkel ſind entweder ähnlich oder unähnlich, ſ. Ähnlichkeit. Von zwey Figuren kann die eine eine eingeſchriebene, die andere eine umgeſchriebene ſeyn.

2. In einer geradlinichten Figur werden drey auf einander folgende Beſtimmungsſtücke des Umfangs, als eine Seite mit den beiden anliegenden Winkeln, oder zwey Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel, wie auch drey auf einander folgende Winkel, durch die übrigen angenommenen gegeben. Dieſes dient zu einer Probe bey Feldvermeſſungen. Wenn man die gemeſſenen Seiten und Winkel eines Feldes, jene nach einem verjüngten Maaßſtabe aufs Papier trägt, ſo müſſen die drey Beſtimmungen, welche auf eine jener drey Arten aus den übrigen ſich ergeben, mit den auf dem Felde gemeſſenen übereinſtimmen.

3. Die Summe aller Winkel einer geradlinichten Figur iſt zweymahl ſo viel rechten gleich, als die Figur Seiten hat, weniger vier rechten. Denn man ziehe aus einem Puncte innerhalb der Figur nach allen Ecken gerade Linien, ſo erhält man ſo viele Dreyecke als die Figur Seiten hat. Die Summe ihrer Winkel, ohne die Winkel um jenen Punct, welche vier rechte ausmachen, iſt die Summe der Winkel der Figur.

4. Wenn eine Figur lauter auswärts liegende (ausſpringende, angles ſaillans) Winkel (unter zwey Rechten) hat, ſo iſt die Summe aller äußern Winkel vier Rechten gleich. Ein äußerer Winkel iſt der Nebenwinkel des innern, oder der Unterſchied deſſelben von zwey rechten.

5. Der äußere Winkel eines einwärts liegenden (einſpringenden, angle rentrant) Winkels ſey der Überſchuß

deſſelben über zwey rechte, ſo iſt die Summe der äußern Winkel, die zu ausſpringenden Winkeln gehören, ſo groß als vier rechte mit den äußern Winkeln, die zu den einſpringenden gehören. Denn man ſchneide einen einwärts liegenden Winkel, oder alle die auf einander folgenden dieſer Art, durch eine gerade Linie, wie in (Fig. 31.) die Winkel, C, D, E, zwiſchen den ausſpringenden, ABC, EFG, durch die gerade BF ab, ſo ſind in der Figur BCDEFB alle äußern Winkel vier rechten gleich, und, wenn man die äußern bey B und F beiderſeits wegnimmt, die äußern bey C, D, E gleich den beiden innern, CBF, EFB. Man ſetze nun anſtatt der Figur mit den einſpringenden Winkeln irgend eine andere mit lauter ausſpringenden Winkeln, welche nur mit jener die Seiten AB, FG gemein habe, aber ſtatt der Seiten BC, CD, DE, EF die einzige BF hat. In dieſer iſt die Summe aller äußern Winkel vier rechten gleich; in der erſten Figur ſind die beiden äußern Winkel bey B und F um die beiden, CBF, EFB größer als in der zweyten, das iſt, um die Summe der äußern Winkel neben den einſpringenden der erſtern Figur. — So verhält es ſich bey allen Theilen des Umfanges, wo einſpringende Winkel vorkommen.

6. Setzt man den äußern Winkel bey einem einwärts liegenden negativ, da der Unterſchied des innern von zwey rechten demjenigen bey auswärtsliegenden entgegengeſetzt iſt, ſo bleibt die Summe aller äußern Winkel in allen Fällen vier rechten gleich.

Verwandlung der geradlinichten Figuren.

7. Ein Parallelogramm wird in ein anderes ihm gleiches über derſelben Grundlinie verwandelt, wenn die dieſer Linie gegen überliegende Seite verlängert, und durch die Endpuncte jener bis an dieſe verlängerte Seite Parallelen gezogen werden.

8. Ein Dreyeck wird in ein anderes ihm gleiches über derſelben Grundlinie verwandelt, wenn durch den gegenüberliegenden Winkelpunct einer dieſer Linie parallele, und

an einen Punct dieſer letztern von den Endpuncten jener gerade Linien gezogen werden.

9. Ein Parallelogramm ABCD (Fig. 26.) in ein anderes ihm gleiches mit der gegebenen AE als einer Seitenlinie zu verwandeln, trage man auf der verlängerten DA dieſe AE von A nach E; ziehe durch E die parallele EF mit AB, bis an die nach F verlängerte CB, dann FAG bis an die nach G verlängerte CD; durch G ziehe man mit AD die parallele GHK, welche die verlängerten BA, FE jene in H, dieſe in K ſchneide, ſo iſt das Parallelogramm AHKE mit der Seitenlinie HK oder AE dem ABCD gleich. — Denn die Dreyecke GCF, FKG ſind gleich, auch die Dreyecke GDA, AHG, und die Dreyecke ABF, FEA. Daher bleibt, gleiches von gleichem abgezogen, gleiches, das Pgrm AC gleich dem Pgrm AK.

10. Wegen der ähnlichen Dreyecke FAE, AGH iſt AE : EF = GH : AH, das iſt, AE : AB = AD : AH. Die Seiten zweyer gleichwinklichten und gleich großen Parallelogrammen ſind wiederkehrend proportional, oder die Seiten des einen ſind die mittlern Glieder der Proportion, in welcher die Seiten des andern die äußern Glieder ſind.

11. Man ziehe BE und DH, ſo ſind die Dreyecke BAE, HAD einander ähnlich (Dreyeck, 6. Nr. 2.); die Winkel ABE, AHD, welche den gleichnamigen Seiten AE, AD gegen über ſtehen, ſind gleich; daher BE parallel mit HD.

12. Wenn die Seiten zweyer gleichwinklichten Parallelogrammen wiederkehrend proportional ſind, ſo ſind dieſe gleich groß. Dieſe Parallelogrammen ſeyn AC, AK, in welchen AE : AB = AD : AH iſt. Man ſtelle ſie ſo zuſammen, daß die Seiten AB, AH, ſo wie AD, AE in gerader Richtung liegen, und vollende die Pgrmme AF, AG, worin die Diagonalen AF, AG gezogen werden. Da AE : AB = AD : AH iſt, ſo iſt AE : EF = GH : AH, und die Dreyecke, AEF, GHA, worin die Winkel, E, H, gleich ſind, ſind ſich ähnlich; alſo iſt der

W. AFE = GAH, daher W. BAF = GAH, und die Diagonalen AF, AG liegen in gerader Richtung, ſo daß GAF die Diagonale des Pgrms GCFK iſt. Daraus folgt nach (9.), daß die Pgrmme AC, AK gleich groß ſind.

13. Hieraus ergiebt ſich eine etwas einfachere Conſtruction der Aufgabe in (9.) Auf der verlängerten Seite AD des gegebenen Pgrms AC nehme man AE der gegebenen Seite des andern gleich, ziehe BE, und mit dieſer durch D die parallele DH, welche auf der verlängerten BA die andere Seite des geſuchten Pgrms AK, nämlich AH, abſchneidet. Denn wegen der ähnlichen Dreyecke BAE, HAD, iſt AE : AB = AD : AH, und die Pgrmme AC, AK ſind nach (12.) gleich groß.

14. Ein Dreyeck ABC (Fig. 27.) in ein anderes ihm gleiches ADE zu verwandeln, deſſen Seite AD gegeben iſt, und worin der W. DAE dem W. BAC gleich iſt, ziehe man die Linie CD, und mit dieſer die parallele BE, welche die gerade CAE in E treffe; ferner die gerade DE, ſo iſt △ABC = △ADE. — Denn es iſt das Dreyeck BCE = BDE (2.), und wenn von beiden das BAE weggenomen wird, ſo bleibt gleiches, d. i. △BAC = EAD.

15. Es ſey ABCDEA (Fig. 28.) eine geradlinichte Figur, oder ein Theil einer größern; dieſe ſoll in ein Dreyeck verwandelt werden. Zu dem Ende ziehe man die Diagonalen AC, AD, AE (letztere, wenn die Figur nur ein Theil einer größern iſt), darauf ziehe man mit AC die parallele BM bis an die nach M verlängerte DC, und verbinde AM, ſo iſt das Dreyeck AMD = Trapez. ABCD. Ferner werde mit AD die parallele MN bis an die nach N verlängerte ED, und die gerade AN gezogen, ſo iſt △ANE = Trapez. AMDE, alſo △ANE = Fig. ABCDE.

16. Auf dieſe Art wird jede geradlinichte Figur in ein Dreyeck verwandelt, deſſen eine Seite zugleich eine Seite der Figur iſt, welche man alſo ſo zu wählen hat, daß das Dreyeck eine dem für die wirkliche Zeichnung gege-

benen Raume ſchickliche Geſtalt erhalte. Oder man zieht aus einem Winkelpuncte der Figur durch einen Punct einer ihrer Seiten eine gerade Linie, und verwandelt die auf beiden Seiten liegenden Theile in ein Dreyeck, worin jene Linie eine gemeinſchaftliche Seite iſt. Da die Grundlinien beider Dreyecke in die gewählte Seite der Figur fallen, wie in (Fig. 28.) DE in die DN, ſo machen beide ein einziges Dreyeck über dieſer verlängerten Seite als Grundlinie aus.

17. Bey der vorhergehenden Conſtruction ſind die Winkel alle als auswärtsliegende (ausſpringende) angenommen. Das Verfahren bleibt daſſelbe, auch wenn einwärtsliegende (einſpringende) Winkel vorkommen. Wäre der W. CDE ein ſolcher, ſo bekäme die Linie MN eine entgegengeſetzte Lage, und das Dreyeck ADN ſchlöſſe ſich an ADE eben ſo an, wie es in dem Falle der Figur geſchieht.

18. Man kann aber auch den Umfang, wo einſpringende Winkel ſich finden, verändern, daß er ausſpringende erhalte, ohne Veränderung des Inhalts. Es ſey (Fig. 29.) ABCDE ein Theil des Umfangs mit dem einſpringenden Winkel BCD. Mit der Linie BD werde CM parallel gezogen, welche AB in M treffe. Zieht man MD, ſo iſt AMDE das Stück des Umfangs, welches ſtatt ABCDE zu ſetzen iſt, und eine Seite weniger, ohne einen einſpringenden Winkel enthält. Statt M auf AB kann man auch auf DE den Punct m nehmen, in welchem dieſe von der mit BD parallelen Cm geſchnitten wird.

19. Wenn die durch C mit BD gezogene parallele weder die Seite AB noch DE trifft, die beide eine beſtimmte Länge haben, wie in Fig. 30. ſo ziehe man CE und mit dieſer die parallele DM, welche CB in M ſchneide, und dann die EM. Dadurch iſt anſtatt des Stücks ABCDE des Umfangs das Stück ABME geſetzt, welches eine Seite weniger und einen weniger einſpringenden Winkel enthält. Mit dieſem veränderten Umfange verfährt man nach (29.), oder wiederholt die hier gewieſene Art der Umwandlung. Anſtatt der Puncte, C, E, kann man auch die Puncte, A, C, nehmen.

20. Wenn mehrere einwärtsliegende Winkel auf einander folgen, wie in Fig. 31. die Winkel, C, D, E, in dem Stücke ABCDEFG eines geradlinichten Umfanges, ſo ziehe man durch die Winkelpunkte der beiden nächſten ausſpringenden Winkel, B, F, die gerade BF, und verwandle die Figur BCDEF in ein Dreyeck über der Seite BF, wodurch man den Fall eines einſpringenden Winkels zwiſchen zwey ausſpringenden erhält.

21. Ein ausſpringender Winkel liege zwiſchen zwey einſpringenden, wie C zwiſchen den beiden, B, D, in Fig. 32. wo ABCDEF ein Stück des Umfanges einer geradlinichten Figur iſt. In dieſem Falle verändere man die Lage der Schenkel BC, DC jenes Winkels. Man ziehe BD, und mit dieſer die parallele CM, welche die Seite DE, wenn es nöthig die verlängerte, in M ſchneide. Noch ziehe man BE, und mit dieſer die parallele MN, welche die Seite FE, wenn es nöthig die verlängerte, in N treffe. Der veränderte Umfang der Figur von A bis F iſt nun ABNF. — Denn $\triangle BCD = \triangle BMD = \triangle BED + \triangle BME = \triangle BED + \triangle BNE =$ Trapez. BDEN.

In dem Falle, daß CM die Seite DE ſelbſt ſchneidet, iſt die Conſtruction dieſelbe, nur der Beweis wird etwas geändert.

22. Aufg. Ein Trapezium, worin keine Seite einer andern parallel iſt, in ein ſolches zu verwandeln, worin zwey Seiten einander parallel ſind, und die eine dieſer Seiten nebſt den anliegenden Winkeln dieſelbe Größe hat, wie in dem gegebenen Viereck.

Es ſey ABCD (Fig. 33.) das gegebene Trapezium. Mit der Seite DC ziehe man die parallele AE bis an BC, und mit AD die parallele BF bis an AE; nehme die mittlere geometriſche Proportionale AG zwiſchen AE und AF, theile die Seite CD nach dem Verhältniſſe AE:AG in R, ſo nämlich, daß AE:AG = CR:DR ſey, ziehe durch R die parallele PQ mit AB, ſo iſt das Trap. ABPQ = Trap. ABCD.

Aus der Conſtruction folgt erſtlich, daß die Dreyecke CRP, EAB ähnlich ſind, ſo wie auch die Dreyecke DRQ und FAB. Dadurch iſt AE : AB = RC : RP, und AF : AB = RD : RQ. Aus der ſtetigen Proportion, AE : AG = AG : AF, folgt zweytens, daß AE : AF = $AE^2 : AG^2$ iſt. Da nun AE : AG = RC : RD geſetzt iſt, ſo iſt auch $AE^2 : AG^2 = RC^2 : RD^2$, folglich $AE : AF = RC^2 : RD^2$.

Hiemit verbinde man die Proportion

$$AF : AB = RD : RQ,$$

ſo iſt

$$AE : AB = RC^2 : RD \times RQ.$$

Da $AE : AB = RC : RP = RC^2 : RC \times RP$ iſt, ſo iſt $RC \times RP = RD \times RQ$, oder RC : RD = RQ : RP. Daher ſind die beiden Dreyecke, CRP, DRQ, worin die Winkel bey R ſich gleich ſind, gleich groß (Dreyeck, 30.), und dadurch ſind die beiden Trapezien, ABCD, ABPQ, gleich groß. In dem letztern ſind die beiden Seiten AB, PQ parallel, wie es verlangt iſt.

23. Aufg. Ein Trapezium mit zwey parallelen, und zwey divergirenden Seiten in ein Parallelogramm über der einen jener erſten Seiten verwandeln.

Es ſey (Fig. 34.) das Trapezium ABEF, deſſen Seiten AB, EF parallel ſind, und das Parallelogramm ABCD ſey mit demſelben gleich groß. Die verlängerte Seite CD des Pgrms, ſchneide die verlängerte AF in G, und die Seite EF des Trapezium ſchneide AD in H. Es iſt alſo das Dreyeck FAH = Pgr. HC. Man halbire DG in K, und ziehe AK, welche FH in L ſchneide, ſo iſt das Dreyeck FAL = HAL, und ΔHAL = ΔHED, deſſen Seite DE eine Diagonale des Pgrms HECD iſt. Man ziehe die Linie AE, ſo iſt ΔALE = ΔADE. Daher iſt die gerade DL durch D und L parallel mit AE. Dieſes giebt nun die Conſtruction des Pgrms. Man ziehe nämlich parallel mit BE die unbeſtimmte AD, welche EF in H ſchneide, halbire

FH in L, ziehe durch L eine parallele mit der durch die Puncte A, E, gezogenen oder gedachten Linie. Sie treffe AD in D. Nun ziehe man DC parallel mit AB, ſo iſt das Pgrm ABCD gleich groß mit dem Trapezium ABEF.

24. Wo man ſich, wie in praktiſchen Fällen gewöhnlich, mit einer empiriſchen Conſtruction begnügen kann, mag man folgendergeſtalt die umgekehrte Aufgabe auflöſen, das gegebene Pgrm ABCD in ein Trapezium ABEF zu verwandeln, deſſen Seiten AB und EF parallel ſind, und welches mit dem Pgrm die Seite AB und den Winkel B gemein hat. Der andere an AB liegende Winkel A iſt willkührlich oder auch beſtimmt. Man halbirt nämlich die Verlängerung DG der Seite CD in K, zieht AK, und nimmt darauf einen Punct L, ſo daß nach dem Augenmaaße die durch L mit AB gezogene parallele FE das Dreyeck FAH dem Pgrm HC gleich mache. Nun ſehe man nach, ob AE und DL parallel ſind. Trifft dies zu, ſo iſt L richtig angenommen, wo nicht, ſo muß man einen andern Punct ſuchen. Eine kleine Verrückung des Punctes L macht die beiden AE, DL merklich von der parallelen Lage abweichen. Das begünſtigt dieſes empiriſche Verfahren.

25. Eine geometriſche Conſtruction werden wir folgendermaßen erhalten. Es ſey geſchehen, was verlangt wird, und die FE ſchneide ein Trapezium ABEF ab, ſo groß als das gegebene Pgrm ABCD, das mit jenem die Seite AB nebſt dem Winkel B gemein hat. Man verlängere CD bis in G auf der verlängerten AF, halbire DG in K, ziehe AK, welche EF in L ſchneide, ſo iſt $\triangle ALH = \triangle DHE$. Dadurch iſt (Dreyeck, 30.) $HL : HE = HD : HA$. Hiermit verbinde man die Proportion $DK : HL = AD : AH$, ſo entſteht aus beiden dieſe:

$$DK : HE = AD \times HD : AH^2,$$

oder

$$DK : AB = AD \times HD : AH^2.$$

Die Linie AD muß in H ſo getheilt werden, daß das Rechteck von der ganzen und dem Segment HD zu dem

Quadrate des andern Segments AH ein gegebenes Verhältniß habe. Die Aufgabe iſt ein Fall der allgemeinern, welche Apollonius die Aufgabe von einem beſtimmten Schnitt nannte. Er gehört in die zweyte Claſſe, ſ. beſtimmter Schnitt, Th. I. S. 295. Die Aufgabe in (22.) gehört zu derſelben Gattung, in die erſte Claſſe.

Man ſuche zu DK, AB, AD die vierte Proportionale, welche P heiße, ſo iſt $AD : P = AD \times HD : AH^2$; dadurch auch

$$AD \times HD : P \times HD = AD \times HD : AH^2$$

folglich $$P \times HD = AH^2.$$

Dieſe Gleichung wird durch den Kreis conſtruirt. Sie verwandelt ſich erſtlich in folgende,

$$P \times AD = P \times AH + AH^2$$ oder dieſe:

$$P \times AD = (P + AH)\, AH.$$

Man ziehe (Fig. 35.) zwey Linien, MN, PQ, die ſich in A unter einem beliebigen Winkel ſchneiden, trage von A aus auf dieſe die gegebenen Linien AB, AC, die in dem gegenwärtigen Falle gleich ſind, und auf MN der AB entgegengeſetzt die gegebene AD, halbire BD in E und AC in F, ziehe durch dieſe Puncte auf beide die ſenkrechten EG, FG, welche ſich in G ſchneiden, beſchreibe aus G durch die Puncte B, D einen Kreis, der PQ in H, K ſchneide. Vermöge der Eigenſchaft des Kreiſes iſt $AB \times AD = AK \times AH$, das iſt, $AB \times AD = (AC + AH)\, AH$, oder, da $AC = AB$ genommen iſt, $AB \times AD = (AB + AH)\, AH$.

Nimmt man AB und AC gleich der vorher durch P bezeichneten Linie, welches hier wegen des Raums nicht geſchehen konnte, und AD ſo groß als AD in Fig. 34. ſo iſt AH die geſuchte Seite AH oder BE des Trapezium.

Das andere Segment AK iſt hier nicht brauchbar. Die Gleichung für die Linie AH in Fig. 34. hat zwar zwey Wurzeln oder Werthe von AH, aber nur die kleinere und poſitive thut der Aufgabe, ſo wie ſie hier vorgelegt iſt, ein Genüge. Verlängert man die GA, DA, CB über A und B hinaus, ſo iſt in dem Verticalwinkel von FAH

ein Dreyeck, das eben ſo die Summe des Pgrms ABCD und eines andern über AB auf der andern Seite dieſer Linie iſt, als das Dreyeck AFH der Unterſchied der Pgrme ABCD und ABEH iſt. Die in der Richtung von AH liegende Seite deſſelben iſt die zweyte und negative Wurzel der Gleichung für AH, oder das Segment AK, das durch die Conſtruction in Fig. 35. gefunden wird. Die parallele mit AB, die nun anſtatt EF gezogen wird, fällt über den Durchſchnitspunct der Linien FA EB hinaus.

26. Aufg. Ein Trapezium mit zwey parallelen und zwey convergirenden Seiten in ein Parallelogramm über der größern der parallelen Seiten zu verwandeln.

Es ſey (Fig. 36.) ABEF das Trapezium. Man ziehe AH parallel mit BE, und verlängere EF bis an H auf jener Linie, halbire FH in L, ziehe durch L mit der Diagonale AE die parallele LD bis an D auf AH, und durch D die parallele DC mit AB, ſo iſt Pgrm ABCD = Trap. ABEF.

Denn es iſt vermöge der Conſtruction △ADE = △ALE. Zieht man beide von dem Dreyeck AHE ab, ſo bleibt △HDE = △HAL, und daher Pgrm HC = △HAF, die von jenen Dreyecken das doppelte ſind. Von beiden das Trapez. HDGF weggenommen, bleibt Trapez. FGCE = △DAG, und beiderſeits das Trap. ABCG addirt, Trap. ABEF = Pgrm ABCD.

27. Das Pgrm ABCD wird entweder empiriſch in das Trapezium ABEF verwandelt, wie in (24.) gezeigt iſt, oder durch eine geometriſche Conſtruction. Es ſey Pgrm ABCD = Trap. ABEF, ſo iſt △ADG = Trap. GCEF, und △AHF = Pgrm DHEC, alſo △AHL = △DHE. Dadurch iſt nun HL : HE = HD : HA. Die Linie DC ſchneide AF in G, und AL in K, ſo iſt DK : HL = AD : AH. Aus beiden Proportionen entſteht dieſe

$$DK : HE = AD \times HD : AH^2$$

oder $$DK : AB = AD \times HD : AH^2.$$

Man ſuche zu DK, AB, AD die vierte Proportionale P, ſo iſt wie oben,

$$P \times HD = AH^2,$$

aber hier iſt AH die Summe von AD und DH, dort iſt AH ihr Unterſchied. Man addire auf beiden Seiten der Gleichung das Rechteck P × AD, ſo iſt

$$P \times AH = AH^2 + P \times AD.$$

Dieſe Gleichung wird ebenfalls mittelſt des Kreiſes conſtruirt. Man lege zwey Linien AM, AN (Fig. 37.) unter irgend einem Winkel an einander, trage auf AM die gegebenen AB, AD, und auf AN die gegebene AC, halbire BD in E, und AC in F, errichte in E und F die ſenkrechten EG, FG, welche ſich in G ſchneiden, beſchreibe aus G durch B und D einen Kreis, der auf AN die AH, AK abſchneide, ſo iſt AH × AK = AB × AD. Da AH = KC iſt, ſo iſt, wenn auf beiden Seiten AH^2 addirt wird.

$$AC \times AH = AH^2 + AB \times AD.$$

Nimmt man AC = AB, ſo erhält man eben eine ſolche Gleichung, wie die vorher für AH gefundene, welche alſo auf die jetzt gezeigte Art durch den Kreis conſtruirt wird.

Die Gleichung hat noch einen Werth für AH, nämlich das zweyte Segment von AC, welches aber hier nicht anwendbar iſt, weil die dazu gehörige parallele mit AB über den Durchſchnittspunct der beiden AF, BE hinaus liegt.

Die Aufgabe kann unmöglich werden, nämlich wenn das gegebene Parallelogramm größer iſt als das von AB und den verlängerten AF, BE eingeſchloſſene Dreyeck. In dieſem Falle ſchneidet der Kreis die AN nicht.

28. Die Verwandlung eines Parallelogramms in ein Trapezium mit zwey parallelen Seiten geſchieht leichter auf folgende Art. In Fig. 34. und 36. ſey das Trapezium ABEF = Pgrm ABCD, ſo iſt, wie vorher gefunden ward, HL : HE = HD : HA. Daraus durch die Verbindung der Verhältnißglieder

$$EL : EH = AD : AH.$$

Da $AD : AH = DK : HL$ iſt, ſo iſt

$$EL : EH = DK : HL$$

oder $$EL : CD = DK : HL.$$

Dieſe Proportion wird durch den Kreis conſtruirt; in dem Falle, da die zwey nicht parallelen Seiten divergiren, wie in Fig. 35.; in dem Falle, da ſie convergiren, wie in Fig. 37. In beiden Fällen ſind in Fig. 35; 37. die Linien AB, AD, AC, AH, AK diejenigen, welche in Fig. 34. 36. die Linien CD, DK, CD, HL, EL ſind, und man kann in Fig. 34. die Linie PQ aus Fig. 35. ſogleich auf AD fallen laſſen, wenn MN auf GC genommen, und der Durchſchnittspunct der beiden Linien in D gelegt wird. In Fig. 36. werde AM aus Fig. 37. auf DC, AN auf AD gelegt, ſo daß der Punct A (Fig. 37.) auf D in Fig. 36. falle.

Verwandelt man die obige Proportion in eine Gleichung, worin entweder EL oder HL zur unbekannten Größe genommen, und die andere durch jene und die gegebene EH ausgedruckt wird, ſo ſind hier beide Wurzeln brauchbar. Die eine iſt EL, die andere HL, welche die Conſtruction beide giebt.

Nachdem EL oder HL gefunden ſind, iſt es leicht die verlangte Linie EF zu ziehen. Man trage von A auf AB eine Linie ſo groß als LH ſeyn ſoll, ziehe durch den Endpunct eine parallele mit AK, ſo ſchneidet dieſe die AD in dem Puncte H, durch welchen EF geht. Auf ähnliche Art macht man es mit der EL.

Aus dieſem Beyſpiele ſieht man, daß viel auf die Wahl der Größe ankommt, wodurch eine Aufgabe aufgelöſet wird.

29. Aufg. Eine Figur, die in Trapezien mit parallelen Seiten getheilt iſt, in ein Rechteck zu verwandeln.

Die Figur AacC (Tab. XI. Fig. 38.) beſtehe aus zwey Trapezien, ABba, BCcb, deren Seitenlinien, Aa, Bb, Cc, ſenkrecht auf ABC ſind. Die gegebene Seite des Rechtecks, in welches die Figur zu verwandeln

iſt, ſey PQ, auf der verlängerten AC. Man halbire die Grundlinien, AB, BC, in G, H, ziehe parallel mit den Seitenlinien die, Gg, Hh, bis an die ſchief laufenden, ab, bc, in g, h. Durch g, h ziehe man die mit AC oder PQ parallelen, g 1, h 2, bis an die durch Q auf PQ ſenkrechte Qq. Dann ziehe man P 1, P 2. Ferner durch A mit P 1 die parallele Aα bis an Bb, durch α die parallele $\alpha\beta$ mit P 2, bis an Cc. Endlich ziehe man durch β die parallele RS mit PQ, und die auf PQ ſenkrechten, PR, QS, ſo iſt das Rechteck PS gleich der vorgegebenen Figur ACca.

Das Trap. ABba iſt gleich dem Rechteck von den Seiten, AB, Gg (ſ. Trapezium), oder AB und Q 1. Da Aα parallel mit P 1 iſt, ſo iſt AB : Bα = PQ : Q 1. Daher ſind die Rechtecke, AB $\times$ Q 1 und PQ $\times$ Bα, gleich groß (12.). Ferner iſt das Trap. BCcb gleich dem Rechteck mit den Seiten, BC, Hh, oder BC, Q 2. Durch α ziehe man noch αm parallel mit PQ. Da $\alpha\beta$ parallel mit P 2 iſt, ſo iſt αm : mβ = PQ : Q 2, und das Rechteck αm $\times$ Q 2 oder BC $\times$ Q 2 = PQ $\times$ mβ. Die beiden Trapezien, Ab, Bc, zuſammen ſind alſo den beiden Rechtecken, PQ $\times$ Bα + PQ $\times$ mβ, oder dem PQ $\times$ Cβ, oder dem PQSR gleich.

Auf dieſe Art verfährt man weiter, für alle Trapezia, welche die Figur enthält. Die ſenkrechte Qq mag in oder neben der Figur liegen. Zu der Seite PQ wird bequem die Höhe der ganzen Figur genommen, und zu Qq die darauf ſenkrechte Grundlinie oder eine der mittlern Theilungslinien.

30. Dieſes Verfahren iſt das bequemſte zur Verwandlung der Figuren, beſonders wenn ſie viele kleine Seitenlinien, und einwärts liegende Winkel hat, ſelbſt bey krummlinichten Begränzungen. Lambert hat ein ähnliches gelehrt, in den Beyträgen zum Gebrauch der Mathem. 2 Th. IV. Abh. Das hier gewieſene iſt etwas leichter, ſo wie es Mayer in ſeiner praktiſchen Geometrie, Th. III. §. 303. vorgetragen hat.

31. Aufg. Zwey Parallelogramme in ein einziges mit einer gegebenen Seite zu verwandeln, wenn dieſe kleiner iſt als die Summe der Grundlinien jener.

Mit den beiden Grundlinien, AB, AC, der gegebenen Parmme und derjenigen des geſuchten, BC, zeichne man (Fig. 39.) das Dreyeck ABC. Über den beiden Seiten, AB, AC, zeichne man die zugehörigen Pgrmme, ABDE, ACFG, und verlängere die Seiten, DE, FG, bis zu ihrem Durchſchnitt in H, ziehe HA und verlängere ſie bis an BC in K. Mit HK ziehe man die Parallelen, BL, CM, bis an HD und HF, und verbinde die Durchſchnittspuncte L, M durch die gerade LM, ſo iſt die Figur BCML ein Parallelogramm, das den beiden BE, CG zuſammengenommen gleich iſt.

Denn BL und CM ſind derſelben Linie AH parallel, alſo einander parallel; da ſie derſelben gleich ſind, ſo ſind ſie ſelbſt einander gleich; daher iſt BLMC ein Parallelogramm, und zwar über der gegebenen BC. Ferner iſt das Pgrm BE = Pgrm BH, und dieſes = Pgrm BLNK, das durch die mit LB parallele HNK von dem Pgrm BM abgeſchnitten wird. Eben ſo iſt Pgrm CG = Pgrm CH, und dieſes = Pgrm CMNK. Folglich ſind die beiden Pgrmme BE und CG ſo groß als die beiden BN, CN, oder als das Pgrm BCML.

Der Satz ſteht in den Sammlungen des Pappus B. IV. S. 1.

Eintheilung geradlinichter Figuren.

32. Wenn eine Seitenlinie eines Parallelogramms in irgend welche Theile getheilt wird, und durch die Theilungspuncte parallelen mit den anliegenden Seitenlinien gezogen werden, ſo wird das Parallelogramm durch dieſe nach denſelben Verhältniſſen getheilt, wie jene Grundlinie getheilt iſt.

33. Wird eine Seite eines Dreyecks in irgend welche Theile getheilt, und werden durch die Theilungspuncte nach dem gegen über liegenden Winkelpuncte gerade Linien gezo-

gen, ſo theilen dieſe das Dreyeck gleichmäßig, wie die Seite getheilt iſt, ein.

34. Aufg. Ein Dreyeck nach gegebenen Verhältniſſen einzutheilen, ſo daß die Theilungslinien mit einer der Seiten parallel gehen.

Das Dreyeck ſey ABC (Fig. 40.), und die Theilungslinien ſollen mit der Seite BC parallel ſeyn. Man ziehe durch A unter einem beliebigen Winkel eine gerade AD, und nehme AD = AB. Dieſe AD theile man nach den gegebenen Verhältniſſen ein, als hier in die Theile, AM, MN, ND, errichte in M, N die auf AD ſenkrechten, ME, NF, bis an den Umfang des über AD beſchriebenen Halbkreiſes, ziehe AE, AF, und trage dieſe auf AB nach AE, AF. Durch die Puncte E, F ziehe man mit BC die parallelen EE, FF, ſo theilen dieſe das Dreyeck ABC in drey Theile, die ſich wie AM, MN, ND, verhalten. So verfährt man auch, wenn mehr als drey Theile zu machen ſind.

Die ähnlichen Dreyecke AEE, AFF, ABC verhalten ſich wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten (Euklides VI. 19.). In dem Kreiſe iſt $AE^2 = AM \times AD$, und $AF^2 = AN \times AD$, alſo verhalten ſich $AE^2 : AF^2 : AD^2 = AM : AN : AD$, folglich die Dreyecke AEE : AFF : ABC = AM : AN : AD, daher auch △AEE : Trap. EF : Trap. FC = AM : MN : ND.

35. Aufg. Ein Dreyeck nach einem gegebenen Verhältniſſe einzutheilen, ſo daß die Theilungslinie durch einen gegebenen Punct gehe.

Das Dreyeck (Fig. 41.) ſey ABC, der gegebene Punct D. Man theile eine der Seiten, AC, nach dem gegebenen Verhältniſſe in E, und ziehe BE, ſo iſt das Dreyeck BAE (oder auch das BCE) in ein anderes ihm gleiches, MAN, zu verwandeln, deſſen dem W. A (oder dem W. C) gegen über liegende Seite durch den Punct D gehe. Es ſey geſchehen, was verlangt wird, und das Dreyeck MAN dem BAE gleich. Man ziehe DF parallel mit AB, ſo iſt, wegen der gegebenen Lage des

Punctes D, ſowohl DF als AF gegeben. Die Gleichheit jener beiden Dreyecke giebt die Proportion,

$$AM : AB = AE : AN,$$

und die parallele Lage der AM und DF dieſe,

$$FD : AM = NF : AN;$$

alſo iſt

$$FD : AB = AE \times NF : AN^2.$$

Man nehme zu FD, AB, AE die vierte Proportionale P, ſo iſt

$$AE : P = AE \times NF : AN^2.$$

Daher iſt, wie in (25.),

$$P \times NF = AN^2.$$

In dem Falle der Figur iſt $P \times AN = AN^2 + P \times AF$. Dieſe Gleichung wird eben ſo conſtruirt, wie die in (27.). Die Linie AN hat zwey gleichnamige Werthe, und die Linie MN hat dadurch zweyerley Lagen in dem Winkel BAE. Es kann aber der Punct N über C hinaus fallen, und alsdann wäre der zugehörige Werth von AN für die Aufgabe, ſo wie ſie vorgelegt iſt, nicht brauchbar, aber wohl für die allgemeinere, in einem gegebenen Winkel ein Dreyeck zu zeichnen, das einen gegebenen Inhalt hat, und deſſen jenem Winkel gegen über liegende Seite durch einen gegebenen Punct geht.

Wenn der Punct D nicht innerhalb des Winkels BAC liegt, in welchem das Dreyeck gezeichnet werden ſoll, ſo bleibt zwar die Gleichung, $P \times NF = AN^2$, aber es iſt $P \times AF = AN^2 + P \times AN$. Dieſe Gleichung wird conſtruirt, wie die in (25.). Die Linie AN hat hier zwey ungleichnamige Werthe. Das zweyte Dreyeck liegt in dem Verticalwinkel von BAC. Hier iſt die Conſtruction immer möglich, der Inhalt des in den Winkel zu legenden Dreyecks ſey groß oder klein: allein in dem Falle der Fig. 41. kann die Conſtruction unmöglich werden, wenn der Punct D ſo liegt, daß jedes Dreyeck, wie MAN, deſſen Seite MN durch D geht, größer iſt als der gegebene Flächeninhalt. Dieſes lehrt auch die

Theorie der Gleichungen vom zweyten Grade. Damit die Conſtruction möglich ſey, muß $\frac{1}{4}P^2 > P \times AF$ ſeyn, oder $P > 4AF$, das iſt $AB \times AE > 4FD \times AF$.

In der Algebra von Wallis, Kap. 70. iſt eine Auflöſung des zweyten Falles dieſer Aufgabe, da D außerhalb des Winkels BAC liegt, eingerückt. Sie iſt von Thomas Strode nicht ſo einfach wie die hier gegebene, und kann ſcheinbar unmöglich werden.

35'. Hieraus ergiebt ſich auch die Auflöſung der Aufgabe, ein Trapezium in ein anderes von demſelben Inhalt zu verwandeln, ſo daß eine Seite des letztern durch einen gegebenen Punct gehe. Das Trapezium ſey BEGH (Fig. 41.), der gegebene Punct D. Man verlängere BH und EG bis zu ihrem Zuſammentreffen in A, und conſtruire nach der vorigen Aufgabe das Dreyeck AMN, welches dem Dreyeck ABE gleich ſey, ſo iſt Trap. MNGH = Trap. BEGH.

In dem Falle, da BH und EG parallel ſind, iſt die Auflöſung ſehr leicht. Die Linie NDM geht alsdann durch die Mitte von BE.

36. Aufg. Ein Trapezium mit zwey parallelen Seiten nach einem gegebenen Verhältniſſe durch eine mit jenen parallele zu theilen.

Das gegebene Trapezium ſey ABCD (Fig. 42.), das abzuſchneidende ABEF, ihr Verhältniß ſey $m:n$. Man ziehe mit BC die parallele AG, welche EF in H ſchneide, halbire DG in K, und ziehe AK, ſo halbirt dieſe die FH in L. Ein Trapezium mit zwey parallelen Seiten iſt gleich einem Rechteck, deſſen eine Seite die arithmetiſch mittlere zwiſchen jenen beiden Seiten, die andere ihr Abſtand iſt. Nun iſt CK die arithmetiſch mittlere zwiſchen CG und CD, oder zwiſchen AB und CD, ſo wie EL zwiſchen AB und EF iſt. Die Höhen der beiden Trapezien, oder die Abſtände ihrer parallelen Seiten, verhalten ſich wie AK und AL, oder wie KG und LH; alſo verhalten ſich die beiden Trapezien, wie $CK \times KG : EL \times LH$. Man mache die Proportion, $m:n = CK:KM$, ſo iſt $CK:KM = CK \times KG:$

EL × LH, und daher KM × KG = EL × LH, oder KM × KD = EL × LH.

Dieſe Gleichung wird wie die in (25.) conſtruirt. Man nehme auf der verlängerten AK von K aus KN = AB (= EH), halbire DM in P und KN in Q, errichte in P und Q, auf DM und KN, die ſenkrechten PO, QO. welche ſich in O ſchneiden, beſchreibe aus O durch die Puncte D, M einen Kreis, welcher AN in R und S ſchneidet, ſo iſt KR = EL, und KS = LH. Nun nehme man auf AB von A aus den Theil AT = KS, ziehe parallel mit AK die TH, welche AG in H ſchneide, und ziehe durch H mit AB die parallele EHF, ſo iſt dieſe die verlangte Theilungslinie.

Denn es iſt KM × KD = KR × KS, alſo iſt KR × KS = EL × LH. Der Unterſchied der beiden KR und KS (oder KR und RN) iſt KN oder EH. Dieſes iſt auch der Unterſchied der beiden EL und LH; daher iſt KR = EL, und KS = LH. Denn auf jeder andern durch K gelegten Chorde des Kreiſes iſt der Unterſchied der Segmente größer oder kleiner als der Unterſchied von KR und KS, oder als der von EL und LH.

37. Aufg. Von einer vielſeitigen Figur ein Stück abzuſchneiden, das einen gegebenen Inhalt hat, und innerhalb der ganzen Figur durch zwey gerade Linien begränzt wird, die durch einen gegebenen Punct gehen, und deren eine der Lage nach beſtimmt iſt.

Die Aufgabe iſt die umgekehrte von der, eine geradlinichte Figur in ein Dreyeck zu verwandeln. An einem Beyſpiele läßt ſich das Verfahren hinreichend zeigen. Es ſey (Fig. 43.) ABCDEFG ein Theil von dem Umfange einer Figur, in welcher P der Punct iſt, durch welchen die beiden begränzenden Theillinien gehen ſollen, und PA ſey die gegebene derſelben. Über der PA in dem Winkel PAB errichte man das Dreyeck PAa, das dem abzuſchneidenden Stücke gleich groß iſt. Durch a ziehe man mit PB die parallele ab, welche der verlängerten Seite der Figur BC in b begegne; durch b die parallele bc mit PC, welche die verlängerte Seite CD in c treffe;

durch c mit PD die parallele cd, welche die Seite DE ſelbſt in d ſchneide. Durch dieſen Punct d und P ziehe man die Pd, ſo iſt PABCDdP dem Dreyeck PAa gleich groß, und iſt alſo das Stück, welches von P aus abgeſchnitten werden ſoll.

Es wird kaum nöthig ſeyn zu bemerken, daß ΔPbB = PaB; ferner ΔPcC = ΔPbC; dann ΔPdD = ΔPcD. Dadurch iſt nach und nach das Dreyeck PAa in die Figur PABCDdP verwandelt worden.

38. Auf dieſe Art kann man eine geradlinichte Figur aus einem Puncte innerhalb derſelben, oder auf ihrem Umfange, in irgend eine Anzahl Theile nach gegebenen Verhältniſſen eintheilen. Es ſey (Fig. 43.) ABCDEGA ein Abſchnitt der ganzen Figur, worin P der Theilpunct, und PA die erſte Theilungslinie iſt. Über PA in dem Winkel A errichte man das Dreyeck PAa, ſo groß als der Theil, der an PA liegen ſoll, und reducire daſſelbe auf die Figur in PABCDdP. Nun iſt Pd die zweyte Theilungslinie. Auf dieſer in dem Winkel PdE errichte man ein Dreyeck ſo groß als der zweyte abzuſchneidende Theil, und reducire es auf die Figur. So fahre man fort, bis der letzte Theil übrig bleibt.

39. In der Ausübung wird gewöhnlich erfordert, daß die Theilungslinien eines Feldes parallel oder nahe es ſeyn. Auch müſſen ſie ſich oft an einer langen Seite des ganzen Feldes endigen. Hier iſt ein Beyſpiel, wie dieſes bewerkſtelligt werden mag.

40. Es iſt (Fig. 44) die Figur ABCDEFA in drey Theile, deren Verhältniß gegeben wird, zu theilen, ſo daß die Theilungslinien an der Seite AF ſich endigen. Die Figur werde zuerſt in ein Dreyeck FAP verwandelt. Die Seite AF theile man nach den gegebenen Verhältniſſen ein, der Folge der Theile übereinſtimmig, nämlich in die Theile AG, GH, HF, und ziehe GP, HP. Durch dieſe wird das Dreyeck APF nach den gegebenen Verhältniſſen eingetheilt. Nun verwandle man das Dreyeck GAP in das Trapezium ABKG. Die mit BG parallele PK trifft hier die Seite der Figur BC in K.

Man ziehe GK, ſo iſt GK die erſte Theilungslinie. Dieſe verlängere man bis an die durch P mit AF gezogene Parallele PV in Q, und ziehe HQ, ſo iſt $\Delta GQH = \Delta GPH$. Jenes Dreyeck werde nun in das Fünfeck GKCLH verwandelt, auf die in (37.) gewieſene Art. Nämlich mit HK wird Qc parallel bis an die verlängerte BC gezogen, und mit HC die parallele cL, welche die Seite CD in L ſchneidet, So iſt HL die zweyte Theilungslinie. Der übrige Theil der Figur, nämlich HLDEF iſt nun dem Dreyeck HPF gleich. Auch hier werde die Theilungslinie HL bis an die mit AF parallele PV verlängert, und FR gezogen, ſo iſt $\Delta HPF = \Delta HRF$. Mit FL ziehe man parallel die Rd bis an die verlängerte CD; dann mit FD die parallele dE, welche die Seite ED in dem Endpuncte E trifft, wo die Seite FE ſich anſchließt. Alſo iſt das Fünfeck HLDEF gleich dem Dreyeck FRH, d. i. dem HPF. Die ganze Figur iſt nun in die verlangten drey Theile auf die verlangte Art getheilt.

Jede gefundene Theilungslinie wird bis an die mit der Grundlinie der Figur gezogene parallele PV verlängert, und an den Durchſchnitt mit derſelben von dem nächſten Theilungspuncte der Grundlinie (vorher der AF) eine gerade Linie gezogen; das Dreyeck, das zwiſchen dieſen beiden an PV gezogenen, und der Theillinie der Baſis enthalten iſt, wird in eine vier- oder mehrſeitige Figur über der Theillinie der Baſis verwandelt. Solchergeſtalt iſt jede Theilungslinie die erſte Seitenlinie einer neuen Figur, bey welcher daſſelbe Verfahren, wie im Anfange, wiederholt wird.

41. Die Theilungslinien einer Figur in der Lage zu ziehen, wie in der vorhergehenden Aufgabe verlangt ward, lehrt C. H. Wilke in der neuen und erleichterten Methode, den Inhalt geradlinichter Flächen zu finden, und dieſelben ohne Rechnung einzutheilen. Halle, 1757. Aber ſein Verfahren iſt nicht ſo einfach als das hier gewieſene. Das Neue in ſeiner Schrift gehört dem Göttingiſchen Aſtronomen, Tobias Mayer, der ſein Lehrer in der praktiſchen Geometrie geweſen war, welches der Verfaſſer

aber nur andeutet, nicht beſtimmt angiebt. Er ward deswegen einer literariſchen Entwendung in den Göttingiſchen Anzeigen beſchuldigt, wogegen er ſich in dem Anhange zu einer andern Schrift, neue Grundſätze der praktiſchen Geometrie, Halle, 1758. vertheidigt. Mayer hat über die Verwandlung und Eintheilung geradlinichter Figuren der Göttingiſchen Societät der Wiſſenſchaften eine Abhandlung vorgelegt, die aber in ihren Sammlungen nicht erſchienen iſt.

42. Die Linie AF kann auch eine gerade Linie ſeyn, die innerhalb einer Figur ſo gezogen iſt, daß dieſe zwiſchen ein paar durch ihre Endpuncte gezogenen parallelen ganz enthalten iſt. Theilt man die beiden Theile der ganzen Figur, welche an beiden Seiten von AF liegen, nach denſelben Verhältniſſen in einerley Ordnung ein, ſo ſtoßen die gleichnamigen Theilungslinien auf AF zuſammen. Statt zweyer ſolcher kann man leicht eine einfache ziehen, die eben den Theil abſchneidet, wie jene.

43. Nachdem eine Figur ſo getheilt iſt, daß die Theilungslinien ſich außer der Figur ſchneiden, ſo kann man dieſe mittelſt der Auflöſung der Aufgabe (22.) in parallele Linien verwandeln. Z. B. in (Fig. 44.) wird nach der Vorſchrift daſelbſt das Viereck ABKG in ein Trapezium verwandelt, worin die veränderte Seite der AB parallel iſt, ohne den Inhalt zu verändern. In dem Fünfeck GKCLH gedenke man ſich durch C eine parallele mit AB, ſo giebt dieſe mit CL, LH und dem auf HG abgeſchnittenen Stück ein Viereck, worin die Lage der Seite LH mit einer der AB parallelen vertauſcht werden mag.

44. Ein anderes Verfahren iſt folgendes. Man habe die vorgegebene Figur durch parallelen aus jedem Winkelpuncte mit einer ſchicklichen Seitenlinie in Trapezia getheilt. Dieſe ſind nach der Reihe in Rechtecke über einer gegebenen Grundlinie verwandelt, nach (29.). Die abzuſchneidenden Theile ſeyn auch durch Rechtecke über derſelben Grundlinie gegeben. Soll nun die Figur in gewiſſe Theile getheilt werden, ſo nehme man zu dem erſten derſelben ſo

viele aufeinander folgende Trapezien von der dazu beſtimmten Gränze an, daß der Unterſchied von dem abzuſchneidenden Theile kleiner ſey als das nächſte Trapezium. In dieſem errichte man über der gemeinſchaftlichen Scheidungslinie deſſelben und des nächſten jener erſtern ein Rechteck ſo groß als der Überſchuß des erſten Theils der Figur über jene Trapezien iſt. Da dieſer Überſchuß durch ein Rechteck über einer andern Grundlinie gegeben wird, ſo muß dieſes in jenes verwandelt werden, entweder nach (9, oder 13.) oder durch Rechnung. Die Höhen verhalten ſich umgekehrt wie die Grundlinien (10.). Das Rechteck wird in ein Parallelogramm verwandelt, das mit dem Trapezium einen Winkel an der Grundlinie gemein hat, und darauf nach (25. oder 27.) in ein Trapezium mit zwey parallelen Seiten, wenn man ſich nicht der empiriſchen Conſtruction in (24.) bedienen will.

Von der erſten gefundenen Theilungslinie an ſchneidet man nun den zweyten Theil auf dieſelbe Art ab; von der zweyten Theilungslinie an den dritten Theil u. ſ. f. bis zu dem letzten.

Soll eine Theilungslinie durch einen gegebenen Punct gehen, ſo wird dieſes durch die in (35*.) gewieſene Conſtruction bewerkſtelligt.

45. Noch ein bequemes Mittel, ein Trapezium mit zwey parallelen Seiten, das einen gegebenen Inhalt hat, zu zeichnen, iſt folgendes, die Verwandlung eines Dreyecks in ein ſolches Trapezium.

Es ſey ABC (Fig. 45.) das gegebene Dreyeck, und das Trapezium ABDE, worin ED parallel der AB, demſelben gleich. Die Seite AB mit den beiden anliegenden Winkeln deſſelben ſind gegeben. Die Seite ED ſchneide BC in F, ſo iſt, da $\triangle CEF = BDF$ geſetzt wird, $FB : FC = FE : FD$. Man ziehe CG parallel mit AB bis an die verlängerte BD in G. Aus jener Proportion iſt durch Verbindung der Glieder,

$$BC : BF = DE : FE$$

und $$BC : FC = DE : DF$$

Da nun auch, wegen der parallelen AB, ED, CG, iſt

BC : BF = CG : FD

und BC : FC = AB : FE

ſo iſt

AB : FE = DE : DF

FE : DE = DF : CG

und daraus

AB : DE = DE : CG,

oder DE iſt die mittlere proportionale zwiſchen AB und CG. Nachdem dieſe gefunden iſt, trage man ſie auf AB von A nach H, ziehe HD parallel mit AC bis an BG in D, und durch D die parallele DE mit AB, ſo iſt das Trap. ABDE dem Dreyeck ABC gleich.

46. Ausführlichen Unterricht von der Verwandlung und Theilung der Figuren findet man in J. T. Mayers Unterricht zur praktiſchen Geometrie, III. Th. 27. u. 29. Kap. Des ältern Mayers Methoden ſind, wie ſchon vorher bemerkt, in Wilkens Schrift: Methode den Inhalt geradlinichter Flächen zu finden, enthalten. Dieſe Schrift hat auch Böhm benutzt in der Anleitung zur Meßkunſt auf dem Felde, V. Cap. S. 120 — 188. wo das Verfahren durch Beyſpiele durchgehends erläutert wird. Zur praktiſchen Anwendung für wenig Geübte iſt dienlich: Anweiſung zu Felder- und Landtheilungen, von Vollimhauß. Hannover und Leipzig 1773. 134 S. in 8. mit 6 K. Schulze hat in ſeinem Taſchenbuche zu Anwendungen der Meßkunſt (Berlin 1782.), Th. I. §. 425 — 451. die Verwandlung und Theilung der Figuren umſtändlich vorgetragen, verſchiedenes auf eigenthümliche Art.

Lambert hat gezeigt, wie Figuren in gleich groſſe Rechtecke zu verwandeln ſind. Beyträge zum Gebrauche der Mathematik, III. Th. 4te Abh. Auch hat Alb. Euler in dem V. Bande der Abhandl. der Bayeriſchen Akademie einen Aufſatz über die Theilung der Figuren geliefert.

In den Fundamentis arithmeticis et geometricis authore Ludolpho a Ceulen, Lugd. Bat. 1615.

ſind ſchon mancherley Aufgaben über die Verwandlung und Theilung der Figuren enthalten.

Anweiſung, die geradlinichten Figuren nach einen gegebenen Verhältniß ohne Rechnung zu theilen, Frft. u. Leipzig 1776. iſt eine Überſetzung eines Abſchnittes aus Ozanam Cours de Mathématique, T. III.

Eine Schrift von le Clerc, traité de Géométrie ſur le terrain, die deſſen Géométrie pratique, Amſterd. 1694. beygefügt iſt, enthält die Lehre von der Eintheilung und Verwandlung der Figuren ſehr gut vorgetragen, nach d'Alemberts Zeugniß in dem Dictionn. encyclop. Article, Géodéſie.

Der gegenwärtige Artikel wird zur beſſern Überſicht der Methoden und zur Ergänzung dienen. Die hier in (22 — 28.) gegebenen brauchbaren Auflöſungen fehlen bey den angeführten Schriftſtellern.

Verwandlung und Theilung der Figuren durch Rechnung.

47. Geradlinichte Figuren durch Rechnung auszumeſſen, zerlegt man ſie in Dreyecke. Der Inhalt eines Dreyecks wird durch das halbe Product aus der Grundlinie in die Höhe ausgedrückt, wobey das Quadrat der Längen-Einheit die Flächen-Einheit iſt. Oder man bedient ſich der Formel aus den drey Seiten den Inhalt zu finden. (Dreyeck, 34.). Zwey Dreyecke mit einer gemeinſchaftlichen Seite geben ein Trapezium. Dieſes wird ausgedruckt durch das halbe Product aus der einen Diagonale in die Summe der darauf gefällten Perpendikel.

48. Am bequemſten iſt es, die Figur in Trapezien mit parallelen Seiten zu zerlegen, wie die in Fig. 46. gezeichnete, worin durch alle Winkelpuncte parallelen mit der einen Seite AA gezogen ſind. Die äußerſte Seite FF iſt hier auch der AA parallel, ſtatt deſſen auch ein Winkelpunct vorhanden ſeyn mag.

Der Inhalt eines Trapezium mit zwey parallelen Seiten iſt das halbe Product aus der Summe derſelben in ihren Abſtand von einander. In der gezeichneten Figur ziehe man auf AA eine ſenkrechte in a, welche die parallelen in b, c, d, e, f ſchneide. Der Inhalt dieſer Figur iſt =

$$\tfrac{1}{2}(AA\,.\,ab + BB\,.\,ac + CC\,.\,bd + DD\,.\,ce + EE\,.\,df + FF\,.\,ef).$$

49. Wenn die Abſtände der Parallelen alle von der erſten AA angenommen werden, ſo iſt der Inhalt der Figur =

$$\tfrac{1}{2}((AA - CC)\,ab + (BB - DD)\,ac + (CC - EE)\,ad + (DD - FF)\,ae + EE\,.\,af + FF\,.\,af).$$

Es iſt nämlich $bd = ad - ab$; $ce = ae - ac$; $df = af - ad$; $ef = af - ae$.

Wo die größern der parallelen von der kleinern abzuziehen iſt, da wird das Product des Unterſchiedes in den Abſtand von der erſten ſubtractiv.

50. Hat die Figur irgendwo mehrere kleine Seiten nach einander, ſo ſchneide man dieſe durch eine gerade Linie zwiſchen den Endpuncten der äußerſten unter ihnen ab, und berechne die Fläche zwiſchen ihnen und dieſer Linie beſonders, durch Zerlegung in kleine Trapezien, die wegen der kleinern parallelen und Abſtände leicht berechnet werden können.

Auf dieſe Art werden ſelbſt die durch krumme Linien begränzten Abſchnitte der Figur nahe genug berechnet werden können.

51. Die Eintheilung der Figuren wird am bequemſten bewerkſtelligt, wenn ſie in Trapezien mit zwey parallelen Seiten bey der Berechnung des Inhalts zerlegt worden ſind, wie dies ſchon oben (44.) gezeigt iſt. Es iſt nur hier noch anzugeben, wie die Lage einer Theilungslinie, die mit der gegebenen Seite, ſo wie die andern durch die Winkelpuncte gezogenen, auch parallel ſeyn ſoll, durch

Rechnung gefunden wird, oder wie ein gegebenes Rechteck in ein Trapezium mit zwey parallelen Seiten, worin die eine derſelben mit den anliegenden Winkeln gegeben iſt, verwandelt wird. Die Aufgabe iſt oben (25. 27.) geometriſch aufgelöſet.

Es ſey in (Fig. 34.) das Parallelogramm ABCD gleich dem Trapezium ABEF, worin die Seite EF der AB parallel iſt. Man ſetze $AB = a$, die (hier nicht ausgedruckte) Höhe des Pgrms $= h$, die Seite des Trapezium, $EF = a + 2y$, die Höhe $= x$, ſo iſt $(a+y)x = ah$. Die verlängerten CD und AF ſchneiden ſich in G, und es ſey $DG = 2b$, ſo iſt $h : x = b : y$, und $y = \frac{bx}{h}$. Alſo iſt

$$\left(a + \frac{bx}{h}\right) x = ah,$$

oder $$xx + \frac{ah}{b} x = \frac{ahh}{b}.$$

Die Wurzeln dieſer quadratiſchen Gleichung ſind

$$x = \pm \sqrt{\left(\frac{ahh}{b} + \frac{aahh}{4bb}\right)} - \frac{ah}{2b}.$$

Die negative Wurzel kann hier nicht gebraucht werden. Die bequemſte Form der poſitiven Wurzel iſt,

$$x = \frac{ah}{2b} \left(\sqrt{(1 + \frac{4b}{a}} - 1)\right).$$

Wenn die beiden Seiten, AE, AF, convergiren, wie in Fig. 36. ſo iſt b negativ, und, b abſolut genommen,

$$x = \frac{ah}{2b} \left(1 - \sqrt{(1 - \frac{4b}{a})}\right).$$

Iſt $2b = \frac{1}{2}a$, ſo wird das Trapezium zu einem Dreyeck, deſſen Höhe $= 2h$ iſt. Für die gegenwärtige Aufgabe iſt alſo $a > 4b$, und $x < 2h$, daher $x < \frac{a.2h}{4b}$, oder

$x < \frac{ah}{2b}$. Darum muß die Wurzelgröße das Vorzeichen — bekommen. Die zweyte poſitive Wurzel iſt für die gegenwärtige Aufgabe nicht anwendbar.

52. Exempel. In dem Trapezium AB (Fig. 46.) ſey AA = 216 Fuß, BB = 364; der Abſtand beider Seiten = 240, alſo der Inhalt = 69600 Quadratf. Es ſoll ein Stück, 34800 Quadratf. groß abgeſchnitten werden.

Hier iſt $a = 216$, $ah = 34800$, alſo $h = \frac{2900}{18}$. Die Linie $a + 2b$ zu finden, ziehe man in dieſem Abſtande von AA eine parallele, oder man ſuche b durch Rechnung, da $240 : \frac{2900}{18} = BB - AA : 2b = 74 : b$ iſt. Dieſe Proportion giebt $b = \frac{2900 \cdot 74}{18 \cdot 240} = \frac{145 \cdot 37}{27 \cdot 4}$. Alſo $1 + \frac{4b}{a} = 1 + \frac{145 \cdot 37}{27 \cdot 216} = \frac{11197}{5832}$, und $\sqrt{\left(1 + \frac{4b}{a}\right)} = 1{,}385613$, mit Hülfe der Logarithmen,

$$
\begin{aligned}
l\ 11197 &= 4{,}0491017 \\
l\ 5832 &= 3{,}7658175 \\
\text{Unterſch.} &= 0{,}2832842 \\
\text{Hälfte} &= 0{,}1416421
\end{aligned}
$$

Nun iſt $x = \frac{34800 \cdot 54}{145 \cdot 37} \times 0{,}385613$

$= \frac{1879200}{5365} \times 0{,}385613 = 135{,}07$.

$$
\begin{aligned}
l\ 1879200 &= 6,2739730 \\
l\ 0,385613 &= 9,5861517 \\
\text{S. } l\ 5365 &= \underline{3,7295697} \\
\log x &= 2,1305550.
\end{aligned}
$$

Das Exempel iſt in Mayers prakt. Geom. III. §. 308. nach einer andern Formel berechnet. Das Reſultat iſt vollkommen daſſelbe.

53. Soll die Theilungslinie durch einen gewiſſen Punct des Umfangs gehen, ſo ziehe man durch dieſen Punct eine parallele mit der Grundlinie der Figur, berechne den durch dieſe parallele und eine der nächſten parallelen erhaltenen Abſchnitt, und lege auf der einen Seite jener Linie noch ein Dreyeck zu, oder ziehe auf der andern ein ſolches ab, das mit jenem Trapezio den verlangten Inhalt gebe. Die Höhe dieſes Dreyecks wird durch die gezogene parallele und den Inhalt des Dreyecks gegeben.

54. Von der Berechnung des Inhalts einer vier- oder mehrſeitigen Figur aus den gegebenen Seiten und Winkeln, oder der unbekannten Seiten und Winkel ſ. den Artikel, Polygonometrie.

Ähnlichkeit geradlinichter Figuren.

55. Ebene und geradlinichte Figuren ſind ähnlich, wenn die Winkel der einen den Winkeln der andern, in der Ordnung wie ſie auf einander folgen, gleich, und die Verhältniſſe der zwiſchen dieſen gleichen Winkeln liegenden Seiten dieſelben ſind. Z. B. in den Fünfecken Fig. 47. a und 47. b, ſind die Winkel $A = a$, $B = b$, $C = c$, $D = d$, $E = e$, und es iſt $AB : BC = ab : bc$; $BC : CD = bc : cd$; $CD : DE = cd : de$; $DE : EA = de : ea$. Dadurch ſind dieſe beiden Figuren einander ähnlich.

Die zwiſchen den gleich geordneten Winkeln liegenden Seiten der ähnlichen Figuren heißen gleichnamige (latera homologa).

56. Einer gegebenen Figur eine ähnliche zu zeichnen, zerlege man jene in Dreyecke, und zeichne dieſen ähnliche

und ähnlich gelegte Dreyecke, wobey eine Seite der Figur willkührlich angenommen wird, wenn ſie nicht gegeben iſt, wie in Fig. 47., a, b, wo die mit gleichnamigen Buchſtaben bezeichneten Dreyecke ſich ähnlich, und die ſo bezeichneten Winkel ſich gleich ſind. Durch dieſe Conſtruction ſind die Winkel der zweyten Figur denen der erſten nach ihrer Ordnung gleich. Es iſt ferner

	AB : AC = ab : ac
	AC : CD = ac : cd
alſo	AB : CD = ab : cd.
Eben ſo iſt	CD : DE = cd : de
Daher	AB : DE = ab : de.

So erhellt, daß in jedem Falle die zwiſchen den übereinſtimmigen Winkeln beider Figuren liegenden Seiten einerley Verhältniß haben, daher die Figuren ähnlich ſind.

57. Die Seiten AE, BC seyn in M, N gleichmäßig getheilt, wie die gleichnamigen Seiten ae, bc der ähnlichen in m, n, ſo daß AM : AE = am : ae, und BN : BC = bn : bc iſt. Dadurch ſind die geraden MN, mn, in beiden Figuren ähnlich liegende, und theilen beide gleichmäßige in, ſo daß die Figuren MABN, mabn ähnlich, und MEDCN, medcn es gleichfalls ſind.

Denn die Verhältniſſe AM : AE : AB : BC : BN ſind denen am : ae : ab : bc : bn nach ihrer Ordnung gleich, daher ſind die daraus zuſammengeſetzten Verhältniſſe AM : AB : BN denen am : ab : bn folgeweiſe gleich. Es werden MB und mb gezogen, ſo ſind die Dreyecke MAB, mab ähnlich, und die Winkel ABM, abm ſind gleich, daher die Winkel MBN, mbn. Nun ſind MB : AB : BN wie mb : ab : bn, folglich ſind die Dreyecke MBN, mbn ähnlich; die W. BNM, bnm ſind ſich gleich, und es iſt MN : NB = mn : nb. Da NB : AB = nb : ab, ſo iſt MN : AB = mn : ab. Die Figuren MABN, mabn, die aus den ähnlichen Dreyecken gleichmäßig zuſammengeſetzt ſind, ſind ähnlich.

58. Wenn die abgeſchnittene Figur mehr als zwey Dreyecke enthält, ſo iſt der Beweis derſelbe. In dem

andern Theile der Figur ziehe man die Diagonalen MD, MC; md, mc. Es ſind ME:AE:ED:DC:CB:CN nach der Ordnung wie me : ae : ed : dc : cb : cn; alſo ME:ED:DC:CN wie me : ed : dc : cn. Daher ſind erſtlich die Dreyecke MED und med ähnlich, und die Winkel EDM, edm, ſich gleich, alſo auch die Winkel MDC, mdc. Da MD:DE:DC wie md : de : dc ſind, ſo iſt MD:DC = md : dc, und die Dreyecke MDC, mdc ſind ähnlich. Alſo iſt MC : CD = mc : cd. Da CD : CN = cd : cn iſt, ſo iſt MC : CN = mc : cn; dadurch, und durch die gleichen Winkel MCN, mcn, ſind die Dreyecke MCN, mcn ähnlich.

59. Man ſieht hieraus, daß die Ähnlichkeit zweyer Figuren dargethan iſt, wenn erwieſen iſt, daß die gleichgeordneten Winkel bis auf zwey in beiden ſich gleich, und die zwiſchen jenen liegenden Seiten, bis auf die zwiſchen dieſen beiden liegende, gleiche Verhältniſſe haben, ſo wie Figuren gleich ſind, wenn die Winkel beider nach ihrer Folge bis auf zwey, und die Seiten auch nach ihrer Folge bis auf die zwiſchen jenen Winkeln liegende als gleich erkannt ſind.

60. Figuren ſind ähnlich, wenn erwieſen iſt, daß die gleichgeordneten Winkel in beiden ſich gleich, und daß die Verhältniſſe der zwiſchen ihnen liegenden Seiten, bis auf zwey an einander ſtoßende, dieſelben ſind.

61. Auch ſind Figuren ähnlich, von welchen erwieſen iſt, daß die gleich geordneten Winkel, bis auf drey nach einander folgende, ſich gleich, und daß alle gleich geordnete Seiten einerley Verhältniſſe haben.

62. In den ähnlichen Figuren ABCD, abcd (Fig. 48. a. b.) haben die Puncte M, m, ähnliche Lagen, wenn die Linien, welche von denſelben nach den Winkelpuncten gezogen werden, nach ihrer Folge einerley Verhältniſſe haben, und die Winkel derſelben in beiden übereinſtimmig ſind. Iſt der Punct M in der einen Figur gegeben, ſo mache man in der andern das Dreyeck amb dem AMB ähnlich, und es hat m eine ähnliche Lage mit M.

Denn es iſt, wegen der Ähnlichkeit der Figuren, AB : BC = ab : bc. Die beiden ähnlichen Dreyecke AMB, amb geben die Proportion MB : AB = mb : ab, woraus und aus jener folget MB : BC = mb : bc. Da die Winkel ABC, abc, und auch ABM, abm gleich ſind, ſo ſind die Winkel MBC, mbc gleich, und die Dreyecke BMC, bmc ſind ähnlich. Folglich iſt MB : MC = mb : mc, und die Winkel bey M, m ſind ſich gleich. Daſſelbe wird von allen um M und m gelegten Dreyecken erwieſen, ſo viele Seiten auch die Figur haben mag.

63. In den ähnlichen Figuren ABCD, abcd (Fig. 49. a. b.) ſeyn M und m, N und n ähnlich liegende Puncte, ſo ſind die Dreyecke über den Linien MN, mn, deren Spitzen in die gleichnamigen Winkelpuncte der Figur fallen, ähnlich, und es iſt MN zu einer der Seiten, als AB, wie mn zu der gleichnamigen Seite ab in der andern Figur.

Denn wegen der ähnlichen Lage der Puncte ſind die Dreyecke AMB und amb, ANB und anb ähnlich. Dadurch iſt AM : AB = am : ab, und AB : AN = ab : an alſo AM : AN = am : an. Wegen der gleichen Winkel MAB und mab, NAB und nab iſt W. MAN = man. Folglich ſind die Dreyecke MAN, man ähnlich, und ſo ſind auch die übrigen über MN und mn conſtruirten Dreyecke, deren der MN und mn gegen über liegende Spitzen in die Winkelpuncte der Figuren fallen, ähnlich, in der Ordnung, wie ſie auf einander folgen, genommen. Nun iſt MN : AM = mn : am, und AM : AB = am : ab. Daraus entſteht die Proportion MN : AB = mn : ab. So iſt auch MN : BC = mn : bc, und auf gleiche Art für die übrigen Seiten.

64. Umgekehrt, wenn die Dreyecke man, mbn, mcn, u. ſ. f. den Dreyecken MAN, MBN, MCN, u. ſ. f. in einer gegebenen Figur ähnlich gemacht werden, ſo geben die Spitzen der Dreyecke, a, b, c, etc. eine Figur, die jener ähnlich iſt. Denn es ſind erſtlich die Winkel AMN und amn, BMN und bmn gleich, alſo

W. AMB = amb. Ferner ſind AM : MN : MB wie am : mn : mb, daher AM : MB = am : mb, und die Dreyecke AMB und amb ähnlich. Eben dieſes wird von den andern um M und m gelegten Dreyecken erwieſen, daher beide Figuren aus ähnlichen Dreyecken gleichmäßig zuſammen geſetzt werden, und ähnlich ſind.

Bey Feldvermeſſungen iſt dieſes Verfahren das bequemſte, und erfordert nur bey ſehr ſpitzigen Winkeln Vorſicht.

65. Die Flächenräume ähnlicher geradlinichter Figuren verhalten ſich wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten, weil die Dreyecke, worein ſie zerlegt werden, ſich wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten verhalten. Es verhalten ſich in (Fig. 47. a. b.) die Dreyecke, ABC : ACD : ADE zu den Dreyecken, abc : acd : ade wie $BC^2 : CD^2 : DE^2$ zu $bc^2 : cd^2 : de^2$ in der hier geſetzten Ordnung. Da die Linien BC : CD : DE ſich wie bc : cd : de verhalten, ſo verhalten ſich auch $BC^2 : CD^2 : DE^2$ wie $bc^2 : cd^2 : de^2$, und die Verhältniſſe der Dreyecke ABC : abc; ACD : acd; ADE : ade ſind dem von $BC^2 : bc^2$ oder dem duplicirten zweyer andern gleichnamigen Seiten, als $AB^2 : ab^2$, gleich; daher ſind auch die Summen der Dreyecke, oder die Flächen der ähnlichen Figuren in dieſem Verhältniſſe.

66. Aufg. Eine Figur zu zeichnen, die einer gegebenen P ähnlich, und einer andern gegebenen Q gleich ſey. — Über einer der Seiten AB der Figur P (Tab. XII. Fig. 50.) beſchreibe man ein Rechteck ABCD ſo groß als die Figur P, und errichte auf AC ein Rechteck AEFC ſo groß als die Figur Q (nach 29. oder auf andere Art). Dann ſuche man die mittlere geometriſche Proportionale zwiſchen AB und AE, ſo iſt dieſe die mit AB gleichnamige Seite der geſuchten Figur. Sie ſey GH. Über dieſer beſchreibe man die Figur R, welche der P ähnlich iſt, ſo iſt R ſo groß als die Figur Q.

Denn da AB : GH = GH : AE iſt, ſo iſt $AB^2 : GH^2$ = AB : AE, und da P : R = $AB^2 : GH^2$ iſt, ſo iſt P : R = AB : AE. Es iſt aber P : Q =

AB : AE, da ABCD = P, und AEFC = Q, gemacht ſind. Alſo iſt P:R = P:Q, folglich R = Q.

67. Aufg. Eine Figur zu zeichnen, die zwey gegebenen ähnlichen Figuren zuſammen genommen gleich, und ihnen ähnlich ſey. — Zwey gleichnamige Seiten jener beiden Figuren ſetze man unter einem rechten Winkel zuſammen, und ziehe durch ihre beiden andern Endpunkte eine gerade Linie, ſo iſt dieſe eine Seite der geſuchten Figur, und zwar die denen aus jenen Figuren genommenen gleichnamige.

Denn es ſeyn die beiden gegebenen Figuren P, Q, die geſuchte R, die gleichnamigen Seiten derſelben ſeyn p, q, r, ſo ſind P : Q : R wie pp : qq : rr, und P+Q : P = pp + qq : pp. Da P : R = pp : rr, ſo iſt P + Q : R = pp + qq : rr. Nun iſt nach dem pythagoriſchen Lehrſatze pp + qq = rr, alſo iſt P + Q = R.

Figurirte Zahlen ſind die Glieder arithmetiſcher Reihen aller Ordnungen, deren erſtes Glied die Einheit iſt. Der Grund der Benennung wird unten angegeben. Hier wollen wir nur diejenigen betrachten, deren letzte Differenzreihe zu Gliedern die Einheit hat. Mit Hinzufügung dieſer letztern Reihe ſind die Reihen ſolcher figurirten Zahlen:

0.	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	etc.
I.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	etc.
II.	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	45,	etc.
III.	1,	4,	10,	20,	35,	56,	84,	120,	165,	etc.
IV.	1,	5,	15,	35,	70,	126,	210,	330,	495,	etc.
V.	1,	6,	21,	56,	126,	252,	462,	792,	1287,	etc.

u. ſ. f.

Das allgemeine Glied jeder dieſer Reihen wird nach der Formel, in dem Artikel, arithmetiſche Reihen höherer Ordnungen (7.), mittelſt der Anfangsglieder der Differenzreihen gefunden. Um dieſe Formel hier anzuwenden, muß 0 als Anfangsglied in den Reihen vorgeſetzt werden,

weil dort bey den Anfangsgliedern der Differenzreihen, a, b, c, d, etc. ein Glied in der Stelle o angenommen iſt, dagegen hier die Glieder der erſten Reihe I. am einfachſten zu Stellenzahlen für die Glieder der folgenden gebraucht werden.

Die Stelle eines Gliedes in einer Reihe ſey x, das Glied = y, ſo iſt in I. $y = x$.

Für die Reihe II. ſind die Anfangsglieder der Differenzreihen, 1 : 1. Alſo iſt

$$y = x.1 + \frac{x.x-1.}{1.2}.1, \text{ und } y = \frac{x.x+1.}{1.2}.$$

Für die Reihe III. ſind die Anfangsglieder der drey Differenzreihen, 1; 2; 1, alſo iſt

$$y = x.1 + \frac{x.x-1.}{1.2}.2 + \frac{x.x-1.x-2.}{1.2.3}.1.$$

Durch die Entwickelung der Producte wird erhalten $y = \frac{1}{6}x(x^2 + 3x + 2)$, oder $y = \frac{x.x+1.x+2.}{1.2.3}$.

Für die Reihe IV. ſind die Anfangsglieder der vier Differenzreihen, 1; 3; 3; 1, alſo iſt

$$y = x.1 + \frac{x.x-1.}{1.2}.3 + \frac{x.x-1.x-2.}{1.2.3}.3$$

$+ \frac{x\ldots x-3.}{1..4}.1.$ Durch die Entwickelung der Producte ergiebt ſich $y = \frac{x}{24}(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$ oder $y = \frac{x.x+1.x+2.x+3.}{1.2.3.4}$. (Von der Verwandlung eines Aggregats in ein Product ſ. Artikel, Factor.)

Für die folgenden Reihen wird die Rechnung immer beſchwerlicher. Die gefundenen allgemeinen Glieder zeigen die Fortſchreitung derſelben hinlänglich. Denn da alle Reihen auf eine gleichförmige Art gebildet werden, ſo muß

das Geſetz, welches ſich ganz unzweydeutig aus den wirklich berechneten Gliedern ergiebt, allgemein ſeyn. Zur Beſtätigung dient folgendes. In der nten Reihe ſey

$$y = \frac{x . x+1 \ldots x+n-1.}{1 . 2 \ldots\ldots\ldots n}$$, und gleichmäßig in der

(n + 1)ten Reihe das Glied in der Stelle x, welches z heiße, $z = \frac{x . x+1 \ldots x+n.}{1 . 2 \ldots\ldots n+1.}$, und in derſelben das in der Stelle x − 1, welches z^1 ſey, $z^1 =$

$$\frac{x-1 . x \ldots x+n-1.}{1 . 2 \ldots\ldots n+1.}$$. Der Unterſchied dieſer beiden Glieder muß der Werth von y ſeyn, wie er es auch wirklich iſt.

Die Zahl x, die Stellenzahl einer figurirten Zahl, heißt ihre Seite (latus), oder ihre Wurzel.

Jedes Glied einer Verticalreihe in der Tafel der figurirten Zahlen iſt die Summe aller Glieder der nächſt vorhergehenden Verticalreihe von 1 in der letzten Differenzreihe, oder der mit O bezeichneten, bis mit zu dem Gliede der Horizontalreihe, worin jenes Glied befindlich iſt. Denn das xte Glied einer Horizontalreihe iſt die Summe des (x − 1)ten Gliedes derſelben Reihe und des xten in der nächſt obern. Dieſes iſt wieder die Summe des (x − 1)ten Gliedes ſeiner Horizontalreihe und des xten in der Verticalreihe zunächſt über ihm befindlichen. So fortfahrend erhält man durch Zerlegung der Glieder der xten Verticalreihe die Summe der Glieder in der (x − 1)ten.

Auf dieſe Art werden auch die Binomialcoefficienten in einer Stelle ſummirt, ſ. Binom. Coeff. 6. In der Tafel daſelbſt (4.) ſind dieſelben Zahlen wie hier, nur daß die Querreihen nicht übereintreffen. Die Querreihen in der Tafel der figurirten Zahlen ſind dort herablaufende, ſo wie die Querreihen dort hier hinauflaufende ſind.

Hieraus läßt ſich nun auch die Form der Zahlen jeder Reihe der figurirten Zahlen herleiten. Das erſte Glied der nten Reihe gehört in der Tafel der Binomialcoefficien-

ten auch zu der nten; das zweyte jener in dieſer zu der (n+1)ten Reihe; das dritte jener in dieſer zu der (n+2)ten Reihe, und ſo das xte jener zu der (n + x − 1)ten Reihe der Binomialcoefficienten. Nun iſt, für den Exponenten $n+x-1$, der xte Binomialcoefficient, wenn 1 mit gezählt wird, $= \frac{n+x-1 \,.\, n+x-2 \ldots n+1.}{1 \,.\, 2 \ldots . x-1.}$.

Iſt x größer als n, ſo heben ſich die Factoren $x-1 \ldots n+1$ im Zähler gegen die Factoren $n+1 \ldots . x-1$. im Nenner auf, und es iſt dieſer Binomialcoefficient, oder das xte Glied in der nten Reihe der figurirten Zahlen $= \frac{n+x-1 \ldots x+1 . x}{1 \ldots n-1 . n}$, wie vorher gefunden iſt. Iſt x kleiner als n, ſo ſetze man in dem Binomial-Coëfficienten im Zähler die Factoren, $n . n-1 \ldots x$, und im Nenner dieſelben, in der Ordnung $x . x+1 \ldots n$ zu, ſo erhält man ebenfalls den oben gefundenen Werth für das xte Glied der nten Reihe.

Die nte Reihe der figurirten Zahlen, wenn die mit O bezeichnete als erſte mit gezählt wird, beſteht aus den Coefficienten der entwickelten Potenz $(1-z)^{-n}$. Es iſt nämlich (binomiſcher Lehrſatz, 11.)

$$(1-z)^{-n} = 1 + nz + \frac{n . n+1}{1 . 2} z^2 + \frac{n . n+1 . n+2.}{1 . 2 . 3} z^3 + \frac{n . n+1 . n+2 . n+3.}{1 . 2 . 3 . 4} z^4 + \frac{n \ldots n+4.}{1 \ldots 5} z^5 + \text{etc.}$$

Aus dieſer Formel läßt ſich umgekehrt die Form der figurirten Zahlen herleiten. Man bezeichne die Coefficienten, außer 1, durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. ſo daß

$(1-z)^{-n} = 1 + \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 + \text{etc.}$

Nun iſt $(1-z)^{-n-1} = (1-z)^{-n}(1-z)^{-1} = (1-z)^{-n}(1+z+z^2+z^3+z^4+\text{etc.})$. Alſo iſt $(1-z)^{-n-1} = 1 + (1+\mathfrak{A})z + (1+\mathfrak{A}+\mathfrak{B})z^2 + (1+\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})z^3 + (1+\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D})z^4$

$+ (1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \mathfrak{E}) z^6 +$ etc. Dieſe Coefficienten ſind aber auch, $1 + \mathfrak{A} = \frac{n+1}{1}$; $1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \frac{n+1 \, . \, n+2.}{1 \, . \, 2}$; $1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = \frac{n+1 \, . \, n+2 \, . \, n+3.}{1 \, . \, 2 \, . \, 3}$; $1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} = \frac{n+1 \, . \, . \, n+4.}{1 \, . \, . \, 4}$; $1 + \ldots + \mathfrak{E} = \frac{n+1 \ldots n+5}{1 \, . \, . \, . \, 5}$, u. ſ. w. ſo daß der rte Coefficient in der Potenz $(1-z)^{-n-1}$ die Summe der r Coefficienten in der Potenz $(1-z)^{-n}$ iſt, beiderſeits die Einheit mit gezählt. Auf gleiche Art iſt auch das rte Glied in einer Querreihe der figurirten Zahlen die Summe von r Gliedern der nächſt vorhergehenden Reihe, zufolge der Natur arithmetiſcher Reihen. Gilt nun die Form der Binomial-Coefficienten für eine Reihe der figurirten Zahlen, ſo gilt ſie auch für die folgende, alſo auch für jede der übrigen. Sie gilt aber offenbar für $n = 1$, alſo auch für $n = 2$; $n = 3$, u. ſ. f.

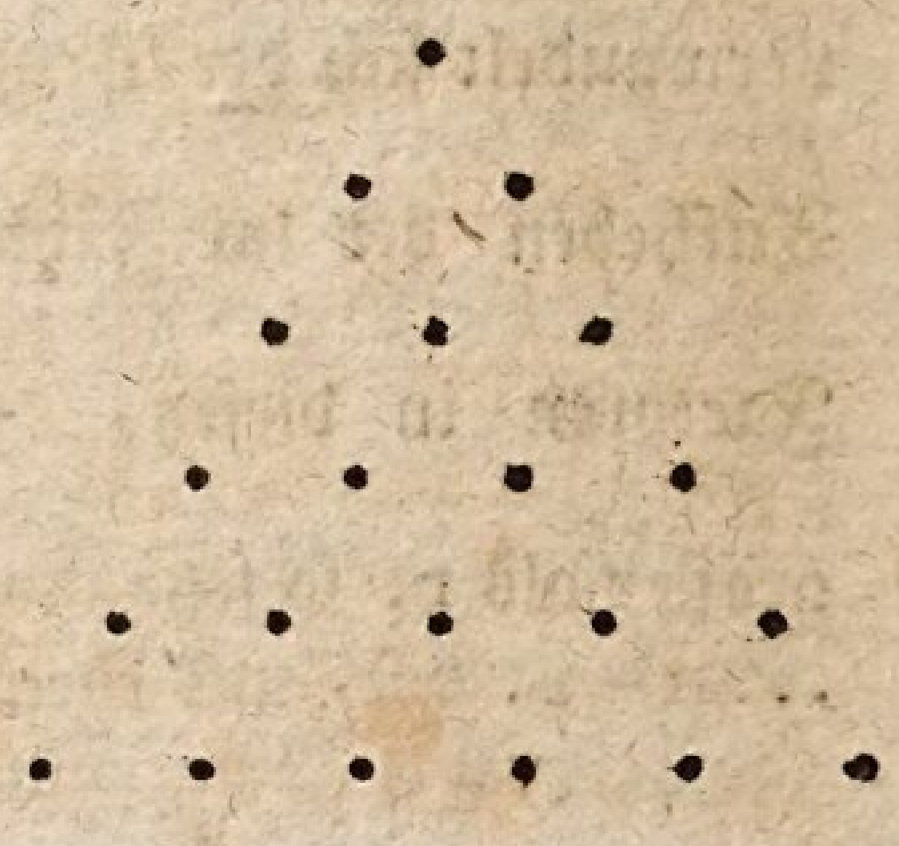
Demnach iſt für die nte Reihe, diejenige der gleich großen Differenzen mitgezählt, das rte Glied (mit Einſchluß der 1) $= \frac{n \, . \, n+1 \, . \, . \, . \, n+r-2.}{1 \, . \, 2 \, . \, . \, . \, r-1}$.

Hieraus wird die zuerſt gefundene Form auf die ſchon angewandte Art hergeleitet. Iſt n kleiner als $r-1$, ſo verwandelt ſich der Bruch, $\frac{n \, . \, . \, . \, . \, r \, . \, . \, . \, n+r-2.}{1 \, . \, . \, . \, n \, . \, . \, . \, r-1.}$, durchs Aufheben der im Zähler und Nenner gemeinſchaftlichen Factoren in dieſen, $\frac{r \, . \, . \, . \, . \, n+r-2.}{1 \, . \, . \, . \, . \, n-1.}$. Iſt aber n größer als r, ſo ſetze man im Zähler die Factoren $r \, . \, r+1 \, . \, . \, . \, n-1.$ vor, und eben dieſelben im Nenner nach, ſo wird

erhalten $\frac{r.r+1\ldots n+r-2.}{1.2\ldots n-1.}$. Dieſes iſt die zuerſt gefundene Form. Es bedeutet hier nur n eine um 1 größere Zahl als dort, weil hier die Reihe der gleich großen Differenzen mitgezählt wird.

Jede Querreihe in der Tafel der figurirten Zahlen kommt auch als Verticalreihe vor, in einerley Abſtand von der äußerſten, die oberſte Reihe O mitgezählt. Die Glieder einer Verticalreihe ſind eben ſo ſummirende Glieder von der nächſt vorhergehenden, als es die Glieder einer Querreihe ſind. Daher iſt jede figurirte Zahl zweymahl vorhanden, außer diejenige, welche in dem Durchſchnitte beider gleichen Reihen enthalten iſt. Dieſes erhellt auch aus der Form der Glieder. Wenn n die Zahl der Querreihe iſt, die Reihe O mitgerechnet, ſo iſt das rte Glied = $\frac{n.n+1\ldots n+r-2.}{1.2\ldots r-1}$. Eben dieſen Werth giebt aber auch der Bruch $\frac{r.r+1\ldots n+r-2.}{1.2\ldots n-1.}$. Jene Form giebt für ein gegebenes r und veränderliches n ein Glied der rten Verticalreihe; die andere das nte Glied der rten Querreihe.

Die Benennung, figurirte Zahlen, hat ihren Urſprung von der geometriſchen Erzeugung der drey erſten Reihen. Die Einheit werde durch einen Punct dargeſtellt, ſo bildet eine Reihe von Puncten ein Glied der arithmetiſchen Reihe I. ab. Dieſe Zahlen heißen daher auch numeri lineares. Man lege ferner 1, 2, 3, 4, 5, 6, u. w. Puncte in gleichen Abſtänden von einander, auf parallelen, gleich weit von einander abſtehenden geraden Linien, die mit ihren Endpuncten in die Schenkel eines gleichſeitigen Dreyecks fallen, ſo iſt die



Anzahl der Puncte in einem der gleichſeitigen Dreyecke ein Glied der Reihe II. Die Zahlen dieſer Reihe heißen daher Triangular- oder Trigonalzahlen. Man ſtelle ſich die Puncte als Mittelpuncte von Kugeln vor. Auf das Dreyeck, das in der Seite n Kugeln enthält, werde ein anderes geſchichtet, das n – 1 Kugeln in der Seite enthält, über je drey Kugeln immer eine. Auf dieſes Dreyeck lege man gleichmäßig eine Schicht von n – 2 Kugeln, und fahre fort, bis zuletzt nur noch eine Kugel aufzulegen iſt. Die Anzahl aller Kugeln in der dadurch entſtandenen Pyramide iſt die Summe von n Triangularzahlen, alſo ein Glied der Reihe III. Dieſe heißt daher die Reihe der Pyramidalzahlen. Die Zahlen der folgenden Reihen kann man zwar nicht geometriſch conſtruiren, doch nennt man ſie analogiſch auch Pyramidalzahlen, mit dem Zuſatze die zweyten, die dritten, die vierten, da jene die erſten heißen. Auch fügt man noch, um ſie von andern verwandten Zahlen zu unterſcheiden, den Zuſatz, Dreyeckige (triangulares) hinzu.

Unter den drey Arten, wie Kugeln in Zeughäuſern regelmäßig auf einander gelegt werden, iſt eine, nach welcher die Schichten gleichſeitige Dreyecke bilden. Der Haufe macht eine Pyramide mit drey gleichen Seitenflächen. Aus der Anzahl der Kugeln in einer der Seiten des unterſten Dreyecks ergiebt ſich ſogleich die Anzahl der Kugeln in der Pyramide. Iſt jene = n, ſo iſt dieſe

$\frac{n \cdot n+1 \cdot n+2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Z. B. für n = 9, iſt die Anzahl der Kugeln = 165.

Man kann die Puncte auch in Quadrate und andere regelmäßige Vielecke vertheilen, die zuſammen ein Vieleck derſelben Art bilden. Die Anzahl der Puncte in einer ſolchen Figur iſt eine Polygonalzahl, woraus auf ähnliche Art Pyramidalzahlen gebildet werden.

Figurirte Zahlen hießen in ältern Zeiten Producte aus zwey oder mehr Factoren, welche die Seiten der Zahl genannt wurden. So erklärt ſie Lazarus Schoner in

einer Abhandlung de numeris figuratis, die er ſeiner Ausgabe von Petri Rami Arithmetica et Algebra, Francof. 1586. beygefügt hat. Ein Product aus zwey Factoren läßt ſich durch Puncte, die innerhalb eines Rechtecks gleichmäßig vertheilt ſind, darſtellen; ein Product aus drey Factoren durch Puncte in einem Parallelepipedum. Schoner nennt eine ſolche Zahl ſolidus. Weiter geht die geometriſche Darſtellung nicht, aber nach einer erdichteten Modification, wie Schoner ſich ausdruckt, heißt ein Product von vier Factoren ein Biquadrat, von fünf wieder ſolidus, beſſer nach andern ſurſolidus, von ſechs quadrati cubus, von ſieben biſolidus, von acht triquadratus, von neun cubicubus. In neuern Zeiten iſt die Benennung, figurirte Zahlen, für die Glieder arithmetiſcher Reihen aller Ordnungen, in welchen das erſte Glied die Einheit iſt, eingeführt. Einige, als Lambert, und d'Alembert in dem Dictionn. encyclopédique, ſchränken dieſe Benennung auf diejenigen Reihen ein, die in dieſem Artikel betrachtet ſind. Allein der Grund der Benennung findet auch bey denen Reihen Statt, welche aus den beſtändigen Unterſchieden, 2, 3, 4, 5, etc. gebildet werden. Die Summen von den Gliedern der Reihe, 1, 3, 5, 7, etc. laſſen ſich durch Vertheilung auf Quadraten darſtellen; die Summen von den Gliedern der Reihe 1, 4, 7, 10, etc. durch Vertheilung auf Fünfecken, u. ſ. f. die Formeln für dergleichen Reihen werden in dem Artikel, Polygonalzahlen, vorkommen. Sie fließen aus den hier entwickelten unmittelbar.

In der erſten Hälfte des 17ten Jahrhunderts hat man ſich viel mit den figurirten Zahlen beſchäftigt. Faulhaber, Remmelin u. a. ſuchten in den Zahlen, die in der Bibel vorkommen, algebraiſche Zuſammenſetzungen, da ſie glaubten, Gott habe einen geheimen Sinn, einen Fingerzeig hineingelegt, um die ſpäte Nachwelt noch darauf aufmerkſam zu machen. Die berüchtigte Zahl 666 in der Apokalypſe iſt, wie Remmelin fand, eine Trigonalzahl, deren Radix 36. Dieſe iſt eine Tetragonalzahl, deren Radix 6; dieſe eine Pronikzahl (von der Form $nn + n$),

deren Radix 2, welche auch eine Pronikzahl iſt. In den Schriften Daniels finden ſich drey Zahlen, deren Zuſammenſetzung ſonderbar genug iſt, daß ſie, bey der Vorausſetzung eines geheimen, der Nachwelt zu enthüllenden Sinnes, als prophetiſche Zahlen erſcheinen mußten. Käſtners Geſch. der Mathem. III S. 114. ff.

Jakob Bernoulli kam bey ſeiner Unterſuchung über die Combinationen für die Lehre von der Wahrſcheinlichkeit auf die Betrachtung der figurirten Zahlen, derer, wovon in dieſem Artikel gehandelt iſt, und erwies das Geſetz derſelben allgemein, welches er zuerſt geleiſtet zu haben ſcheint. Ars conjectandi P. II. cap. 3. Sein Bruder gab ihm noch einige Abkurzungen des Beweiſes an. Io. Bernoulli Opera, T. III. 521. IV. 14. Hauſen hat den Bernoulliſchen Beweis in ſeinen Elementis Matheſeos, pag. 61. aufgenommen.

Wallis hat in der Arithmetica Infinitorum weitläuftige Rechnungen über die figurirten Zahlen angeſtellt, Propoſ. 176. ſeqq. Operum Vol. I. p. 445 — 451. Er gründet ſie auf die Sätze von der Summirung der Potenzen der natürlichen Zahlen, die er nur durch Induction dargethan hatte, ſo wie er auch die Formen der figurirten Zahlen nur auf ſolche Art erweiſet.

L'Huilier hat einen ihm eigenthümlichen Beweis der Formen der figurirten Zahlen in ſeiner Algebra, Th. II. Kap. 8. gegeben. Die Methoden in dieſem Artikel ſind nicht entlehnt.

Fläche, iſt die Oberfläche eines Körpers (ſeine Begränzung) abgeſondert von dem Körper gedacht. Sie iſt eine ebene (ſ. Ebene) oder krumme Fläche. Die krummen Flächen ſind entweder ſolche, worin ſich gerade Linien, die ganz in ſie fallen, ziehen laſſen, wie cylindriſche und koniſche; oder ſolche, worauf zwiſchen keinen zwey Puncten eine gerade Linie gezogen werden kann, wie die Oberflächen von Kugeln und Sphäroiden.

Die Natur der Flächen wird durch eine Gleichung zwiſchen drey veränderlichen Größen, nebſt gegebenen, die

auch fehlen können, ausgedrückt. Man ſetze drey Ebenen auf einander ſenkrecht, ſo iſt jeder Punct der Fläche durch die Abſtände von dieſen drey Ebenen beſtimmt. Die drey Abſtände ſind die drey veränderlichen Größen in jener Gleichung. Zur Deutlichkeit des Verfahrens wird es nöthig ſeyn, dieſes bis nach dem Artikel, krumme Linien zu verſparen.

Flächen-Maaß, die Einheit zur Berechnung eines Flächenraumes oder zur Vergleichung deſſelben mit andern Flächenräumen, z. B. Quadratfuß, Quadratmeile, Morgen, Hufe.

Flächenraum, ein durch Linien begränzter Theil einer Fläche.

Flächenzahl, numerus planus, eine Zahl, die aus der Multiplication zweyer Zahlen entſteht.

Flächen-Körperzahl, numerus planoſolidus, eine Zahl, die aus der Multiplication von fünf Zahlen entſteht.

Florentiniſche Aufgabe (Aenigma Florentinum) iſt die von Viviani zu Florenz den Analyſten im J. 1692. vorgelegte geometriſche Aufgabe, woran er ſie ihre Geſchicklichkeit in der damahls neuen Analyſis verſuchen laſſen wollte. Er betitelte ſie: Aenigma geometricum de miro opificio teſtudinis quadrabilis hemiſphaericae, autore D. Pio Liſci Poſillo Geometra. Der angenommene Name bedeutet Poſtremo Galilaei Diſcipulo. Die Einkleidung, welche er der Aufgabe ertheilte, zeugt von dem Vergnügen, welches ihm ihre Erfindung gemacht hat. Sein Programm fängt folgendergeſtalt an.

Unter den ehrwürdigen Denkmählern des alten Griechenlands iſt noch ein unzerſtörbarer herrlicher Tempel vorhanden, welcher der Geometrie gewidmet iſt, von kreisrunder Form, mit einem Gewölbe bedeckt, das inwendig eine vollkommene Halbkugel iſt. Dieſes iſt mit vier gleich großen Öffnungen, rings an der Grundfläche herum, durchbrochen, die mit großer Kunſt ſo geſtaltet und ſo groß

gemacht ſind, daß die übrige, mit koſtbarer Moſaik gezierte Oberfläche geometriſch genau quadrirbar iſt.

1. Die Aufgabe war für die neue Analyſis leichter als Viviani vielleicht geglaubt haben mochte, wenn er gleich in ſeinem Programm ſagt, daß er nicht zweifele, ſie würde dadurch ohne Schwierigkeit aufgelöſet werden, und daß er nur die verſchiedenen Auflöſungsarten durch dieſelbe zu erhalten wünſche. Leibnitz fand die Auflöſung an demſelben Tage, an welchem er die Aufgabe erhielt, und theilte ſie in den Actis Erud. 1692. mit. Jakob Bernoulli löſete ſie nicht allein auf, ſondern zeigte auch, daß ihr auch auf unendlich viele Arten Genüge geſchehen könne. (Acta Erud. 1692. Operum, Nr. 52.). Wallis handelt in dem letzten Capitel ſeiner Algebra von dieſer Aufgabe, hat ſie aber nicht recht gefaßt. Viviani ſelbſt machte ſeine ſehr ſcharfſinnige geometriſche Auflöſung, mittelſt der Durchſchnitte der Oberflächen zweyer Cylinder mit der Halbkugelfläche, in einer kleinen, italieniſch geſchriebenen, Schrift, Florenz 1692, aber ohne Beweiſe, bekannt. Dieſe ſuchte der P. Grandi, ein Camaldulenſer Mönch, auf, und trug ſie vor in der Schrift, Geometrica divinatio Vivianeorum problematum, Florent. 1699. Er zeigt unter andern auch, daß auf der Oberfläche eines ſenkrechten Kegels ein Stück abgeſchnitten werden kann, das vollkommen quadrirbar iſt. Die dadurch entſtandene Figur nennt er Velum Camaldulenſe. Allein Joh. Bernoulli hatte ſchon früher (Act. Er. Jun. 1696.) dieſes angezeigt. Der Satz iſt: Wenn auf der Grundfläche eines ſenkrechten Kegels ein ſenkrechtes Prisma über irgend einer Grundfläche, gerad- oder krummlinichter, errichtet wird, ſo ſchneidet dieſes Prisma auf der Kegelfläche ein Stück ab, welches ſich zu der Grundfläche des Prisma verhält, wie die Seite des Kegels zu dem Halbmeſſer ſeiner Grundfläche.

2. Die Aufgabe betrifft zwar nur eine geometriſche Curioſität, allein ſie iſt ein ſehr dienliches Beyſpiel zu der Lehre von krummen Flächen, und krummen darauf gezogenen Linien. Das Intereſſe bey einer geometriſchen Unterſuchung beruht nicht auf der praktiſchen Brauchbarkeit,

ſondern auf der Künſtlichkeit und Nettigkeit der Aufloͤſung, und auf der Eurythmie der gefundenen Verhaͤltniſſe.

3. Es ſtelle ABCDA (Tab. XII. Fig. 51.) die Haͤlfte einer Halbkugel vor, worin der Halbkreis BAD ſenkrecht auf den Halbkreis BCD ſteht. Auf ihrer Oberflaͤche ſollen die ſich gleichen Curven BEC, DFC gezogen werden, von ſolcher Beſchaffenheit, daß der Flaͤchenraum zwiſchen ihnen beiden und dem halben Kreisumfange BAD quadrirbar ſey, oder zu dem Quadrate des Halbmeſſers ein rationales Verhaͤltniß habe.

Zu der Aufloͤſung dieſer Aufgabe iſt es noͤthig, den Inhalt eines Sectors der Kugelflaͤche zwiſchen zwey gleichen Bogen groͤßter Kreiſe und einem Bogen eines kleinern angeben zu koͤnnen, das iſt, ihn mit dem Inhalte der Kugelflaͤche zu vergleichen.

4. Es ſey (Fig. 52.) O der Mittelpunct einer Kugel, ihr Halbmeſſer OP. Auf ihrer Oberflaͤche ſind zwey Quadranten, PNM, gezogen, welche den Winkel MPM, oder deren Ebenen den Winkel MOM, mit einander machen. Mit den Halbmeſſern OM ſeyn die geraden QN in der Ebene der beiden Quadranten parallel, ſo iſt NN der Bogen eines zu MM gehoͤrigen Parallelkreiſes. Wenn der Quadrant PM eine volle Drehung um PO macht, ſo beſchreibt PM die halbe Kugelflaͤche, und PN ein Segment derſelben. Jene iſt $= 2\pi . PO^2$, dieſes $= 2\pi . PO \times PQ$, (Complanation, Th. I. S. 513.). Der Umfang eines groͤßten Kreiſes der Kugel iſt $= 2\pi . PO$, und der Sector MPM verhaͤlt ſich zu der halben Kugelflaͤche wie MM zu $2\pi . PO$; alſo iſt der Sector MPM $= MM \times PO$, und der kleinere NPN $= MM \times PQ$. Auch iſt der Abſchnitt MNNM $= MM \times OQ = MM \times OP \times \sin MON$.

5. Man lege (Fig. 51.) durch C, und durch zwey Puncte, M, m, der Curve BEC zwey groͤßte Kreiſe, welche den Quadranten AB in P, p treffen. Da C der Pol von AB iſt, ſo ſtehen CP, Cp ſenkrecht darauf, und PCp iſt ein Sector der Halbkugel. Der Halbmeſſer der Kugel ſey $= a$, der zu BP gehoͤrige Winkel am Mittel-

puncte $= \omega$, der zu PM gehörige $= \varphi$, ſo iſt der Bogen PB $= a\omega$, PM $= a\varphi$. Der zu Pp gehörige Winkel ſey $\Delta\omega$, der zu pm $= \varphi + \Delta\varphi$, ſo iſt Pp $= a\Delta\omega$, und pm $= a(\varphi + \Delta\varphi)$. Die ſphäriſche Fläche PBM ſey $= Z$, die PMmp $= \Delta Z$, ſo iſt $\Delta Z >$ Pp $\times$ a. ſin PM, und $\Delta Z <$ Pp $\times$ a. ſin pm, das iſt

$$\Delta Z > aa \sin \varphi . \Delta\omega$$

$$\Delta Z < aa \sin (\varphi + \Delta\varphi). \Delta\omega.$$

Es iſt $\sin (\varphi + \Delta\varphi) = \sin \varphi . \cos . \Delta\varphi + \cos \varphi . \sin \Delta\varphi$, (Goniometrie, II.), und $\sin \Delta\varphi = \Delta\varphi - \frac{1}{6} \Delta\varphi^3 + \text{etc.}$; $\cos \Delta\varphi = 1 - \frac{1}{2} \Delta\varphi^2 + \text{etc.}$ (Cyklometrie, 5, 6.), alſo der von der Größe der Differenzen $\Delta\omega$ und $\Delta\varphi$ unabhängige Theil des Differenzquotienten $\frac{\Delta Z}{\Delta\omega}$, das iſt der Differentialquotient $\frac{\partial Z}{\partial\omega} = aa \sin \varphi$, oder es iſt $\partial Z = aa \sin \varphi . \partial\omega$.

6. Die Relation zwiſchen ω und φ hängt von der Natur der Curve BMC ab, ſo wie dieſe von jener Relation. Damit Z einen geometriſch beſtimmbaren Werth erhalte, unabhängig von der Quadratur des Kreiſes oder einer andern Curve, muß $\sin \varphi$ eine ſolche trigonometriſche Function von ω ſeyn, die keine conſtante Größe enthält. Dieſes kann auf mancherley Art geſchehen. Z. B. es ſey $\varphi = \omega$, oder $\varphi = m\omega$, oder $\sin \varphi = m \sin \omega$, u. dgl. Die einfachſte Annahme iſt $\varphi = \omega$.

7. Man ſetze $\varphi = \omega$, oder nehme den Abſtand jedes Punctes M der Curve auf CP von dem Quadranten AB gleich dem Bogen BP, ſo iſt $\partial Z = aa \sin \omega . \partial\omega$, alſo $Z = \text{Conſt} - aa \cos \omega$. In dem Anfange der Curve iſt $Z = 0$, und $\cos \omega = 1$, alſo Conſt $= aa$, und daher $Z = aa (1 - \cos \omega)$. Für $\omega = 90°$, da P in A fällt, iſt $\cos \omega = 0$, und $Z = aa$, oder die ſphäriſche Fläche BACEB $= aa$. Wird nun auf jedem Quadranten der Halbkugel eine Curve wie BEC gezogen, ſo ſchneiden dieſe

auf ihrer Fläche um A herum einen Flächenraum ab, ſo groß als 4aa oder als das Quadrat des Durchmeſſers. Das Halbkugelgewölbe wird von vier Öffnungen durchbrochen, die jede einen Quadranten des Umfanges der Grundfläche beſpannen, ſo daß zwiſchen zwey neben einander liegenden ein Pfeiler bleibt, der freylich nur auf einen Puncte ruhet.

8. Auf einer künſtlichen Erdkugel kann man die Curve BEC leicht zeichnen. Sie geht durch die Puncte, deren Breite ihrer Länge bis zu einem Quadranten, gleich iſt.

9. Man ziehe durch A und M einen größten Kreisbogen AM, ſo iſt in dem bey P rechtwinklichten ſphäriſchen Dreyeck APM für AM die Gleichung, $\cos AM = \cos AP \times \cos PM = \sin\omega \, . \cos\omega = \frac{1}{2}\sin 2\omega$. Alſo iſt $\cos AM$ am größten, wenn $2\omega = 90^\circ$, oder $\omega = 45^\circ$ iſt, das iſt, AM am kleinſten, für $\omega = 45^\circ$. Es ſey $\cos AE = \frac{1}{2}\sin 90^\circ = \frac{1}{2}$, ſo iſt $AE = 60^\circ$, der kleinſte Abſtand der Curve von A.

10. Es ſey BGC (Fig. 53.) ein Quadrant, deſſen Halbmeſſer demjenigen der Kugel gleich iſt. In demſelben ſey BmC die orthographiſche Projection der Curve BMC auf der Kugelfläche, und GB, GC von den Bogen AB, AC, auch GmQ von AMQ, dem durch M gelegten Quadranten AQ. Der Winkel BGQ, welchen der Durchſchnitt der Ebene des Kreisbogens AMQ und der Grundfläche mit GB macht, iſt dem ſphäriſchen Winkel BAQ oder PAM (Fig. 51.) gleich, wie daſelbſt der Winkel BGQ auf der Ebene des Halbkreiſes BCD an dem Mittelpuncte deſſelben G. In dem ſphäriſchen Dreyeck PAM iſt.

I. $\cos AM = \cos AP \, . \cos PM$.

II. $\sin AM \, . \sin PAM = \sin PM$.

III. $\text{tang}\, AM \, . \cos PAM = \text{tang}\, AP$.

IV. $\sin AM \, . \cos PAM = \sin AP \, . \cos PM$.

von welchen IV. aus der Verbindung von I. und III. entſteht.

Durch den Punct m ziehe man mX ſenkrecht auf GB, und mY ſenkrecht auf GC. Noch beſchreibe man

über GQ den Quadranten AMQ, und ziehe darin auf GQ die ſenkrechte mM, ſo iſt Mm die Höhe des Punctes M auf der Kugel über der Grundfläche BCD. Die Linien, GX, GY, mM, ſind drey Coordinaten für die Curve BMC. Da ſie nicht in einer und derſelben Ebene liegt, ſo ſind zu ihrer Gleichung drey Coordinaten nöthig.

Man ſetze $GX = x$; $GY = y$, $mM = z$. Da $Gm = a \sin AM$ iſt, ſo iſt $x = a. \sin AM. \cos mGB = a. \sin AM. \cos PAM = a \sin AP. \cos PM = a \cos \omega^2$. Ferner iſt $y = a. \sin AM. \sin mGB = a. \sin AM. \sin PAM = a. \sin PM = a \sin \omega$. Drittens iſt $Mm = a. \cos AM = a. \cos AP. \cos PM = a \sin \omega. \cos \omega$. Alſo

$$x = a. \cos \omega^2;\ y = a \sin \omega;\ z = a \sin \omega. \cos \omega.$$

Da M ein Punct auf der Kugelfläche iſt, ſo iſt $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Dieſes geben auch die drey gefundenen Werthe der Coordinaten. Es iſt nämlich

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (\cos \omega^4 + \sin \omega^2 + \sin \omega^2. \cos \omega^2)$$
$$= a^2 (\cos \omega^2 (\cos \omega^2 + \sin \omega^2) + \sin \omega^2) =$$
$$= a^2 (\cos \omega^2 + \sin \omega^2) = a^2.$$

11. Man beſchreibe (Fig. 54.) über dem Durchmeſſer GB, der dem Halbmeſſer der Kugel, a, gleich iſt, einen Halbkreis, und nehme auf demſelben die Abſciſſe $GX = a \cos \omega^2$, errichte auf GB in X die ſenkrechte MX, ſo iſt $MX^2 = aa (1 - \cos \omega^2) \cos \omega^2 = aa \sin \omega^2. \cos \omega^2$; und $MX = a \sin \omega . \cos \omega$; alſo $MX = z$, der auf die Grundfläche der Halbkugel ſenkrechten Ordinate zu dem Puncte M der Curve BMC.

12. Über dem Halbkreiſe GMB errichte man einen halben, darauf ſenkrechten Cylinder von der Höhe GB oder a. In dem Abſtande, $y = a \sin \omega$, von der Grundfläche führe man einen Schnitt derſelben parallel. Dieſer iſt dem Halbkreiſe GMB gleich. Man nehme auf dem Durchmeſſer GB den Theil $GB = x = a \cos \omega^2$, ſo iſt wie eben gefunden ward, die ſenkrechte $MX = z = a \sin \omega . \cos \omega$, und alle Puncte der cylindriſchen Oberfläche, die wie dieſer Punct M beſtimmt werden, haben

mit den correſpondirenden Puncten der Curve CEB auf der Kugel für einerley Werthe von ω, dieſelben Ordinaten ſo daß die Curve auf der cylindriſchen Oberfläche der auf der Kugel gleich iſt.

13. Wenn nun auf der Fläche des Halbkreiſes BAD (Fig. 51.) über dem Durchmeſſer BD zwey Halbkreiſe, wie GMB (Fig. 54.) beſchrieben, und über dieſen auf beiden Seiten zwey ſenkrechte Halbcylinder errichtet werden, welche die Oberfläche der Halbkugel auf der einen und der andern Seite von BAD in Curven, wie BEC, CFD, ſchneiden, ſo iſt die ſphäriſche Oberfläche, welche von den vier Curven um A herum abgeſchnitten wird, dem Quadrat des Durchmeſſers gleich.

14. Dieſes iſt die Conſtruction, welche Viviani ſelbſt zur Auflöſung ſeiner Aufgabe giebt. Vermuthlich hat er die Geſtalt des Durchſchnitts einer ſphäriſchen und cylindriſchen Fläche geſucht, und iſt dabey, gewiß nicht ohne Schwierigkeit, auf das merkwürdige Reſultat gekommen, daß die von den durchſchneidenden Cylindern übrig gelaſſene Fläche der Halbkugel dem Quadrat des Durchmeſſers gleich iſt. Montücla ſagt in ſeiner Geſch. d. Mathem. Th. II. S. 94. daß dieſer Flächenraum dem doppelten Quadrat des Halbmeſſers gleich ſey, welches unrichtig iſt.

15. Der Flächenraum zwiſchen der nach der vorher angegebenen Conſtruction auf der Oberfläche eines Halbcylinders beſchriebenen Curve, dem Umfange des Halbkreiſes auf deſſen Grundfläche, und einer Seite des Cylinders, iſt dem Quadrat des Durchmeſſers deſſelben, oder dem des Halbmeſſers der Kugel gleich. — Denn wenn man einen Bogen des Halbkreiſes als Abſciſſe, die darauf in der Oberfläche bis an den Punct M der Curve gezogene als Ordinate betrachtet, ſo iſt das Differential des Flächenraums gleich dem Product aus der Ordinate in das Differential der Abſciſſe, wie bey ebenen Figuren. Der Kreisbogen ſey BM (Fig. 54.), deſſen lineariſcher Sinus in dem Halbkreiſe MX = z, ſo iſt der dazu gehörige Winkel =

Ang ſin $\frac{2z}{a}$, weil der Halbmeſſer des Kreiſes $= \frac{1}{2}a$ iſt, und der Bogen BM $= \frac{1}{2}a$. Ang ſin $\frac{2z}{a}$. Das Differential iſt $= \frac{a\partial z}{\sqrt{(aa-4zz)}}$ (Differentialformeln, 29.). Die Ordinate an der Curve auf der cylindriſchen Fläche iſt der Abſtand des Schnittes, worin M befindlich iſt, von der Grundfläche, alſo $= y$. Der cylindriſche Flächenraum ſey $= Z$, ſo iſt $\partial Z = \frac{ay\partial z}{\sqrt{(aa-4zz)}}$. Nun iſt $z = a \sin\omega . \cos\omega = \frac{1}{2}a \sin 2\omega$, alſo $\partial z = a \cos 2\omega . \partial\omega$. Ferner iſt $\sqrt{(aa-4zz)} = a \cos 2\omega$, und $y = a \sin\omega$. Demnach iſt $\partial Z = a^2 \sin\omega . \partial\omega$, und daraus $Z = C - a^2 \cos\omega$. Für BM $= 0$ iſt $\omega = 0$, und $\cos\omega = 1$, daher $C = aa$, ſo daß $Z = aa(1-\cos\omega)$. Das iſt derſelbe Werth, der vorher für die ſphäriſche Fläche BPM gefunden iſt. Dieſe und die cylindriſchen ſind für zuſammengehörige Punkte M einander gleich, ſo daß die cylindriſche zwiſchen der Curve, dem Halbkreiſe der Grundfläche und der Seite a dem Quadrat des Halbmeſſers der Kugel gleich iſt. Der Theil der Oberfläche von dem durch die Kugel auf die vorher angegebene Art ganz durchgeſteckten Halbcylinder, innerhalb der Kugel iſt daher zweymahl jenem Quadrate gleich, und die von beiden Halbcylindern ſo groß als das Quadrat des Durchmeſſers der Kugel. Montucla macht a. a. O. dieſe Bemerkung.

16. Boſſut hat dem Vivianiſchen Problem noch eine merkwürdige Erweiterung gegeben. Er findet, daß der körperliche Raum in der Kugel, welchen zwey Cylinder, deren Durchmeſſer halb ſo groß als derjenige der Kugel iſt, übrig laſſen, wenn ſie neben einander auf einen großen Kreis der Kugel ſenkrecht geſtellt werden, zwey Neuntel von dem Würfel des Durchmeſſers der Kugel iſt. Traités du calcul différentiel et intégral, T. II. p. 546. ff.

Der zweyte Beweis, den er daſelbſt giebt, iſt noch leicht genug, um hier mitgetheilt werden zu können. Ich werde ihn etwas verändern, indem ich ihn an die hier ſchon erwieſenen Sätze knüpfe.

17. Es iſt (Fig. 55.) AGB der Quadrant eines Kreiſes; auf dieſem ſtehen die Quadranten CGB, CGA ſenkrecht, die es auch auf einander ſeyn, ſo daß die Figur GABC den Octanten einer Kugel abbildet. Über GB als Durchmeſſer werde der Halbkreis BNG beſchrieben, und auf dieſem ein halber ſenkrechter Cylinder errichtet. Dieſer ſchneidet die Kugelfläche mit ſeiner krummen Oberfläche in der gedoppelt krummen Linie CMB, da die ebene, den ganzen Cylinder halbirende Fläche GCHB von jener in dem Quadranten CB geſchnitten wird. Die innerhalb der Kugel enthaltene Portion des halben Cylinders wird theils von zwey ebenen Figuren, dem Halbkreiſe GNB und dem Quadranten CGB, theils von der cylindriſchen Fläche CGNBMC und der ſphäriſchen CMBC begränzt. Die krumme Linie CMB iſt die zur Auflöſung der Vivianiſchen Aufgabe gefundene (12.).

18. Man ſetze durch CG und einen Punct M dieſer Curve eine Ebene, welche den Quadranten AGB in GP, den Halbkreis GNB in GN ſchneidet. Ihr Durchſchnitt mit der ſphäriſchen Fläche CMBC iſt der Bogen CM eines großen Kreiſes, mit der cylindriſchen die gerade, auf die Grundfläche ſenkrechte MN. (Denn eine durch M und die Axe des Cylinders gelegte Ebene ſchneidet die cylindriſche Fläche in einer geraden, auf die Grundfläche ſenkrechten Linie. Der Durchſchnitt der Ebenen durch CG und die Axe, und den Punct M, iſt auch eine ſolche ſenkrechte, alſo mit jener dieſelbe). Durch die geſetzte Ebene erhalten wir nun einen Abſchnitt des Cylinderſtücks zwiſchen dem Quadranten CGB und dem gemiſchtlinichten Viereck CGNMC. Man ſetze noch eine Ebene durch CG, welche die ſphäriſche Fläche des Cylinderſtücks in Cm, die cylindriſche in mn, die Grundfläche in Gn ſchneide. Der Inhalt des zwiſchen beiden durch CG gelegten Ebenen enthaltenen Cylinderſtücks iſt die Differenz zweyer von

CGB an genommenen Cylinderſtücke. Dieſe Differenz drucke man durch den zugehörigen Unterſchied der Winkel BGN, BGn aus, ohne auf die Veränderungen von CM und MN zu achten, ſo hat man das Differential von dem Cylinderſtück zwiſchen CGB und CGNMC, woraus ſich dieſes Cylinderſtück wird finden laſſen. Zur Vergleichung mit Fig. 51. ſind zu denſelben Puncten, auch dieſelben Buchſtaben geſetzt. Jene Figur kehre man um, ſo erhalten die Linien daſelbſt dieſelbe Lage wie hier in Fig. 55.

19. Man ſetze GB = a; den Winkel BGP = ω. Der Bogen BP und der Punct M gehören hier eben ſo zuſammen, wie in Fig. 51. der Bogen BP und der Punct M. Nun iſt dort der Abſtand des Punctes M von der Ebene BAD oder BAG = a ſin ω, nämlich der in (10.) durch y bezeichnete. Alſo iſt MN = a ſin ω. Die Verlängerung von Gn treffe BA in p, ſo iſt der Bogen Nn = Pp, auch wenn ſie endlich ſind. Denn der Bogen BN gehört zu einem Winkel am Mittelpuncte, der doppelt ſo groß iſt, als der Winkel BGP am Mittelpuncte des Bogens BP, dagegen aber der zu jenem gehörige Halbmeſſer halb ſo groß iſt als der Halbmeſſer zu BP. Daher iſt BP = BN; Bp = Bn, und Pp = Nn. Man ziehe die in N berührende NH, und auf dieſe die ſenkrechte GH. Der Winkel GNH iſt gleich dem Winkel am Umfange, GBN, der auf dem Bogen GN ſteht. Alſo iſt GH = GN. ſin GBN = GB. coſ ω^2 = a. coſ ω^2.

Das Cylinderſtück zwiſchen den beiden durch CG gelegten Ebenen beſteht aus zwey pyramidenartigen Körpern, mit der gemeinſchaftlichen Spitze G. Der eine derſelben hat zur Grundfläche das Stück MNnm der Cylinderfläche und zur Höhe GH, als die ſenkrechte auf die den Cylinder in MN berührende Ebene. Da eine Pyramide der dritte Theil des Products aus der Grundfläche in die Höhe iſt, ſo iſt die Pyramide über MNnm = $\frac{1}{3}$. MN . Nn . GH, in dem bey der elementariſchen Differenz zweyer Cylinderſtücke weder die Krümmung der Grundfläche noch der Unterſchied der beiden MN, mn in Betracht kommen darf.

Nun iſt $MN = a\sin\omega$; $pn = PN = a\partial\omega$; $GH = a\cos\omega^2$, alſo die Pyramide über $MNnm = \frac{1}{3}a^3 \sin\omega . \cos\omega^2 . \partial\omega$.

Die Fläche CMm iſt $= a(1 - \cos CM) . Pp$, (4.). Man verlängere den Bogen CM bis an AB in P, ſo iſt für unſere Curve $PM = PB$, (7.), alſo
$\cos CM = \sin PM = \sin\omega$, und die Fläche
$CMm = a(1 - \sin\omega) . a\partial\omega = a^2(1 - \sin\omega)\partial\omega$.
Dieſe mit $\frac{1}{3}a$ multiplicirt giebt die elementariſche Pyramide über $CMm = \frac{1}{3}a^3 (1 - \sin\omega)\partial\omega$.

Alſo iſt das elementariſche Cylinderſtück,
$\partial Z = \frac{1}{3}a^3 (1 - \sin\omega + \cos\omega^2 . \sin\omega)\partial\omega$.

Es iſt $\sin\omega . \partial\omega = - \partial\cos\omega$ (Differentialrechnung, 38.); dadurch

$$\partial Z = \frac{1}{3}a^3 (\partial\omega + \partial\cos\omega - \cos\omega^2 . \partial\cos\omega).$$

Daher durch die Integration

$$Z = \frac{1}{3}a^3 (\omega + \cos\omega - \frac{1}{3}\cos\omega^3) + C.$$

Für $Z = 0$ iſt $\omega = 0$, und $\cos\omega = 1$, alſo
$Const = - \frac{2}{9}a^3$, und

$$Z = \frac{1}{3}a^3 (\omega + \cos\omega - \frac{1}{3}\cos\omega^3 - \frac{2}{3}).$$

Das ganze Cylinderſtück, für $\omega = \frac{1}{2}\pi$ (oder 90°) iſt $= \frac{1}{3}a^3 (\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3})$.

Die ganze Kugel iſt $= \frac{4}{3}\pi a^3$, alſo der Octant $GABC = \frac{1}{6}\pi a^3$. Daher iſt der Raum, welchen das Cylinderſtück in dem Octanten übrig läßt $= \frac{2}{9}a^3$.

19. Nimmt man in dem anliegenden Octanten die andere Hälfte des Cylinders, ſo läßt dieſe darin denſelben Raum übrig. Verlängert man den ganzen Cylinder nach der entgegengeſetzten Seite, ſo läßt er in der Halbkugel den Raum $4 . \frac{2}{9}a^3$ übrig. Wird durch die andere Halbkugel eben ein ſolcher Cylinder geſteckt, ſo laſſen beide in der ganzen Kugel den Raum $8 . \frac{2}{9}a^3$ übrig, das iſt $\frac{8}{9}$ von dem Würfel des Durchmeſſers.

20. Euler hat die von Viviani vorgelegte Aufgabe ganz allgemein und nach einer andern Methode behandelt, als Beyſpiel in einer Abhandlung de formulis integrali-

bus duplicatis. Comm. novi Acad. Petrop. T. XIV. a. a. 1759. Er ſucht die Gleichung für eine krumme Linie, die innerhalb des Quadranten eines Kreiſes beſchrieben wird, von ſolcher Beſchaffenheit, daß die ſphäriſche Oberfläche, wovon ein Sector der Curve, von dem Mittelpuncte aus genommen, die orthographiſche Projection iſt, algebraiſch ſich angeben laſſe, oder quadrirbar ſey. In der Formel zwiſchen dem Radius der Curve und dem zugehörigen Winkel mit dem einen Halbmeſſer (als zwiſchen Gm und BGm in Fig. 53.) ſind zwey unbeſtimmte Functionen der Tangente dieſes Winkels vorhanden. Die hier gefundene beſondere Auflöſung bringt Euler ebenfalls bey. Auch löſet Euler noch die Aufgabe auf, eine Curve auf dem Quadranten eines Kreiſes zu finden, von der Beſchaffenheit, daß das über ihrer Area ſenkrecht geſetzte und von einer Portion der Kugelfläche begränzte Solidum einen algebraiſch beſtimmbaren Inhalt habe. Den Fall, den Boſſüt betrachtet, daß der übrige Theil des Octanten der Kugel ſich cubiren laſſe, hat Euler nicht unterſucht.

Man ſehe auch Lacroix Calcul différential et intégral, T. II. §. 538 — 542.

29. Pappus beweiſet, daß der ſphäriſche Raum auf einer Halbkugel zwiſchen ihrem Grundkreiſe und einer Spirale, die von einem beweglichen Puncte auf einem Quadranten während einer Umdrehung beſchrieben wird, dem Quadrat des Durchmeſſers gleich iſt. Collect. mathem. IV. 30.

Fluens, die fließende (Größe) iſt in der Newtoniſchen Analyſis des Unendlichen, was in der Leibnitziſchen die veränderliche heißt. Newton ſtellte ſich die Größen alle als geometriſche vor, die durch Bewegung erzeugt würden, ſ. Differentialrechnung, Th. I. S. 833. ff. Das Wort Fluens, doch als Beywort, gebraucht Cavaleri in der Geometria indiviſibilibus continuorum, L. II. p. 8. 9. Er läßt daſelbſt ebene und körperliche Figuren jene durch Bewegung einer geraden Linie, dieſe durch die einer Ebene entſtehen.

Fluxio wird von Newton die Geſchwindigkeit genannt, womit eine Fluente durch die erzeugende Bewegung zunimmt. Da Geſchwindigkeit ein Verhältnißbegriff iſt, ſo iſt es genauer, wie auch Newton (Methodus fluxionum, art. II.) es thut, im Plural zu ſagen, Fluxionen ſind die Geſchwindigkeiten, womit die verſchiedenen Fluenten durch die erzeugende Bewegung zunehmen. Das Verhältniß der Fluxionen iſt ganz daſſelbe, was nach Leibnitz Verhältniß der Differentiale genannt wird. Der Unterſchied zwiſchen Differentialen und Fluxionen liegt bloß in der Art, wie man ſich die Zunahme (oder Abnahme) einer veränderlichen Größe vorſtellt. Bey dem Gebrauch der Fluxionen vermeidet man zwar die Vorſtellung unendlich kleiner Größen, allein in der That nur den Ausdruck. Denn um den Begriff der Geſchwindigkeit, welcher der Lehre von der Bewegung beſonders angehört, hier anzuwenden, muß man unendlich kleine Räume vergleichen, wenn die Geſchwindigkeiten veränderlich ſind. Man kommt alſo doch auf den Begriff von Gränze eines Verhältniſſes, oder eines ſolchen, welches voh der Quantität der Veränderungen unabhängig iſt. Geht man gleich von dieſer Vorſtellung aus, ſo iſt Differential, als eine unendlich kleine Veränderung betrachtet, nur eine Abkürzung der Rede, und Fluxion iſt ein bildlicher Ausdruck, um das Verhältniß der unendlich kleinen Veränderungen ſtetig veränderlicher Größen faßlich zu machen. Newtons Momente der Fluenten ſind nichts als Leibnitzens Differentiale veränderlicher Größen.

Zwey zuſammengehörige veränderliche Größen, x, y, ſtelle man ſich als Coordinaten einer Curve vor, die jede durch die Bewegung eines Punctes beſchrieben werden. Die Geſchwindigkeiten der beſchreibenden Puncte ſind die Fluxionen der Coordinaten. Die Curve ſelbſt, als die dritte, zu jenen beiden gehörige, Fluente betrachtet, werde auch durch einen Punct beſchrieben, der immer mit dem Endpuncte der Ordinate zuſammentrifft, ſo iſt die Geſchwindigkeit dieſes Punctes die Fluxion der Curve.

z. B. an dem Kreiſe iſt die Gleichung für die Coordinaten $2ax - xx = yy$, wenn die Abſciſſen von einem Endpuncte des Durchmeſſers an genommen, und die Ordinaten ſenkrecht darauf geſetzt werden. Bezeichnet man nach Newton die Fluxionen durch die Symbole der Fluenten mit einem Puncte darüber, ſo iſt $\dot{x} : \dot{y} = y : a - x$. Der zu x und y gehörige Kreisbogen ſey $= s$, ſo iſt $\dot{x} : \dot{s} = y : a$, und $\dot{y} : \dot{s} = a - x : a$.

Die Fluxion einer Fläche iſt nicht die Geſchwindigkeit der beſchreibenden oder erzeugenden Linie, wie die Fluxion einer Linie die Geſchwindigkeit des beſchreibenden Puncts iſt. Denn die Zunahme der Fläche kommt auf die Größe der beſchreibenden Linie an, und hängt bloß von derſelben ab, wenn man für die verſchiedenen Portionen der Fläche die Geſchwindigkeit der beſchreibenden Linie gleich groß ſetzt. Man muß ſich ſtatt der Fläche eine ihr proportionale Linie vorſtellen. Z. B. für die Parabel iſt die Gleichung zwiſchen den Coordinaten, $ax = yy$. Die zu x und y gehörige Area ſey Z. Dieſe vergleiche man mit dem Rechteck ax, und die Fluxion $\dot{Z}$ mit der Fluxion $a\dot{x}$. Allgemein iſt $\dot{Z} : a\dot{x} = y : a$ (nach der Notation in der Differentialrechnung $\partial Z = y\partial x$). Da an der Parabel iſt $a\dot{x} = 2y\dot{y}$, ſo iſt $\dot{Z} : 2y\dot{y} = y : a$, oder $\dot{Z} : a\dot{y} = 2yy : aa$.

Auf ähnliche Art werden die Fluxionen der körperlichen Räume und der Oberflächen, ſo wie aller Arten von Größen auf Fluxionen von Linien gebracht. Dieſes macht aber Weitläuftigkeit, die man auch in der Fluxionenrechnung ſich erſpart. Alsdann iſt aber dieſe von der Differentialrechnung nur in der Notation unterſchieden.

Die Notation in der Fluxionenrechnung iſt offenbar lange nicht ſo bequem als die in der Differentialrechnung eingeführte. Die Engländer ſind die einzigen, welche jene noch immer beybehalten, aus Ehrerbietung für ihren großen Landsmann, und aus Vorliebe für Nationalſitten.

In dem Artikel, Fluxion, des Dictionn. encyclop. par ordre des matieres, ſagt d'Alembert: Man hat keinen recht hellen Begriff von Geſchwindigkeit, wenn ſie veränderlich iſt. Geſchwindigkeit iſt nichts wirkliches, es iſt das Verhältniß des Raumes zu der Zeit, wenn die Geſchwindigkeit gleichförmig iſt. Bey der ungleichförmigen Bewegung aber iſt ſie das Verhältniß der Differentiale des Raums und der Zeit, ein Verhältniß, wovon man eine deutliche Erklärung nicht anders geben kann als vermittelſt der Gränzen. Auf dieſe muß man alſo doch zurück kommen, wenn man von Fluxionen einen befriedigenden Begriff geben will. — Daß d'Alembert zwiſchen zwey ungleichartigen Größen, Zeit und Raum, ein Verhältniß Statt finden läßt, iſt nicht nachzuahmen.

Focus, ſ. Brennpunct.

Folium, foliata curva, iſt eine krumme Linie, deren Gleichung iſt $x^3 + y^3 = axy$. Sie hat zwey Zweige mit einer geradlinichten Aſymptote, an welcher dieſe auf derſelben Seite ſich erſtrecken. Die beiden Zweige ſchneiden ſich, und bilden eine blattähnliche Figur, faſt auf die Art, wie die zum erſten Theile Tab. III. Fig. 37. gezeichnete Curve, deren Zweige aber nicht auf derſelben Seite der Aſymptote liegen. In Newtons Verzeichniß der Linien der dritten Ordnung iſt ſie die 41ſte. Viele Linien haben einen blattähnlichen Theil, weswegen man nicht eine einzelne daher benennen ſollte. Sie heißt auch das Folium von Descartes, weil dieſer Geometer ſie zuerſt angegeben hat. Er führt ſie in der Sammlung ſeiner Briefe, P. III. epiſt. 4?., als Beyſpiel an, daß Fermats Methode berührende zu ziehen ſich bey ihr nicht anwenden laſſe. In dem 57ſten Briefe zeigt er, wie die berührende gezogen werden kann, welche mit der Axe der x oder der y einen halben rechten Winkel macht. Dieſes hatte Roberval nicht finden können, dem ſie merkwürdig genug war, daß er ihr den Namen Galand oder Fleur de Jasmin gab. Descartes ſagt, er könne ihm noch unendlich viele Linien mittheilen, die nicht zuſammengeſetzter

als jene wären, und doch noch nettere Figuren bildeten. Die Sache ſey aber eine ſolche Kleinigkeit, daß er ſich ſchäme darüber zu ſchreiben. Descartes bleibt bey dem in ſich zurücklaufenden Theil der Curve ſtehen, und beachtet die beiden ins Unendliche fortlaufenden Zweige nicht, die doch mit ihr ſtetig zuſammenhängen. Die Linie iſt quadrirbar. Als Exempel wird ſie in dem Artikel, Quadratur, dienen können.

Form einer Größe iſt die Art, wie ſie aus andern Größen zuſammengeſetzt wird. So ſind Formen ganzer Zahlen, 2n; 2n + 1, jene für gerade, dieſe für ungerade; allgemeiner ma + b, wo b eine kleinere ganze Zahl als a, und m ebenfalls eine ganze Zahl iſt. Alle Primzahlen ſind unter den Formen 6a + 1 und 6a + 5 begriffen; ſtatt der letztern kann man auch die Form 6a — 1 ſetzen. Nur ſind nicht alle Zahlen von jener Form Primzahlen. Potenzen und Wurzeln ſind Formen von Zahlen, ſo wie Producte und Quotienten. Der binomiſche Lehrſatz enthält die Form der Potenzen zweytheiliger Größen, der polynomiſche die Form der Potenzen vieltheiliger Größen. Die Formen der Coefficienten in einer algebraiſchen Gleichung ſind die Zuſammenſetzungen aus den Combinationen der Wurzeln. Die Formen der Größen ſind das, was in der reinen Mathematik durchgehends an den Größen betrachtet wird.

Form einer Reihe iſt das Geſetz, welches die Exponenten der unbeſtimmten Größe, nach welcher die Glieder der Reihe geordnet ſind, beobachten, z. B. daß dieſe Exponenten die Reihe der natürlichen Zahlen, oder der geraden allein, oder der ungeraden ſind, zugleich mit Angabe des Vorzeichens + oder — der Exponenten, von welchen das erſtere zu nehmen iſt, wenn nichts darüber beſtimmt wird.

Formel iſt der in allgemeinen Zeichen gefaßte Ausdruck des Werthes einer Größe mittelſt derjenigen Größen, durch welche ſie beſtimmt wird. In einer ſolchen Formel braucht man nur in jedem Falle die Werthe der gegebenen

Größen zu ſetzen, um die geſuchte herauszufinden. Sie iſt das Reſultat einer analytiſchen Rechnung, die alle darunter gehörige Fälle begreift. Die Formeln dienen auch durch die Combinationen derſelben wieder neue herauszubringen. Denn ſie ſind zugleich Lehrſätze über die Verbindungen zuſammengehöriger Größen.

Die Algebra liefert Formeln für die Wurzeln der Gleichungen vom erſten, zweyten und dritten Grade, der letztern doch nur mit einer Einſchränkung; ferner für jede der unbekannten Größen in mehreren Gleichungen durch die Elimination der übrigen. Die Analyſis liefert Formeln für die Entwickelung vielerley Größen aus ihren Beſtandtheilen, als der Potenzen von Binomien und Polynomien; für die Summen der Potenzen, deren Wurzeln in arithmetiſcher Progreßion ſind, und mancher andern Reihenglieder; für die Interpolation zwiſchen den Gliedern einer Reihe u. m. Die Trigonometrie mit der Goniometrie iſt in ihrer gegenwärtigen Geſtalt ganz formulariſch, und dadurch zu allgemeinen Rechnungen deſto geſchickter. Die Differential- und Integralrechnung enthalten eine Menge Vorſchriften der Operationen in Formeln ausgedruckt. Auch in der angewandten Mathematik ſucht man alles auf bequem ausgedruckte Formeln zu bringen.

Allgemeinere Formeln ſind ſolche, welche mehrere Größen unbeſtimmt laſſen, da ſpeciellere Formeln dieſen einen gewiſſen Werth beylegen. Die letztern werden dadurch oft viel einfacher, und erſparen die Mühe der Reduction des Allgemeinen auf das Beſondere, weswegen es bequem iſt, dergleichen neben den allgemeinen zur Hand zu haben.

Fragezahl iſt in der praktiſchen Arithmetik diejenige Zahl, von welcher etwas gefragt wird. Sie iſt mit der geſuchten zuſammengehörig, das iſt mit ihr durch die Frage, wie viel? wie groß? oder eine ähnliche verbunden, und kommt eigentlich in der Regel de tri, der einfachen und zuſammen geſetzten, vor. In der einfachen ordentlichen Regel de tri wird ſie von den Rechenmeiſtern in die

dritte Stelle geſetzt, in der umgekehrten aber in die erſte. Z. B. in dem erſtern Falle

7 Pf. — 9 Thlr. — 28 Pf.?

wo 28 Pf. die Fragezahl iſt, von welcher der Preis gefragt oder geſucht wird.

Für den zweyten Fall ſey das Beyſpiel: 6 Arbeiter liefern eine Arbeit in 10 Tagen, wie viele werden erfordert, ſie in 5 Tagen fertig zu ſchaffen. Hier iſt die Fragezahl 5 Tage, und

5 Tage? — 6 Arb. — 10 Tage.

In der Regel Quinque kommen zwey Fragezahlen vor, ſo wie hier zwey Paare gleichartiger Größen gegeben werden. In mehr zuſammen geſetzten Fällen kommen noch mehrere vor, nach der Anzahl der Paare gleichartiger Größen, die gegeben werden. Z. B. 100 Thlr. bringen in 12 Monathen 5 Rthlr Zinſen wie viel bringen 480 Thlr. in 8 Monathen? Die Rechenmeiſter machen folgenden Anſatz.

100 Thlr. in 12 Mon.	— 5 Rthlr. —	480 Rthlr.? 8 Mon.?

Weil hier die geſuchte Größe ſo viel mahl größer oder kleiner iſt, als die ihr gleichnamige gegebene, ſo viel mahl die Fragezahlen größer oder kleiner ſind, als die ihnen gleichnamigen, ſo ſtehen die Fragezahlen in der dritten Stelle.

Wäre die Frage, in wie viel Monathen bringen 480 Thlr. 16 Thlr. Zinſe, ſo wäre der Anſatz folgender.

480 Thlr? 5 Thlr.	— 12 Mon. —	100 Thlr. 16 Thlr.?

Je mehr Intereſſe, deſto länger iſt die Zeit, allein je größer das Capital, deſto kürzer iſt die Zeit.

Die Aufgabe ſey: 480 Thlr. bringen in 8 Monaten 16 Thlr. zu 5 Procent belegt, wie groß iſt das Capital, das eben die Intereſſe bey 4 Procent in 6 Monathen bringt, ſo kommen beide Fragezahlen in die erſte Stelle.

6 Mon.? 4 P. C.?	— 480 Rthlr. —	8 Mon. 5 P. C.

Bey einerley Intereſſe verhalten ſich die Capitalien umgekehrt wie die Zeiten und die Procente.

Auf gleiche Art verfährt man bey mehreren Fragezahlen. Man muß nur die Vergleichungsformel, je größer die Fragezahl, deſto größer die geſuchte, oder je größer jene, deſto kleiner dieſe, nicht unrichtig anwenden, wo ſie nicht Statt findet. Doch in den Fällen, die im gemeinen Leben vorkommen, läßt ſich das leicht beurtheilen. In dem Artikel, Proportion, wird ein Anſatz der zuſammengeſetzten Regel de tri gezeigt werden, welcher der Zuſammenſetzung der Verhältniſſe gemäßer, und auch deutlicher iſt.

Function einer veränderlichen Größe iſt der analytiſche Ausdruck der Zuſammenſetzung einer Größe aus dieſer veränderlichen Größe, und einer oder mehrern unveränderlichen. Eine Function zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen iſt eben ſo die analytiſche Darſtellung aus dieſer und aus unveränderlichen. Z. B.

$$a + bx + cx^2;\ \text{oder}\ \frac{aa + xx}{b - x};\ \text{oder}\ b\sqrt{(aa + xx)};$$

oder $a \sin x$; oder a^x; oder $a \log x$, ſind Functionen der veränderlichen Größe x. Ferner iſt $xx + axy + bx + cy + d$ eine Function zweyer veränderlichen Größen x und y;

$$\text{ſo auch}\ \frac{ax}{\sqrt{(bx + yy)}}\ \text{oder}\ ax + y \sin x.$$

1. Der Ausdruck, **Function**, iſt zuerſt von Joh. Bernoulli in dem erklärten Verſtande gebraucht, bey Gelegenheit des iſoperimetriſchen Problems (Mem. de l'Acad. des Scienc. 1718. Opp. T. II. p. 241.). Leibnitz bezeigt ihm darüber ſeinen Beyfall (Commerc. epist. T. I. p. 386.). Früher hatte Leibnitz ſelbſt auch den Ausdruck, Function, in einer ähnlichen aber eingeſchränktern Bedeutung gebraucht, den Theil einer geraden Linie zu bezeichnen, der in der Verbindung mit krummen Linien auf irgend eine Art beſtimmt wird, als Ordinate, Abſciſſe, Subtangente, Normale, Subnormale, Krümmungshalbmeſſer. Man ſehe auch Iac. Bernoulli Opp. T. II. p. 788.

2. Wenn die Function eine unveränderliche Art der Zuſammenſetzung iſt, und als Glied einer Gleichung, oder als Factor eines Gliedes darin vorkommt, ſo gebraucht man die Capitalbuchſtaben, M, N, P, u. dgl. oder X, Y, Z, die letztern insbeſondere, um Functionen von x, y, z, zu bezeichnen. Iſt aber die Function ſelbſt noch unbekannt, wie das in den ſehr allgemeinen Unterſuchungen der neuern Analyſis häufig der Fall iſt, oder wenn Entwicklungen und Verwandlungen damit vorgenommen werden ſollen, ſo gebraucht man die Notation, fx, Fx, φx, ψx, um Functionen einer veränderlichen x dadurch anzuzeigen. Wenn mehrere Functionen derſelben Größe vorkommen, ſo werden ſie durch die vorgeſetzten Buchſtaben, als f, F, φ, ψ, unterſchieden. Daß dieſe Functionszeichen nicht multiplicirende Größen ſind, ergiebt ſich in jedem Falle von ſelbſt. Euler gebraucht das Kolon nach dem Functionszeichen, um einer ſolchen Verwechslung, die inzwiſchen nicht leicht möglich iſt, vorzubeugen, wie f : y. (Inſtitt. Calc. integr. T. III. p. 40.). Iſt die Functionalgröße eine zuſammengeſetzte, ſo ſchließt man ſie in Klammern ein, als f (xx), oder f (a + bx), welches Functionen von xx, von a + bx, anzeigt. Eine Function zweyer von einander unabhängigen Größen, x, y, wird folgendergeſtalt, f (x, y), bezeichnet, dagegen f (xy) die Function des Products zweyer veränderlichen Größen, als einer einzigen, angiebt. Die Function wird bloß aus dieſen ſo verbundenen, nicht aus den getrennten, zuſammengeſetzt. Die Bezeichnung ſcheint Clairaut zuerſt gebraucht zu haben. In einer Abhandlung in den Mem. de l'Acad. des Sc. 1733., p. 269., édit. d'Amſt. gebraucht er nicht allein den Ausdruck, Function, ſondern ſagt auch, daß er ſich der Bezeichnungen, Πx, Φx, Δx, etc. bedienen wolle, um verſchiedene Functionen im Allgemeinen zu bezeichnen. D'Alembert in der Abhandlung, ſur la cauſe générale des vents, Berlin 1747. gebraucht pag. 111. die Bezeichnungen, Δu, s und Γu, s für Functionen von u und s.

3. Das Differential einer Function von x, die durch Fx bezeichnet iſt, wird durch $\partial x F'x$, oder $\partial x f x$, oder $\partial x \varphi x$ angedeutet, wo $F'x$ oder fx oder φx diejenige Function von x anzeigt, welche aus Fx durch die Differentiation hergeleitet iſt. Das Buchſtabenzeichen F', f oder φ iſt willkührlich, wenn nur daſſelbe Zeichen und dieſelbe Function zuſammenbleiben.

Enthält die Function zwey veränderliche Größen, wie $F(x, y)$, ſo iſt ihr Differential $= \partial x\, F'(x, y) + \partial y\, F''(x, y)$, wo wiederum $F'(x, y)$ die aus $F(x, y)$ durch die partielle Differentiation nach x, und $F''(x, y)$ die eben daher durch die partielle Differentiation nach y hergeleitete Function iſt.

Z. B. Es ſey $Fx = xx + ax$, ſo iſt $\partial . Fx = \partial x F'x = 2x\partial x + a\partial x$, und $F' = 2x + a$.

Es ſey $F(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma x$, ſo iſt $\partial . F(x + y) = (2\alpha x + \beta y + \gamma)\partial x + \beta x \partial y$, ſo daß $F' = 2\alpha x + \beta y + \gamma$, und $F'' = \beta x$ iſt.

4. Eine Function von x iſt entweder eine unmittelbare, wenn ſie ſchlechthin durch x gegeben wird, oder eine mittelbare, wenn ſie durch eine veränderliche z gegeben wird, die eine Function von x iſt. So iſt $xx + ax + b$ eine unmittelbare Function von x; aber $F(xx + ax + b)$ iſt eine mittelbare Function von x, weil hier $xx + ax + b$ als eine einzige veränderliche Größe zu betrachten iſt. Eine Function des ſin φ iſt eine mittelbare des Winkels φ. Eine Function von $xx + yy$ iſt eine mittelbare der beiden x und y.

5. Die Functionen werden eingetheilt in algebraiſche und transſcendente. Die erſtern ſind ſolche, in welchen die Zuſammenſetzung bloß durch algebraiſche Operationen geſchieht, nämlich durch die vier Rechnungsſpecies, wie auch durch Erhebung auf Potenzen und Ausziehung der Wurzeln. Auch gehören hieher diejenigen Functionen, worin die Function der veränderlichen Größe mit dieſer ſelbſt noch algebraiſch verbunden iſt, und nicht unmittelbar durch ſie gegeben wird. Transſcendente Functionen ſind ſolche, worin die Functionalgröße von dem

Verhältniſſe der Winkel zu ihren trigonometriſchen Beglei-tern, der Logarithmen zu den Zahlen, und von Integra-tionen, die algebraiſch nicht angegeben werden können, abhängt, z. B. $a\varphi + b \sin \varphi$ iſt eine transſcendente Function des Winkels φ. Einige unterſcheiden noch Fun-ctionen, worin Potenzen der veränderlichen Größe mit irrationalen Exponenten vorkommen, z. B. $x^{\sqrt{2}}$, und nennen dieſe Art, functiones interſcendentes. Die Unterſcheidung iſt unnöthig.

6. Die algebraiſchen Functionen ſind theils ratio-nale, theils irrationale. In jenen kommen nur Po-tenzen der veränderlichen Größe mit ganzen Exponenten vor; z. B. $ax^2 + bx$; oder $\frac{a^2 + x^2}{b + x}$. In den irra-tionalen ſind gebrochne Potenzen der veränderlichen Größe, oder einer Function derſelben enthalten, z. B. in $x^{\frac{3}{2}} + ax^{\frac{1}{2}} + b$; oder in $x^{\frac{1}{2}} + \sqrt{(a^2 + x^2)}$, oder $\sqrt[3]{(a + x + x^2)}$.

7. Die irrationalen algebraiſchen Functionen ſind entweder geſonderte oder ungeſonderte (explicitae vel implicitae). Jene ſind ſolche, dergleichen zum Bey-ſpiele vorher angeführt ſind. Die ungeſonderten ſind, worin die Function einer Größe mit derſelben verbunden iſt, ſo daß ſie nicht durch dieſe rein und abgeſondert in einem endlichen Ausdrucke dargeſtellt werden kann, z. B. in der Gleichung, $y^6 = axy^2 + bx^4$. Hier iſt y eine Function von x, weil ſie auf eine beſtimmte Art durch x gegeben wird; aber man hat kein Mittel, y durch x anders als durch eine unendliche Reihe auszudrucken, außer in dem Falle, daß y nur bis zu der zweyten Potenz ſteigt. Dieſe Art Functionen kommt bey allen geometriſchen krummen Linien vor, da deren Ordinaten im Allgemeinen ungeſon-derte Functionen der Abſciſſen ſind. In beſondern Gat-tungen, oder bey gewiſſen Lagen der Coordinaten können die Ordinaten geſonderte Functionen der Abſciſſen ſeyn.

8. Die rationalen Functionen werden eingetheilt in ganze und gebrochne. Jene ſind ſolche, in welchen die veränderliche Größe x nirgends einen negativen Exponenten hat, noch ſonſt ein Bruch vorkommt, deſſen Nenner x enthält. Ihre allgemeine Form iſt, $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 +$ etc. Die gebrochnen rationalen Functionen können alle auf die Form,

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}},$$

durch die Vereinigung der einzelnen Brüche unter einem gemeinſamen Nenner gebracht werden.

9. Ein wichtiger Unterſchied der Functionen beruht auf der Anzahl der Werthe, welche die Function für irgend einen Werth der veränderlichen Größe x haben kann. Hat ſie für jeden Werth von x nur einen Werth, ſo iſt ſie eine einförmige Function; kann ſie zwey und nicht mehr mögliche Werthe erhalten, ſo iſt ſie eine zweyförmige Function; bey drey und nicht mehrern möglichen Werthen eine dreyförmige, u. ſ. f. überhaupt eine vielförmige, wenn ſie für irgend einen Werth von x mehr als einen möglichen Werth bekommen kann. Alle rationale geſonderte Functionen, ſie mögen ganze oder gebrochne ſeyn, ſind einförmige Functionen. Hingegen die ungeſonderten algebraiſchen Functionen ſind vielförmige. Es ſey y eine ſolche Function von x, und erſtlich $y^2 - Py + Q = 0$, wo P und Q irgend welche einförmige Functionen von x bezeichnen, ganze oder gebrochne, ſo hat y für jedes x entweder zwey mögliche oder zwey unmögliche Werthe (Gleichung, II.), und iſt alſo eine zweyförmige Function von x. An den Kegelſchnitten ſind die Ordinaten zweyförmige Functionen der Abſciſſen, einen beſondern Fall ausgenommen. In gewiſſen Gattungen höherer krummen Linien ſind die Ordinaten auch ſolche Functionen.

Es ſeyn P, Q, R, einförmige Functionen von x, und $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$, ſo iſt y eine dreyförmige Function von x, weil eine cubiſche Gleichung drey mögliche Wurzeln haben kann. Da nur zwey Wurzeln

derſelben zugleich unmöglich seyn können, ſo hat die Function y immer entweder drey mögliche Werthe oder einen. In einigen Gattungen der Linien der dritten Ordnung ſind die Ordinaten dreyförmige Functionen ihrer Abſciſſen. Dergleichen kommen auch bey höhern krummen Linien vor.

Sind P, Q, R, S, einförmige Functionen von x, und es iſt $y^4 - Py^3 + Qy^2 - Ry + S = 0$, ſo iſt y eine vierförmige Function von x. Für manche Werthe von x mag y nur zwey mögliche Werthe oder gar keinen möglichen Werth erhalten. Es wird hier nur auf die möglich größte Anzahl der möglichen Werthe geſehen.

10. Wenn in einer Function von x bloß die geraden Potenzen dieſer Größe vorkommen, ſo heißt die Function eine gerade (functio par). Die Werthe der Function, einfache oder vielfache, ſind für gleiche, aber entgegengeſetzte Werthe von x gleich groß und gleichnamig, das iſt, beiderſeits poſitiv oder negativ. Stellt die Function Ordinaten einer krummen Linie vor, ſo wird dieſe von einer mit den Ordinaten durch den Anfang der Abſciſſen gezogenen Parallele in zwey gleiche und ähnliche Theile getheilt. Dieſes entſteht daher, daß die Werthe gerader Potenzen, x^2, x^4, etc. das Vorzeichen nicht ändern, man mag x poſitiv oder negativ nehmen.

11. Wenn in einer Function von x bloß die ungeraden Potenzen von x vorkommen, ſo iſt die Function eine ungerade (functio impar.). Für gleiche, aber entgegengeſetzte Werthe von x erhält ſie gleiche, aber entgegengeſetzte Werthe, weil die ungeraden Potenzen von x ihr Vorzeichen ändern, wenn x entgegengeſetzt genommen wird. Bedeutet die Function Ordinaten einer krummen Linie, ſo iſt dieſe in den entgegengeſetzten, od r den Verticalwinkeln der Axen der Coordinaten ſich gleich und ähnlich.

12. Eine gleichartige Function (functio homogenea) zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen, x, y, etc. iſt eine ſolche, worin die Summe der Exponenten derſelben in allen Gliedern gleich groß iſt, z. B. $ax^2y + bx^3 + cxy^2 + dy^3$ iſt eine gleichartige Function

von x und y. So auch $ax^2 + \frac{by^3}{x} + \frac{cx^4}{x^2 + y^2}$. Die Dimenſionen der veränderlichen Größen werden hier allein gezählt. Bey Diviſoren ſind ſie ſubtractiv zu nehmen. Daher iſt die Anzahl der Dimenſionen eines Bruches der Unterſchied der Dimenſionen im Zähler und Nenner, wenn beide gleichartige Functionen ſind. Die Anzahl der Dimenſionen von einer Wurzelgröße iſt diejenige von ihrer Potenz dividirt durch den Grad der Wurzel.

13. Ähnliche Functionen ſind ſolche, worin die veränderlichen und unveränderlichen Größen auf eine und dieſelbe Art mit einander verbunden ſind. Sie kommen in der Form überein, wenn gleich nicht in der Quantität. Z. B. $a + bx + cx^2$, und $A + By + Cy^2$, ſind ähnliche Functionen von x und y. Ähnliche Functionen erhalten daſſelbe Functionszeichen, als φx, φy.

14. Eine functio inexplicabilis iſt eine ſolche, die weder durch beſtimmte Ausdrücke, noch durch Wurzeln von Gleichungen dargeſtellt werden kann, ſo daß ſie nicht allein keine algebraiſche iſt, ſondern daß es auch in den meiſten Fällen ſich nicht beſtimmen läßt, zu welcher Gattung von transſcendenten Functionen ſie zu rechnen ſey. Eine ſolche Function iſt die Summe, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots\ldots + \frac{1}{x}$, oder das Product $1.2.3.4\ldots x$. Euler hat über dieſe Art von Functionen Unterſuchungen angeſtellt, in den Inſtitt. Calc. diff. P. II. Cap. 16. 17. In dem Artikel, Facultät, numeriſche, ſind die Functionen dieſer Art, $a(a+b)(a+2b)\ldots(a+nb)$, und $\frac{a(a+b)(a+2b).\text{etc.}}{c(c+b)(c+2b).\text{etc.}}$, ausführlich erörtert worden.

15. Wenn y eine Function von x iſt, ſo iſt auch x eine Function von y. Es iſt eine wichtige Aufgabe in der Analyſis, eine Function umzukehren, das iſt, aus einer geſonderten Function y von x, die Functionalgröße x durch y auszudrücken. Dieſes wird in dem Artikel,

Umkehrung einer Reihe, gelehrt, wo auch gezeigt wird, wie eine Potenz von x durch eine nach y geordnete Reihe dargeſtellt werden kann. Wie eine ungeſonderte Function entwickelt wird, ſoll in dieſem Artikel gezeigt werden. Wie von zwey verſchiedenen Functionen einer und derſelben veränderlichen Größe die eine durch die andere ausgedruckt wird, lehrt la Grange's Lehrſatz, ſ. denſelben.

Verwandlungen der Functionen.

16. Eine Function läßt ſich oft auf verſchiedene Arten darſtellen, z. B. als Product, oder als Potenz, und als Aggregat von Theilen, die aus der Entwickelung des Products entſtehen; als Wurzelgröße und als entwickelte Wurzel; als Bruch uud als Reihe, je nachdem es zu den Abſichten der Rechnung am bequemſten iſt.

17. Es ſey y eine ganze geſonderte Function von x, z. B. $y = x^3 - ax^2 + bx - c$, ſo läßt ſich dieſe in ein Product aus ſo vielen Factoren von der Form $x - p$ verwandeln, als die beſtimmte Gleichung für x, welche der Werth $y = 0$ giebt, Wurzeln hat, wenn dieſe alle möglich ſind, und p iſt eine der Wurzeln. Hat die Gleichung für x unmögliche Wurzeln, ſo enthält die Function y als Product ſo viele quadratiſche Factoren, $x^2 - 2px + (p^2 + q^2)$, als Paare unmöglicher Wurzeln in der Gleichung vorhanden ſind. Z. B. wenn $y = x^3 - ax^2 + bx - c$ geſetzt wird, und wenn die Wurzeln der Gleichung, $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, ſind p, q, r, ſo iſt $y = (x-p)(x-q)(x-r)$. Hat die Gleichung aber zwey unmögliche Wurzeln, $p + q\sqrt{-1}$ und $p - q\sqrt{-1}$, nebſt der möglichen r, ſo iſt y =

$$(x-p-q\sqrt{-1})(x-p+q\sqrt{-1})(x-r).$$

Dieſes iſt daſſelbe, was in dem Artikel, Gleichung, VI. erwieſen wird. Die Function y iſt der Werth einer Gleichung, in welcher ſtatt einer unbekannten Größe x eine veränderliche, auf jede beliebige Art beſtimmbare, geſetzt wird.

18. Die Sätze von dem Verhalten der Wurzeln einer Gleichung zu den Coefficienten derſelben (Gleichung, VI.) laſſen ſich alle auf die ganzen Functionen anwenden. In den geſonderten Functionen von x iſt das gegebene Glied, vermindert um y, das gegebene Glied der Gleichung. In den ungeſonderten Gleichungen wird die eine der veränderlichen Größen als eine gegebene behandelt.

19. Rationale gebrochne Functionen werden mittelſt der Diviſion des Zählers durch den Nenner in eine Reihe verwandelt, deren Progreſſionalgröße dieſelbe mit der in dem Zähler und Nenner iſt. Die Reihe iſt eine rücklaufende, ſ. den Artikel, rücklaufende Reihe.

20. Wenn der Nenner einer rationalen gebrochnen Function ein Product aus einfachen Factoren von der Form $x + p$ iſt, ſo läßt ſich der Bruch in partielle Brüche, jeden mit einem der Factoren zum Nenner, zerlegen, wenn die Factoren alle verſchieden ſind. Enthält der Zähler eine höhere Potenz der Größe x als der Nenner, ſo ſondere man durch die Diviſion eine rationale ganze Function der Größe x ab, bis daß in einem Reſte der Diviſion die höchſte Potenz von x niedriger iſt, als die höchſte im Diviſor, ganz auf dieſelbe Art, wie man bey der Abſonderung der ganzen Zahl von einem uneigentlichen Bruche verfährt.

21. Der Bruch ſey, $\frac{ax + b}{xx + (p + q)x + pq}$ $= \frac{ax + b}{(x + p)(x + q)}$. Dieſer wird zerlegt in die beiden Brüche, $\frac{A}{x + p} + \frac{B}{x + q}$. Um die Zähler, A, B, zu beſtimmen, bringe man die beiden Brüche auf denſelben Nenner $x^2 + (p + q)x + pq$ oder $(x + p)(x + q)$. Alsdann wird der Zähler $= (A + B)x + Aq + Bp$. Hier erhellt, daß A und B unveränderliche Größen ſeyn müſſen, da derſelbe dem $ax + b$ gleich iſt. Damit jener für jeden Werth von x dieſem gleich ſeyn könne, müſſen beide identiſch gleich ſeyn, das iſt, es iſt

$$\text{I. } A + B = a; \quad \text{II. } Aq + Bp = b.$$

Hieraus folgt

$$A(p-q) = ap - b,$$
$$B(q-p) = aq - b,$$

und daraus

$$A = \frac{ap-b}{p-q}; \; B = \frac{aq-b}{q-p}.$$

Exempel. Der gegebene Bruch ſey $\frac{3x+7}{xx+8x+15} = \frac{3x+7}{(x+5)(x+3)}$. Dieſer wird zerlegt in die beiden Brüche, $\frac{4}{x+5} - \frac{1}{x+3}$.

22. Der gegebene Bruch ſey $\frac{axx+bx+c}{(x+p)(x+q)(x+r)}$. Dieſer werde in die drey Brüche, $\frac{A}{x+p} + \frac{B}{x+q} + \frac{C}{x+r}$, zerlegt. Bringt man dieſe drey Brüche auf einen gemeinſamen Nenner, und ſetzt den Zähler des ſo erhaltenen Bruchs identiſch gleich dem Zähler des gegebenen, ſo iſt

$$\text{I. } A + B + C = a.$$
$$\text{II. } A(q+r) + B(p+r) + C(p+q) = b.$$
$$\text{III. } Aqr + Bpr + Cpq = c.$$

Die Glieder der Gleichung I. multiplicire man durch p^2, die in II. durch p; und ziehe von der Summe I. u. III. die II. ab, ſo gehen B und C heraus, und es wird für A erhalten die Gleichung,

$$A(p^2 - (q+r)p + qr) = ap^2 - bp + c$$

oder $A(p-q)(p-r) = ap^2 - bp + c$.

und $A = \frac{ap^2 - bp + c}{(p-q)(p-r)}$.

Auf ähnliche Art wird gefunden

$$B = \frac{aq^2 - bq + c}{(q-p)(q-r)};\ C = \frac{ar^2 - br + c}{(r-p)(r-q)}.$$

Wenn einer dieſer Werthe als A, gefunden iſt, ſo ſind die andern auch dadurch bekannt, weil man nur p mit q oder r vertauſchen darf, da die Zähler A, B, C alle auf gleiche Art in den Gleichungen durch p, q, r, beſtimmt werden.

Die Zähler der Brüche A, B, C, entſtehen aus dem Zähler des vorgegebenen Bruchs, wenn darin für x die entgegengeſetzten von p, q, r geſetzt werden. In (21.) wird durch eine ſolche Subſtitution das entgegengeſetzte der Zähler von A und B erhalten.

23. Der gegebene Bruch ſey

$$\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(x+p)(x+q)(x+r)(x+s)}.$$

Dieſer werde in die Brüche,

$$\frac{A}{x+p} + \frac{B}{x+q} + \frac{C}{x+r} + \frac{D}{x+s},$$

zerlegt. Bringt man dieſe auf den gemeinſamen Nenner $(x+p)(x+q)(x+r)(x+s)$, und ſetzt den Zähler des dadurch entſtehenden Bruchs identiſch gleich dem Zähler des gegebenen, ſo iſt

I. $A + B + C + D = a.$

II. $\left.\begin{array}{l} A(q+r+s) + B(p+r+s) \\ + C(p+q+s) + D(p+q+r) \end{array}\right\} = b.$

III. $\left.\begin{array}{l} A(qr+qs+rs) + B(pr+ps+rs) \\ + C(pq+ps+qs) + D(pq+pr+qr) \end{array}\right\} = c.$

IV. $Aqrs + Bprs + Cpqs + Dpqr = d.$

Die Glieder dieſer Gleichungen multiplicire man in I. mit p^3; in II. mit p^2; in III. mit p, in IV. mit 1, und ziehe dann von der Summe der erſten und dritten dieſer neuen Gleichungen die zwente und vierte derſelben ab, ſo gehen B, C, D aus dem Aggregat heraus, und es bleibt

$$Ap^3 - A(q+r+s)p^2 + A(qr+qs+rs)p - Aqrs = ap^3 - bp^2 + cp - d,$$

das iſt

$$A(p-q)(p-r)(p-s) = ap^3 - bp^2 + cp - d,$$

$$\text{und } A = \frac{ap^3 - bp^2 + cp - d}{(p-q)(p-r)(p-s)}.$$

Aus dem Werthe von A werden nun die von B, C, D durch die Vertauſchung von p mit q, r, s erhalten.

Der Zähler von A entſteht, wie in (21.) aus dem Zähler des gegebenen Bruchs, wenn darin $-p$ für x geſetzt, und das entgegengeſetzte des Aggregats genommen wird.

24. Der Factor von B in dem Aggregat (23) iſt $= p^3 - (p+r+s)p^2 + (pr+ps+rs)p - prs$. Hier iſt der Coefficient von p^2 die Summe dreyer Unionen; der von p die Summe ihrer Binionen; das letzte Glied die Ternion von denſelben. Nun iſt in einer cubiſchen Gleichung, $p^3 - Pp^2 + Qp - R = 0$, worin p^3 wie in jener die Einheit zum Coefficienten hat, P das Aggregat der Wurzeln, Q das ihrer Binionen, R die Ternion derſelben. Daher iſt jener Factor eben ſo $= 0$, wie das Aggregat von den Gliedern dieſer Gleichung, indem p eines der Elemente der Combinationen iſt. Eben ſo iſt

$$r^3 - (p+r+s)r^2 + (pr+ps+rs)r - psr = 0,$$

und auch

$$s^3 - (p+r+s)s^2 + (pr+ps+rs)s - prs = 0.$$

Daraus folgt, daß wenn p mit r oder s vertauſcht wird, um C oder D, auf dieſelbe Art, wie vorher A gefunden iſt, zu erhalten, B in dem Aggregat der Gleichungen, die dadurch entſtehen, ebenfalls einen Factor, der $= 0$ iſt, bekommt.

Hingegen iſt der Factor von A nicht $= 0$, weil p keine der Unionen in den Coefficienten von p^2, p und p^0, oder dem Producte qrs, iſt. Da eben dieſer Factor, wenn er $= 0$ geſetzt wird, eine Gleichung mit den Wurzeln, q, r, s giebt, ſo iſt derſelbe das Product $(p-q)(p-r) \times (p-s)$, ſ. Gleichung III. 10.

Was von dem Factor zu B bemerkt iſt, gilt auch, mutatis mutandis, von den Factoren zu A, C, D.

25. Es ſey die Summe von $m-1$ Unionen, $r+s+t+$ etc. $=\alpha$; die Summe ihrer Binionen $=\beta$; ihrer Ternionen $=\gamma$; ihrer Quaternionen $=\delta$, u. ſ. f. das Product aller $=\pi$, ſo iſt (Gleichung VI. 1.)

$$p^m-(p+\alpha)p^{m-1}+(p\alpha+\beta)p^{m-2}$$
$$(p\beta+\gamma)p^{m-3}+(p\gamma+\delta)p^{m-4}\ldots\pm\pi=0.$$

Hieraus erhellt, daß nach der vorher angewandten Combination der Gleichungen bey Zerlegung eines Bruches von der Art, wie die behandelten ſind, wenn die Gleichungen nach der Reihe mit p^m, p^{m-1}, u. ſ. f. multiplicirt werden, die Factoren von B, C, D etc. immer $=0$ werden, dagegen der vom A nicht $=0$ wird, und daß derſelbe ſich in das Product $(p-q)(p-r)(p-s)$. etc. verwandeln laſſen wird.

26. Eine andere Methode, die Zähler der einfachen Brüche zu finden iſt folgende, nach Euler in der Introd. in Anal. Infin. §. 41.

Der Bruch ſey $\frac{M}{N}$, und $N=(x+p)S$, ſo daß S das Product der übrigen Factoren von N nach Abſonderung eines derſelben, $x+p$, ſey. Es ſey nun $\frac{M}{N}=\frac{A}{x+p}+\frac{P}{S}$, wo A kein x enthält, P aber eine Function von x iſt. Es iſt $AS+P(x+p)=M$, und $\frac{M-AS}{x+p}=P$. Da P eine ganze Function von x iſt, ſo iſt $M-AS$ durch $x+p$ theilbar, und es wird $M-AS=0$, wenn der Factor $x+p=0$, oder $x=-p$ geſetzt wird. Folglich iſt $A=\frac{M}{S}$, wenn im Zähler und Nenner dieſes Bruches $-p$ für x geſetzt wird.

In der gebrochnen Function (23.) iſt

$$M = ax^3 + bx^2 + cx + d;$$
$$S = (x+q)(x+r)(x+s).$$

Setzt man hier $x = -p$, ſo iſt $\frac{M}{S} =$

$$\frac{-ap^3 + bp^2 - cp + d}{(-p+q)(-p+r)(-p+s)},$$

oder $\frac{M}{S} = A = \frac{ap^3 - bp^2 + cp - d}{(p-q)(p-r)(p-s)}$, wie daſelbſt für A gefunden iſt.

27. Wenn unter den Factoren des Nenners der gebrochnen Function zwey oder mehrere gleiche ſind, ſo muß das obige Verfahren abgeändert werden, weil in den Nennern einiger einfachen Brüche ein Factor Null wird. Wie man hier zu verfahren hat, zeigt folgendes Beyſpiel.

28. Es ſey der gegebene Bruch $\frac{axx + bx + c}{(x+p)^2(x+r)} = \frac{M}{N}$. Er werde zerlegt in die Brüche $\frac{A}{(x+p)^2} + \frac{B}{x+p} + \frac{C}{x+r}$. Hier müſſen drey Brüche genommen werden, weil bey der Vergleichung des Zählers des reducirten Bruchs mit dem Zähler des gegebenen drey Gleichungen da ſind. Die drey Brüche werden, wie vorher, auf einen gemeinſamen Nenner gebracht, welcher der Nenner N iſt. Der Zähler iſt

$$A(x+r) + B(x+p)(x+r) + C(x+p)^2.$$

Die Vergleichung deſſelben mit M giebt

I. $B + C = a$; II. $A + B(p+r) + 2Cp = b$;
III. $Ar + Bpr + Cp^2 = c$.

Multiplicirt man II. mit p, und zieht ſie darauf von III. ab, ſo wird erhalten,

$$A(r-p)-(B+C)p^2 = c-bp,$$

das iſt, wegen I.

$$A(r-p) - ap^2 = c-bp,$$

$$A = \frac{ap^2-bp+c}{r-p}.$$

Wird I. mit r^2; II. mit r multiplicirt, und von dem Aggregat des Products aus I. in r^2 und III. abgezogen, ſo wird

$$Cp^2-2Cpr+Cr^2 = ar^2-br+c$$

$$C = \frac{ar^2-br+c}{(p-r)^2}.$$

Endlich iſt $B = a - C = \frac{ap^2-2apr+br-c}{(p-r)^2}$.

Der Werth von C iſt hier derſelbe, wie er aus der Rechnung in (22.) folgt, wenn daſelbſt $q = p$ geſetzt wird.

29. Man kann hier auch auf eine ähnliche Art wie in (26.) verfahren. Es ſey $\frac{ax^2+bx+c}{(x+p)^2(x+r)} =$

$$= \frac{M}{N} = \frac{A}{(x+p)^2} + \frac{B}{x+p} + \frac{C}{x+r}.$$

Nun iſt $M = A(x+r) + B(x+p)(x+r)$
$+ C(x+p)^2$, und

$$M-A(x+r)-B(x+p)(x+r) = C(x+p)^2.$$

Der erſte Theil dieſer Gleichung iſt durch $(x+p)^2$ theilbar, alſo auch durch $x+p$. Da das Glied, $B(x+p)(x+r)$ durch $x+p$ theilbar iſt, ſo iſt $M-A(x+r)$ auch dadurch theilbar. Dieſe Function wird alſo $=0$, wenn $x=-p$ geſetzt wird, und es iſt folglich $A = \frac{M}{x+r}$, für $x=-p$. Dieſes giebt ſogleich $A = \frac{ap^2-bp+c}{-p+r}$. Man ſetze zur Abkür-

zung, $\frac{M - A(x + r)}{x + p} = T$, ſo iſt $T - B(x + r) = C(x + p)$. Da C kein x enthält, ſo iſt der erſte Theil dieſer Gleichung durch $x + p$ theilbar, oder enthält den Factor $(x + p)$. Er wird alſo $= 0$, wenn $x = -p$ geſetzt wird. Demnach iſt $B = \frac{T}{x + r}$, für $x = -p$.

Es iſt

$$T = \frac{a(p - r)x + apr - br + c}{p - r}.$$

Für $x = -p$ iſt

$$T = \frac{-app + 2apr - br + c}{p - r},$$

und daher $B = \frac{app - 2apr + br - c}{(p - r)^2}$,

wie vorher gefunden iſt.

Den Zähler C des partiellen Bruches, deſſen Nenner nur einmahl als Factor in N vorhanden iſt, findet man eben ſo, wie in dem Falle, da alle Factoren in dem Nenner des vorgegebenen Bruches einander ungleich ſind. Es ſey nämlich $N = (x + r)S$, und $\frac{M}{N} = \frac{C}{x + r} + \frac{P}{S}$, ſo iſt $M = CS + P(x + r)$, und $\frac{M - CS}{x + r} = P$. Da P eine ganze Function von x iſt, ſo iſt $M - CS$ durch $x + r$ theilbar, und wird $= 0$, für $x = -r$. Folglich iſt $C = \frac{M}{S}$ für dieſen Werth von x, und dadurch

$$C = \frac{arr - br + c}{(p - r)^2}.$$

Auf dieſe Art findet man die Zähler aller partiellen Brüche, deren Nenner in dem Nenner N des vorgegebe-

nen Bruches nur einmahl vorkommen, wenn dieſer mehrere ſolche einzelne enthält.

30. Die Function $\frac{M}{N}$, wo M und N ganze Functionen von x ſind, und M von einem niedrigern Grade als N iſt, habe im Nenner drey gleiche Factoren, ſo daß $N = (x+p)^3 S$ iſt. Nun iſt der Bruch zu zerlegen in die partiellen Brüche, $\frac{A}{(x+p)^3} + \frac{B}{(x+p)^2} + \frac{C}{x+p} + \frac{P}{S}$, wo A, B, C unveränderliche Größen ſind, und P eine ganze Function von x iſt, wenn S kein einfacher Factor von der Form $x+q$ iſt. Es iſt nun $M = AS + BS(x+p) + CS(x+p)^2 + P(x+p)^3$, folglich $M - AS$ theilbar durch $x+p$. Da alſo dieſe Function $= 0$ wird, für $x = -p$, ſo iſt $A = \frac{M}{S}$, wenn in den Functionen M und S jener Werth für x geſetzt wird.

Man ſetze $\frac{M - AS}{x+p} = T$, ſo iſt $T = BS + CS(x+p) + P(x+p)^2$, und $T - BS$ theilbar durch $x+p$. Daher iſt $B = \frac{T}{S}$, wenn in den Functionen T und S geſetzt wird $x = -p$.

Noch ſetze man $\frac{T - BS}{x+p} = V$, ſo iſt $V - CS = P(x+p)$, und $V - CS$ theilbar durch $x+p$. Dadurch wird $C = \frac{V}{S}$, wenn in V und S geſetzt wird $x = -p$.

31. Exempel. Es ſey $\frac{M}{N} = \frac{xx}{(x-1)^3 (xx+1)}$.

Hier iſt $M = xx$; $p = -1$; $S = xx + 1$. Daß der Factor $xx + 1$ ſich nicht in zwey einfache Factoren zerlegen läßt, hat auf die Auflöſung des Exempels keinen Einfluß.

Es iſt $A = \frac{1}{2}$; $T = \frac{x+1}{2}$; $B = \frac{1}{2}$; $V = -\frac{x}{2}$;

$C = -\frac{1}{4}$. Dadurch iſt $\frac{xx}{(x-1)^3 (xx+1)} = \frac{1}{2(x-1)^3}$

$+ \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{P}{xx+1}$.

Um P zu erhalten vereinige man die drey erſten Brüche des zweyten Theils in einen einzigen, und ziehe denſelben von dem vorgegebenen Bruche ab, ſo wird dadurch gefunden

$P = \frac{1}{4}(x-1)$.

32. Wenn der Nenner des vorgegebenen Bruches nur einen quadratiſchen nicht zerlegbaren Factor hat, ſo kann man ſo verfahren, wie in dem Beyſpiele (31.). Sind mehrere ſolche Factoren in dem Nenner vorhanden, ſo bediene man ſich der zuerſt gelehrten Methode. Ein ſolcher quadratiſcher oder trinomiſcher Factor hat die Form $xx + 2px + pp + qq$, wofür man auch die Form, $xx + 2px\cos\alpha + pp$ ſetzen kann, und der Zähler des partiellen Bruchs mit dieſem Nenner hat die Form $Ax + B$.

Man ſuche in dieſem Falle zuerſt die Brüche, deren Nenner die Form $x + p$ haben, und ziehe die Summe derſelben von dem vorgegebenen Bruche ab, ſo iſt der Reſt ein Bruch mit einem Nenner, der bloß quadratiſche, nicht zerlegbare Factoren enthält. Jene partiellen Brüche werden auf gleiche Art gefunden, als wenn bloß einfache Factoren vorhanden wären. Es ſeyn z. B. in dem Nenner eines Bruches, $(x+p)(x+q)(x+r)(x+s)$, die Größen r und s unmögliche, ſo aber doch, daß

$x^2 + (r+s)x + rs$ eine mögliche Größe iſt, indem $r+s$ und rs wahre Größen ſind. Nun iſt der Zähler des partiellen Bruchs $\frac{A}{x+p}$, wenn r und s mögliche Größen ſind, $A = \frac{ap^3 - bp^2 + cp - d}{(p-q)(p-r)(p-s)}$. Hier iſt der Nenner $= (p-q)(pp-(r+s)p+rs)$, wo es einerley iſt, ob r und s wahre Größen ſind oder nicht.

33. Es ſey

$$\frac{M}{N} = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(xx+2px+pp+qq)(xx+2rx+rr+ss)},$$

und zur Abkürzung $pp + qq = mm$; $rr + ss = nn$. Der Bruch werde zerlegt in die Brüche

$$\frac{Ax+B}{xx+2px+mm} + \frac{Cx+D}{xx+2rx+nn},$$

Wenn dieſe beiden Brüche in einen einzigen zuſammengezogen werden, ſo giebt der Zähler durch die Vergleichung mit M vier einfache Gleichungen für A, B, C, D, und es iſt

$$A((mm-nn)^2 - 4(p-r)(m^2r-n^2p)$$
$$=$$
$$a(m^2(mm-nn) - 4p(m^2r-n^2p)$$
$$+ 2b(m^2r-n^2p) - c(mm-nn) + 2d(p-r).$$

Ferner iſt

$$B((mm-nn)^2 - 4(p-r)(m^2r-n^2p)$$
$$=$$
$$2am^2(n^2p-m^2r) + bm^2(mm-nn)$$
$$- 2cm^2(p-r) - d(mm-nn-4pp+4pr).$$

Aus der erſten Formel wird C durch die Vertauſchung von m und p mit n und r gefunden, und eben ſo D aus der zweyten.

Dieſes Verfahren wird für mehr als zwey quadratiſche Factoren zu beſchwerlich. Euler hat ein allgemeineres

und künſtlicheres gewieſen in der Introd. in Anal. Infin. Cap. XII.

34. Die Zerlegung einer gebrochnen Function in einfache Brüche hat Leibnitz zuerſt gelehrt, und davon Anwendungen zu Summirungen und Integrationen gemacht. Acta Erud. 1702 et 1703. Opp. T. III. nr. 65 et 66. Commerc. epiſt. T. II. p. 161. Euler hat die Ausführung dieſer zu Integrationen oft erforderlichen Operation ſehr lichtvoll und ſcharfſinnig gewieſen, für einfache und mögliche Factoren des Nenners eines Bruches, in der Introd. in Anal. Inf. Cap. II. für quadratiſche nicht zerlegbare daſ. Cap. XII. durch Hülfe trigonometriſcher Formeln; und für beide Fälle mit Zuziehung der Differentialrechnung in den Inſtitt. Calc. differ. P. II. Cap. XVIII. wovon noch am Ende dieſes Artikels einiges angeführt werden wird. Man vergleiche noch Lacroix, traité du calcul différentiel et integral, T. II. nr. 364—375. Die in dieſem Artikel von mir völlig entwickelten Formeln werden zur deutlichen Einſicht in die Zerlegung der Brüche beförderlich ſeyn.

Verwandlung der Functionen durch Subſtitution.

35. Eine brauchbare Verwandlungsart iſt die Einführung einer dritten veränderlichen Größe, die ſowohl mit der Größe x, als derjenigen y, die von x eine Function iſt, verbunden wird. Dieſes iſt beſonders nützlich, wenn y als Function von x durch eine nicht geſonderte Gleichung gegeben wird, oder eine irrationale Function von x iſt. Auch erhält oft durch die Subſtitution einer Größe für die Functionalgröße die Function ſelbſt eine einfachere Geſtalt, wovon in dem Artikel, Reihe, Beyſpiele vorkommen.

36. Die Gleichung zwiſchen x und y ſey eine ungeſonderte, wie dieſe, $ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex = 0$. Man ſetze $y = xz$, ſo iſt nach geſchehener Diviſion durch x,

$$axz^2 + bxz + cx + dz + e = 0,$$

alſo $x = \frac{-dz - e}{az^2 + bz + e}$,

und $y = \frac{-dz^2 - ez}{az^2 + bz + e}$.

Setzt man für z eine Reihe von Werthen, ſo erhält man zwey für x und y zuſammengehörige Reihen ihrer Werthe, woraus für jedes x das zugehörige y, oder umgekehrt, entweder unmittelbar, oder durch Interpolation näherungsweiſe erhalten werden kann.

37. Die Gleichung ſey $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 = 0$. Man ſetze $y = xz$, ſo iſt die neue Gleichung durch xx theilbar, ſo daß

$$axz^3 + bxz^2 + cxz + dx + ez^2 + fz + g = 0.$$

Daraus iſt $x = \frac{-ez^2 - fz - g}{az^3 + bz^2 + cz + d}$,

und $y = \frac{-ez^3 - fz^2 - gz}{az^3 + bz^2 + cz + d}$.

38. Es ſey $y = \sqrt{(a + bx)}$. Man ſetze $a + bx = b^2z^2$, ſo iſt $x = bz^2 - \frac{a}{b}$, und $y = bz$.

Es ſey $y = \sqrt{(a + bx)(c + dx)}$. Man ſetze $c + dx = (a + bx)z^2$, ſo iſt $x = \frac{az^2 - c}{d - bz^2}$, und $y = \frac{(ad - bc)z}{d - bz^2}$.

39. Es ſey $y = \sqrt{(aa + bx + cxx)}$, man ſoll für x eine ſolche Function von z ſetzen, daß y einen rationalen Werth erhalte.

Zu dem Ende ſey $\sqrt{(aa + bx + cxx)} = a + xz$, ſo iſt, auf beiden Seiten quadrirt,

$$b + cx = 2az + xz^2,$$

alſo $x = \frac{2az - b}{c - z^2}$, und $y = \frac{az^2 - bz + ac}{c - z^2}$.

Es iſt nicht nöthig, daß a rational ſey; nur muß die gegebene Größe aa poſitiv ſeyn.

40. Es ſey $y = \sqrt{(a + bx + c^2x^2)}$, man ſoll eben daſſelbe, was in (39.) leiſten.

Zu dem Ende ſetze man $\sqrt{(a + bx + c^2x^2)} = z + cx$, ſo iſt $a + bx = zz + 2cxz$,

alſo $x = \frac{zz - a}{b - 2cz}$, und $y = \frac{bz - czz - ac}{b - 2cz}$.

Entwickelung ungeſonderter Functionen.

41. Die Function y von x ſey eine ungeſonderte, wie die in der Gleichung $ayy + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$ enthaltene. Um y durch x auszudrucken, nimmt man für y eine nach Potenzen von x geordnete Reihe an, deren Form man aber vorher gehörig beſtimmen muß, das iſt, die Fortſchreitung der Exponenten von x.

42. Die Reihe der Exponenten kann allemahl eine arithmetiſche m, $m + \delta$, $m + 2\delta$ + etc. ſeyn. Denn wenn ſie auch eine andere wäre, nämlich, α; β; γ; δ; etc. ſo iſt es doch immer möglich, eine arithmetiſche Reihe zu finden, in welcher die Glieder α, β, γ, δ, etc. vorkommen. Die Coefficienten der Potenzen, deren Exponenten nicht unter denen, α, β, γ, δ, etc. befindlich ſind, müſſen durch die Rechnung gleich Null gefunden werden.

43. Die Reihe $y = Ax^m + Bx^{m+\delta} = + Cx^{m+2\delta} + Dx^{m+3\delta}$ + etc. iſt eine ſteigende, wenn δ poſitiv iſt, eine fallende, wenn δ negativ iſt. In jenem Falle giebt ſie für x, die kleiner ſind als die zur Einheit angenommene oder anzunehmende Größe, die dazu gehörigen Werthe von y, mit ſchnellerer oder langſamerer Annäherung zu dem völligen Werthe, nachdem die Coefficienten mehr oder weniger abnehmen. Iſt die Reihe der Coefficienten eine wachſende, ſo mag die Reihe für y nicht dienlich ſeyn, die Quantität von y zu finden, ob die Reihe gleich die Form dieſer veränderlichen Größe angiebt. —

Iſt δ negativ, ſo dient die Reihe für y den Werth oder auch nur die Form für ſolche x anzugeben, die größer als die numeriſche Einheit, oder als die zur Einheit dienende Größe ſind.

44. Die Potenzen von y geben Reihen, in welchen die Exponenten der Potenzen von x ebenfalls eine arithmetiſche Reihe mit dem Unterſchiede $\pm\,\delta$ ausmachen. Setzt man nun in der zwiſchen x und y gegebenen Gleichung für die Potenzen von y ihre Werthe zufolge der für y angenommenen Reihe, ſo entſteht aus jedem Gliede, das y enthält, eine nach Potenzen von x fortſchreitende Reihe. Diejenigen Glieder aus allen dieſen Reihen, welche einerley Potenz von x enthalten, und das Glied der Gleichung, welches dieſelbe Potenz von x ohne y enthält, nehme man zuſammen als ein einziges Glied einer Reihe, die aus allen Particular-Reihen (mit Einſchluß der Glieder ohne y) zuſammengeſetzt iſt. Der Werth dieſer Totalreihe iſt Null, wie das Aggregat aller Glieder der Gleichung zwiſchen x und y. Die Coefficienten von x in dieſer Totalreihe ſind jeder $= 0$, damit für jedes x der Werth der Reihe Null ſeyn möge.

45. Wenn die Gleichung zwiſchen x und y vom zweyten Grade iſt, wie die in (41.) angeführte, ſo läßt ſich für y eben ein ſolcher Werth finden, wie für die Wurzel einer quadratiſchen Gleichung, durch einen theils rationalen, theils irrationalen Ausdruck, der die veränderliche, beliebig zu beſtimmende, und die unveränderlichen Größen enthält. Es kann daher, durch Entwickelung der Wurzel aus der Größe unter dem Wurzelzeichen, y durch eine nach x geordnete Reihe dargeſtellt werden.

46. Die allgemeine Gleichung vom dritten Grade zwiſchen x und y iſt

$$ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0.$$

Um die Rechnung für ein Beyſpiel der Methode nicht zu weitläuftig zu machen, nehme man die Gleichung,

$$y^3 + ax^2y + by^2 + cy + dx + e = 0.$$

I. Zuerſt ſuche man eine fallende Reihe für y, die den Werth für große x angiebt, und ſetze $y = Ax^m + Bx^{m-\delta} + Cx^{m-2\delta} + Dx^{m-3\delta} + \text{etc.}$ ſo entſtehen aus den Gliedern der Gleichung nach ihrer Ordnung folgende Reihen von Exponenten:

y^3	$3m$; $3m-\delta$; $3m-2\delta$; $3m-3\delta$; etc.
ax^2y	$m+2$; $m+2-\delta$; $m+2-2\delta$; $m+2-3\delta$; etc.
by^2	$2m$; $2m-\delta$; $2m-2\delta$; $2m-3\delta$; etc.
cy	m; $m-\delta$; $m-2\delta$; $m-3\delta$; etc.
dx	1
e	0

II. Damit die Particularreihen nebſt den Gliedern dx und e zu einer einzigen Reihe, deren Coefficienten alle = 0 ſind, vereinigt werden mögen, ſo müſſen die Exponenten jeder Particularreihe unter den Exponenten jeder der übrigen Particularreihen ſolche antreffen, die ihnen gleich ſind. Denn ſonſt würden entweder die Coefficienten einer Partiticularreihe für ſich null ſeyn, welches anzeigte, daß das Glied der Gleichung, woraus ſie entſtanden ſeyn ſoll, fehlte; oder, wenn einige Particularreihen beſonders genommen für ſich null wären, ſo müßte die Summe der dazu gehörigen Glieder der Gleichung auch für ſich beſonders genommen null ſeyn, da dieſe Glieder ſich doch nur mit allen übrigen Gliedern der Gleichung zuſammen heben ſollen. Eben ſo müſſen die gegebenen Exponenten, hier 1 und 0, unter den Exponenten der Particularreihen vorkommen, weil ſonſt dx und e fehlen müßten. Es kann aber auch nicht eines dieſer Glieder mit einem oder mehrern der übrigen ſich beſonders heben, aus dem gleich vorher angeführten Grunde. Daher ſind alle die in I. aufgeführten Exponen

ten Glieder einer einzigen arithmetiſchen Reihe, worin der Unterſchied der Glieder $= \delta$ iſt, und dieſes δ iſt alſo auch der Unterſchied der Exponenten in der Reihe für y.

III. Die Exponenten, welche kein δ enthalten, hier 3m; m+2; 2m; m; 1; 0; ſind alſo auch Glieder aus einer arithmetiſchen Reihe, in welcher der Unterſchied der Glieder $= \delta$ iſt, nur nicht gerade in der hier geſetzten Ordnung. Wenigſtens zwey unter denſelben müſſen einander gleich ſeyn. Denn die Anfangsglieder der Particularreihen ſind Ax^{3m}; aAx^{m+2}; bAx^{2m}; cAx^{m}; wozu noch die monomiſchen Größen, dx und e, kommen. Von dieſen müſſen wenigſtens zwey das erſte Glied der zuſammengeſetzten Reihe ausmachen, und die übrigen treten bey einem der folgenden Glieder ein.

IV. Weil die Reihe der Exponenten eine fallende iſt, ſo müſſen diejenigen unter den Exponenten, 3m; m+2; 2m; m; 1; 0, welche ſich gleich geſetzt werden, nicht kleiner als die übrigen unter denſelben ſeyn. Dieſes erhält man nur, wenn man entweder ſetzt $3m = m + 2$, welches $m = +1$ giebt; oder wenn man ſetzet $m + 2 = 1$, woraus $m = -1$ folgt. In dem erſten Falle ſind die Exponenten der Anfangsglieder, mit Einſchluß der von den beiden Gliedern dx und e, dieſe: 3; 3; 2; 1; 1; 0. In dem andern Falle ſind die Exponenten, und zwar nach ihrer Größe, 1; 1; 0; — 1; — 2; — 3, wo die negativen Werthe für kleiner als jede poſitive angeſehen werden.

V. In beiden Fällen machen die Exponenten der Anfangsglieder eine arithmetiſche Reihe mit dem Unterſchiede, Eins, aus. Größer als Eins darf alſo δ nicht ſeyn, damit keiner jener Exponenten ausfalle; aber kleiner könnte δ ſeyn. Man nehme $\delta = 1$, unter der Vorausſetzung, daß die Beſtimmung der Coefficienten keine Wiederſprüche enthalte, ſo iſt

theils $y = Ax + Bx^0 + Cx^{-1} + Dx^{-2} + \text{etc.}$

theils $y = Ax^{-1} + Bx^{-2} + Cx^{-3} + Dx^{-4} + \text{etc.}$

wo aber begreiflich die Buchſtaben, A, B, C, D, etc. in beiden Reihen nicht einerley Größe bezeichnen.

VI. Man nehme zuerſt $y = Ax + Bx^{0} + Cx^{-1}$ + etc. ſo iſt

$$\begin{array}{lllllll}
y^{3} = & A^{3}x^{3} & + 3A^{2}Bx^{2} & + 3A^{2}Cx & + 3A^{2}D & \\
 & & & + 3AB^{2}\,. & + 6ABC & + \text{etc.} \\
 & & & & + B^{3} & \\
xyx^{2} = & aA\,. & + aB\,. & + aC\,. & + aD & + \text{etc.} \\
by^{2} = & & + bA^{2}\,. & + 2bAB\,. & + 2bAC & \\
 & & & & + bB^{2} & + \text{etc.} \\
cy = & & & + cA\,. & + cB & + \text{etc.} \\
dx = & & & + d\,. & & \\
e = & & & & + e &
\end{array}$$

Setzt man die Coefficienten der vereinigten Reihe $= 0$, ſo iſt erſtlich, $A^{3} + aA = 0$, und $A = \pm\sqrt{-a}$. Iſt a poſitiv, ſo kann die erſte Reihe nicht Statt finden, nach welcher für ein unendlich großes x ein ebenfalls unendliches y, mit einem endlichen Verhältniſſe, zugeordnet wäre. Iſt aber a negativ, ſo giebt es zwey Fortſchreitungen der y, in welchen dieſe ohne Ende wachſen, und zu dem gleichfalls ohne Ende zunehmenden x ein endliches Verhältniß haben. Zweytens iſt $3A^{2}B + aB + bA^{2} = 0$, alſo $B = -\frac{1}{2}b$. Drittens iſt $3A^{2}C + 3AB^{2} + aC + 2bAB + cA + d = 0$, oder $2A^{2}C - \frac{1}{4}Ab^{2} + cA + d = 0$, alſo $C = \frac{b^{2}A - 4cA - 4d}{8A^{2}}$, welcher Werth gedoppelt iſt, nachdem für A entweder $+\sqrt{-a}$ oder $-\sqrt{-a}$ geſetzt wird. Es iſt nun

$$y = Ax - \frac{1}{2}b + \frac{b^{2}A - 4cA - 4d}{8A^{2}}\,x^{-1} + \text{etc.}$$

Daß δ nicht kleiner als 1, z. B. $= \frac{1}{2}$ geſetzt werden konnte, erhellt daher, daß bey dieſer Annahme die Gleichung zur Beſtimmung von B ſeyn würde, $3A^{2}B + aB = 0$, alſo $B = 0$, ſo daß $Bx^{\frac{1}{2}}$ wirklich wegfällt.

VII. Aus der zweyten Form für y, nämlich

$$y = Ax^{-1} + Bx^{-2} + Cx^{-3} + Dx^{-4} + \text{etc.}$$

wird

$$\begin{array}{lllllll} ayx^2 & = aAx & + aB & + aCx^{-1} & + aDx^{-2} & + \text{etc.} \\ dx & = +d. & & & & \\ e & = & + e & & & \\ cy & = & & + cA. & + cB. & + \text{etc.} \\ by^2 & = & & & + bA^2. & + \text{etc.} \\ y^3 & = & & & & + A^3x^3. \end{array}$$

Hieraus wird $A = -\frac{d}{a}$; $B = -\frac{e}{a}$; $C = -\frac{cd}{aa}$;

$D = \frac{ce}{aa} - \frac{bdd}{a^3}$ etc. alſo iſt

$$y = -\frac{d}{a}x^{-1} - \frac{e}{a}x^{-2} + \frac{cd}{aa}x^{-3} + \text{etc.}$$

Dieſe Reihe giebt die dritte Fortſchreitung der y, die immer möglich bleibt, wenn auch die beiden in VI. unmöglich ſind. Denn y hat als Wurzel einer cubiſchen Gleichung wenigſtens einen möglichen Werth. Aber auch nicht mehr als drey, und deshalb wird A hier durch eine einfache Gleichung gefunden. Für ſehr große x iſt y ſehr klein, und verſchwindet, wenn x unendlich groß genommen wird.

VIII. Um eine ſteigende Reihe für y zu erhalten, nämlich $y = Ax^m + Bx^{m+\delta} + Cx^{m+2\delta} + \text{etc.}$ muß man unter den Exponenten der Anfangsglieder und der Glieder ohne y, nämlich $3m$; $m+2$; $2m$; m; 1; 0, wenigſtens zwey einander gleich ſetzen, ſo daß ſie nicht größer ſeyn als die Werthe der übrigen, die ſich aus dem Werthe von m ergeben. Dieſes läßt ſich nicht anders bewerkſtelligen als wenn $m = 0$ geſetzt wird. Dadurch werden jene Exponenten folgende: 2; 0; 0; 1; 0. Dieſe ſind Glieder der arithmetiſchen Reihe 0; 1; 2; etc. Man darf alſo δ nicht größer als 1 ſetzen. Gebrochne Exponenten hat man nicht nöthig anzunehmen. Man ſetze demnach

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

ſo iſt

$$\begin{array}{rcllll}
y^3 & = & A^3 & + 3A^2Bx & + 3A^2Cx^2 & + \text{etc.} \\
 & & & & + 3AB^2. & \\
by^2 & = & bA^2 & + 2bAB. & + 2bAC. & + \text{etc.} \\
 & & & & + bB^2\ . & \\
cy & = & cA & + cB\ . & + cC\ . & + \text{etc.} \\
e & = & e & & & \\
dx & = & & + d\ . & & \\
ayx^2 & = & & & + aA\ . & + \text{etc.}
\end{array}$$

Hier iſt A die Wurzel der cubiſchen Gleichung, $A^3 + bA^2 + cA + e = 0$, und hat wenigſtens einen möglichen Werth. Ferner iſt $B = -\frac{d}{3A^2 + 2bA + c}$, und

$$C = -\frac{3AB^2 + bB^2 + aA}{3A^2 + 2bA + c}.$$

Hat A drey mögliche Werthe, ſo haben B, C, etc. auch drey Werthe, und es ſind alsdann drey verſchiedene Fortſchreitungen der Größe y. Hat A nur einen möglichen Werth, ſo haben B, C, etc. auch nur einen Werth. Dieſe Form iſt für unendlich große x nicht anwendbar, und daher auch nicht für beträchlich große.

IX. Wenn $3A^2 + 2bA + c$ nicht $= 0$ iſt, ſo iſt δ richtig $= 1$ geſetzt. Denn wollte man δ kleiner, z. B. $= \frac{1}{2}$ ſetzen, ſo würde dieſes, da dx nun in das dritte Glied der Totalreihe käme, $B = 0$ geben, welches alſo wieder auf die Annahme $\delta = 1$ zurückführte. Allein, wenn neben jener cubiſchen Gleichung in VIII. noch die quadratiſche, $3A^2 + 2bA + c = 0$, Statt hat, ſo kann die Form $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^2 + \text{etc.}$ mit der beiden Gleichungen für A gemeinſchaftlichen Wurzel nicht angewandt werden, ſondern dx muß erſt bey dem dritten Gliede der zuſammengeſetzten Reihe ein-

treten. Man ſetze nun $y = A + Bx^{\frac{1}{2}} + Cx + Dx^{\frac{3}{2}} + Ex^2 + \text{etc.}$ und es iſt

$$\begin{array}{lllllll}
y^3 = & A^3 & + 3A^2Bx^{\frac{1}{2}} & + 3A^2Cx & + 3A^2Dx^{\frac{3}{2}} & & \\
 & & & + 3AB^2 \,. & + 6ABC \,. & + \text{etc.} \\
 & & & & + B^3 \,,, & & \\
by^2 = & bA^2 & + 2bAB \,. & + 2bAC \,. & + 2bAD \,. & & \\
 & & & + bB^2 \,. & + 2bBC \,. & & \\
cy^2 = & cA & + cB \,. & + cC \,. & + cD \,. & + \text{etc.} \\
e = & e & & & & & \\
dx = & & & + d & . & & \\
ayx^2 = & & & & & + \text{etc.}
\end{array}$$

Da $3A^2 + 2bA + c = o$ iſt, ſo iſt der Coefficient des zweyten Gliedes der zuſammengeſetzten Reihe für ſich $= o$, und der Coefficient des dritten iſt $3AB^2 + bB^2 + d = o$, da der in C multiplicirte Theil $= o$ iſt. Dieſes giebt

$$B^2 = -\frac{d}{3A+b}, \text{ und } B = \pm \sqrt{\frac{-d}{3A+b}},$$

wo die Werthe des Zählers und Nenners entgegengeſetzt ſeyn müſſen, damit B einen möglichen Werth erhalte. Der Coefficient des vierten Gliedes in der zuſammengeſetzten Reihe iſt $= 6ABC + B^3 + 2bBC$, alſo iſt $C = -\frac{B^2}{6A+2b}$. Die folgenden Coefficienten mögen hier unberechnet gelaſſen werden.

X. Wenn $3A^2 + 2bA + c = o$ iſt, ſo hat die cubiſche Gleichung, $A^3 + bA^2 + cA + e = o$ zwey gleiche Wurzeln (Gleichung, IX.). Die Werthe von y bilden demnach drey Fortſchreitungen, von welchen, für $x = o$, zwey ein gemeinſchaftliches Glied haben. Für ein an o gränzendes x, poſitives oder negatives, haben dieſe beiden Fortſchreitungen wieder verſchiedene Glieder. Die erſtere Reihe für y, in welcher der Unter-

ſchied der Exponenten $= 1$ iſt, gäbe aber nur zwey Werthe für y, da A nur zwey verſchiedene Werthe hat. Für denjenigen Werth von A, der eine einzelne Wurzel der cubiſchen Gleichung für A, und alſo nicht von der quadratiſchen iſt, giebt die Reihe Werthe von y, die in die Fortſchreitung gehören, in welcher jener Werth von A für $x = 0$ Statt hat. Aber für die beiden gleichen Werthe von A, als Doppelwurzel der cubiſchen Gleichung, kann die Reihe nicht verſchiedene Fortſchreitungen der y angeben. Für dieſe iſt eine andere Form der Reihe erforderlich, die zwey Werthe von B enthalte. Dieſe ſind in dem gegenwärtigen Falle gleich und entgegengeſetzt, ſo daß für ſehr kleine x die Glieder der beiden Fortſchreitungen faſt gleichviel auf entgegengeſetzte Art von dem gemeinſchaftlichen Gliede ſich entfernen, in dem das Glied Cx in Betracht der Potenz x viel kleiner iſt als das Glied $Bx^{\frac{1}{2}}$.

XI. Exempel. Es ſey $y^3 + 4yx^2 - 5y^2 + 7y + 24x - 3 = 0$. Die ſteigenden Reihen zu finden, von der Form $y = A + Bx + Cx^2 +$ etc. ſuche man zuerſt die Wurzeln der Gleichung, $A^3 - 5A^2 + 7A - 3 = 0$. Dieſe ſind $+1$; $+1$; $+3$. Setzt man $A = 3$, ſo iſt $B = -6$; $C = -26$, und $y = 3 - 6x - 26x^2 +$ etc. Da $3A^2 - 10A + 7 = 0$ iſt für $A = 1$, ſo ſind die beiden andern aufſteigenden Reihen von der Form $y = A + Bx^{\frac{1}{2}} + Cx +$ etc. und es iſt $B^2 = +12$; $C = +3$, ſo daß $y = 1 \pm \sqrt{12x} + 3x +$ etc.

XII. Wenn außer der cubiſchen und quadratiſchen Gleichung für A noch die einfache, $3A + b = 0$, Statt hat, ſo kann dx erſt mit dem vierten Gliede der zuſammengeſetzten Reihe eintreten, und die Form der Reihe für y iſt nun $y = A + Bx^{\frac{1}{3}} + Cx^{\frac{2}{3}} + Dx + Ex^{\frac{4}{3}} + Fx^{\frac{5}{3}} + Gx^2 +$ etc. In dieſem Falle hat die cubiſche Gleichung für A drey gleiche Wurzeln, jede $= -\frac{1}{3}b$, oder es iſt $(A + \frac{1}{3}b)^3 = 0$.

47. Die Verwandlung einer ungeſonderten Function in eine geſonderte geſchieht nicht ſowohl, um für irgend ein x den Werth von y zu erhalten, als nur die Form von y für ſehr große und ſehr kleine x zu beſtimmen. Es würde oft ſehr mißlich ſeyn, die Quantität von y ſelbſt auf dieſem Wege erfahren zu wollen. Die Folge der y, für welche eine Reihe die Werthe angeben ſoll, kann innerhalb zweyer Glieder eingeſchloſſen ſeyn, deren zugehörige x nur wenig von einander verſchieden ſind. Die fallenden Reihen geben zu erkennen, wie viele Fortſchreitungen, der y ſich ins Unendliche erſtrecken, ob die Werthe der y für unendlich große x gegen dieſe ein endliches oder ein unendliches Verhältniß haben, und wie die Annäherung zu dem Gränzverhältniſſe beſchaffen iſt. Dieſes dient zur Unterſcheidung der verſchiedenen Gattungen einer ungeſonderten Function eines gegebenen Grades. Die ſteigenden Reihen dienen als Differenzformeln, um die endlichen Veränderungen der y für kleine x anzugeben. Dadurch ergeben ſich die beſondern Beſchaffenheiten einer Function an der Gränze der poſitiven und negativen x. Iſt x eine nicht kleine Größe, ſo muß dafür eine andere $z \pm k$ geſetzt werden, wo z klein genug genommen werden mag.

48. Das erſte Glied der Reihe bequem zu finden hat Newton eine geometriſche Conſtruction angegeben, die unter dem Namen, Newtoniſches Parallelogramm, bekannt iſt, ſ. den Artikel, der davon handelt.

In dem Artikel, krumme Linien, wird die Natur der ungeſonderten Functionen durch die geometriſche Darſtellung der veränderlichen Größen, als Coordinaten an einer krummen Linie, vieles Licht erhalten.

49. Lacroix giebt in ſeiner Differential- und Integralrechnung, §. 119. ein allgemeines directes Verfahren an, die Werthe des Exponenten in dem erſten Gliede der Reihe Ax^m, zu beſtimmen, welches von La Grange herrührt. Es iſt aber die Erklärung deſſelben etwas zu umſtändlich, daher es hier nicht Platz findet. Das hier gewieſene Verfahren wird das allgemeinere gut erläutern. Es werden kaum Fälle eintreten, wo man nicht durch Ver-

ſuche die Werthe von dem Exponenten leicht ſollte beſtimmen können. Lacroix zeigt ferner, wie man die folgenden Glieder der Reihe für y beſtimmt. Dieſes leiſtet er auf eine andere Art als hier geſchehen iſt. Er bemerkt auch, daß die Größe y durch einen Kettenbruch ſich darſtellen läßt.

Werth einer gebrochnen Function, deren Zähler und Nenner = o geſetzt wird.

50. Es ſeyn φx und ψx Functionen einer veränderlichen x, die für einen gewiſſen Werth von x jede = o werden, es iſt die Frage, was bey dieſer Annahme der Werth des Bruches $\frac{\varphi x}{\psi x}$ iſt.

Man gebe der veränderlichen Größe zwey Werthe, deren einer durch x, der andere durch $x + u$ bezeichnet werde, und entwickele die Functionen $\varphi(x+u)$ und $\psi(x+u)$. Aus Differenzenrechnung (17.) iſt

$$\varphi(x+u) = \varphi x + pu + \tfrac{1}{2}qu^2 + \tfrac{1}{6}ru^3 + \text{etc.}$$

wo p der Gränzquotient von $\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}$, q derſelbe von $\frac{\Delta p}{\Delta x}$ oder von $\frac{\Delta^2\varphi x}{\Delta x^2}$; r derſelbe von $\frac{\Delta q}{\Delta x}$ oder von $\frac{\Delta^3\varphi x}{\Delta x^3}$ iſt. Oder es iſt

$$p = \frac{\partial\varphi x}{\partial x};\ q = \frac{\partial^2\varphi x}{\partial x^2};\ r = \frac{\partial^3\varphi x}{\partial x^3}, \text{etc.}$$

ſ. Differenzenrechnung, 38.

Auf gleiche Art iſt

$$\psi(x+u) = \psi x + p'u + \tfrac{1}{2}q'u^2 + \tfrac{1}{6}r'u^3 + \text{etc.}$$

wo $p' = \frac{\partial\psi x}{\partial x}$; $q' = \frac{\partial^2\psi x}{\partial x^2}$; $r' = \frac{\partial^3\psi x}{\partial x^3}$; u. ſ. f. ſind.

Dadurch iſt

$$\frac{\varphi(x+u)}{\psi(x+u)} = \frac{\varphi x + pu + \frac{1}{2}qu^2 + \frac{1}{6}ru^3 + \text{etc.}}{\psi x + p'u + \frac{1}{2}q'u^2 + \frac{1}{6}r'u^3 + \text{etc.}}$$

Nun ſey, wenn $x = a$ genommen wird, ſowohl $\varphi a = 0$ als $\psi a = 0$, ſo iſt

$$\frac{\varphi(a+u)}{\psi(a+u)} = \frac{p + \frac{1}{2}qu + \frac{1}{6}ru^2 + \text{etc.}}{p' + \frac{1}{2}q'u + \frac{1}{6}r'u^2 + \text{etc.}},$$

nachdem Zähler und Nenner durch u dividirt ſind. Setzt man nun $u = 0$, ſo wird

$$\frac{\varphi a}{\psi a} = \frac{p}{p'} = \frac{\partial \varphi x : \partial x}{\partial \psi x : \partial x},$$

wo in den Differentialquotienten $x = a$ zu ſetzen iſt.

Es kann ſich ereignen, daß für $x = a$, ſowohl p als $p' = 0$ ſind. Alsdann iſt

$$\frac{\varphi(a+u)}{\psi(a+u)} = \frac{\frac{1}{2}q + \frac{1}{6}ru + \text{etc.}}{\frac{1}{2}q' + \frac{1}{6}r'u + \text{etc.}},$$

und $$\frac{\varphi a}{\psi a} = \frac{q}{q'} = \frac{\partial^2 \varphi x : \partial x^2}{\partial^2 \psi x : \partial x^2},$$

wo in den Differentialquotienten $x = a$ zu ſetzen iſt.

Wären für $x = a$, auch q und q' jedes $= 0$, ſo wird

$$\frac{\varphi a}{\psi a} = \frac{r}{r'} = \frac{\partial^3 \varphi x : \partial x^3}{\partial^3 \psi x : \partial x^3}.$$

Auf ſolche Art erhält man zuletzt den geſuchten Werth des Quotienten, der entweder endlich iſt, oder auch Null, oder unendlich groß ſeyn kann.

51. In dem Artikel, berührende Linie, (24—26.), iſt ſchon eine Anwendung dieſer Aufgabe auf die Beſtimmung der Subtangenten an den Doppelpuncten oder vielfachen Puncten einer Curve gemacht worden; auch in den Interpolations-Formeln, Artikel, Einſchalten, 36–38. Hier wollen wir auch noch davon Gebrauch machen, rationale Brüche in einfache zu zerlegen.

52. Es ſeyn M und N ganze rationale Functionen von x, und $N = (x - \alpha) S$. Der Bruch $\frac{M}{N}$ werde zerlegt in die beiden Brüche, $\frac{A}{x-\alpha} + \frac{P}{S}$, ſo daß $\frac{M}{N} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{P}{S}$. Alſo iſt $M = AS + P(x - \alpha)$, und $M - AS$ iſt durch $x - \alpha$ theilbar, da P eine ganze Function von x iſt. Folglich wird $M - AS = 0$, wenn darin $x = \alpha$ geſetzt wird, und es iſt bey dieſer Annahme $A = \frac{M}{S}$, oder $A = \frac{M(x-\alpha)}{N}$. Aber für $x = \alpha$ ſind Zähler und Nenner $= 0$. Darum iſt $A = \frac{\partial . M(x-\alpha)}{\partial N} = \frac{(x-\alpha)\partial M + M \partial x}{\partial N}$, wo $x = \alpha$ zu ſetzen iſt. Dadurch wird $A = \frac{M \partial x}{\partial N}$, worin $x = \alpha$ zu ſetzen iſt.

53. Dieſen Ausdruck für A erhält man auch auf folgende Art. Da $A = \frac{M}{S}$, wenn $x = \alpha$ genommen wird, ſo iſt auch $A = \frac{M \partial x}{S \partial x}$, bey derſelben Annahme. Nun iſt $\partial N = S \partial x + (x - \alpha) \partial S$, und für $x = \alpha$, iſt $\partial N = S \partial x$, folglich $A = \frac{M \partial x}{\partial N}$, wofern nur $x = \alpha$ genommen iſt.

54. Exempel. Es ſey wie in (23.)

$$\frac{M}{N} = \frac{a x^3 + b x^2 + c x + d}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}$$

wo die Größen, $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ ſtatt p, q, r, s, in (23.) geſetzt ſind, um Verwechslung mit den in ([illegible])

u

gebrauchten Bezeichnungen zu verhüten. Es iſt, wenn $(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)=S$ geſetzt wird,

$$\partial N = S\partial x + (x-\alpha)\partial S, \text{ oder}$$

$$\partial N = (x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\partial x + (x-\alpha)\partial S.$$

Setzt man $x=\alpha$, ſo wird

$$\partial N = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\partial x.$$

In dem Zähler M gleichfalls $x=\alpha$ geſetzt, wird der Zähler des partiellen Bruchs, deſſen Nenner $x-\alpha$ iſt, oder

$$A = \frac{a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}$$

übereinſtimmig mit dem in (23) gefundenen Werthe von A.

55. Der Nenner des zu zerlegenden Bruchs enthalte einen quadratiſchen Factor, $(x-\alpha)^2$, oder es ſey $\frac{M}{N} = \frac{M}{(x-\alpha)^2 S}$. Er werde zerlegt in die drey Brüche, $\frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{x-\alpha} + \frac{P}{S}$, wo A und B beſtimmte Größen ſind, ſo iſt

$$M = AS + BS(x-\alpha) + P(x-\alpha)^2,$$

und

$$M - AS - BS(x-\alpha) = P(x-\alpha)^2.$$

Da P eine ganze Function iſt, ſo iſt der Theil linker Hand durch $(x-\alpha)^2$ theilbar, alſo enthält $M-AS$ den Factor $x-\alpha$. Dadurch wird $A=\frac{M}{S}$, für $x=\alpha$, oder es iſt $A=\frac{M(x-\alpha)^2}{N}$. Hier ſind Zähler und Nenner $=0$, für $x=\alpha$, alſo iſt $A=\frac{\partial . M(x-\alpha)^2}{\partial N}$. Beyde Differentiale ſind wieder $=0$ für $x=\alpha$. Differentiirt man

aufs neue, ſo wird erhalten $A = \frac{\partial^2 . M(x-\alpha)^2}{\partial^2 N}$ für $x = \alpha$, das iſt, $A = \frac{2 M \partial x^2}{\partial^2 N}$ oder $A = \frac{M}{S}$, wie ſchon gefunden iſt.

Um B zu erhalten, bemerke man, daß $\frac{M - AS}{x - \alpha} - BS$ durch $x - \alpha$ theilbar iſt, alſo für $x = \alpha$ verſchwindet, ſo daß $B = \frac{M - AS}{(x - \alpha) S}$ iſt für $x = \alpha$. Da der Zähler den Factor $x - \alpha$ enthält, ſo verſchwindet derſelbe, wie der Nenner für $x = \alpha$, alſo iſt $B = \frac{\partial M - A \partial S}{S \partial x}$, wo $x = \alpha$ zu nehmen iſt. Oder da $A = \frac{M}{S}$, bey derſelben Annahme, ſo iſt $B = \frac{S \partial M - M \partial S}{S^2 \partial x}$ das iſt, $B = \frac{1}{\partial x} \partial . \frac{M}{S}$.

55. Exempel. Es ſey $\frac{M}{N} = \frac{a x^2 + b x + c}{(x-\alpha)^2 (x-\beta)}$, ſo iſt erſtlich $A = \frac{a \alpha^2 + b \alpha + c}{\alpha - \beta}$. Zweytens iſt $\partial . \frac{M}{S} = \frac{a x^2 - 2 a \beta x - b \beta - c}{(x-\beta)^2} \partial x$ und $B = \frac{a \alpha^2 - 2 a \beta \alpha - b \beta - c}{(\alpha - \beta)^2}$, übereinſtimmig mit (29.).

56. Euler trägt in dem zweyten Theile ſeiner Differentialrechnung, Cap. XVIII. de uſu calculi differentialis in reſolutione fractionum, dieſe Methode vor, und giebt zugleich eine wichtige Ergänzung zu der in der Introductione in Anal. Infin. abgehandelten Lehre von der Zerlegung der Brüche. Durch die Zerlegung ſolcher, die im Nenner trinomiſche nicht zerlegbare Factoren, nämlich von der Form $ff - 2fgx \cos\varphi + ggxx$, enthalten. Dieſe ſchwe-

rere Unterſuchung werden Geübte beſſer aus jenem Werke kennen lernen, als es hier aus einem unvollſtändigen Auszuge möglich wäre.

57. Der erſte, welcher den Werth eines Bruches beſtimmte, der bey einer gewiſſen Annahme der darin enthaltenen veränderlichen Größe $= \frac{0}{0}$ wird, iſt Joh. Bernoulli. Er ſchätzte dieſe Auflöſung ſo hoch, daß er die Aufgabe den franzöſiſchen Mathematikern als ein Räthſel vorlegte. Sie ſollten angeben, was der Werth des Bruches $\frac{\sqrt{(2a^3x - x^4)} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$ iſt, wenn $x = a$ geſetzt wird. Da ſie auf die Anwendung der Differentialrechnung nicht dachten, ſo konnten ſie die Frage nicht beantworten. Endlich ließ er ſich bewegen, ihnen ſeine Auflöſung mitzutheilen. Seine Methode hat hernach l'Hopital in der Analyſe des infiniment petits, §. 163 vorgetragen. Joh. Bernoulli ſelbſt fügt noch eine wichtige Ergänzung bey, für den Fall, da die Differentialquotienten im Zähler und Nenner ſelbſt Null werden. Acta Erud. 1704. Opp. T. I. nr. 71. An beiden Stellen werden nach damahliger Gewohnheit krumme Linien zu der Auflöſung angewandt. Der Werth des angeführten Bruchs für $x = a$ iſt $= \frac{16}{9} a$. Man ſehe auch Saurins Aufſätze in den Mém. de l'Acad. des Sc. 1716 und 1723.

Functionalgröße iſt diejenige veränderliche Größe, aus welcher eine andere zuſammengeſetzt wird, mit oder ohne Zuziehung gegebener Größen.

Functionalzeichen iſt das Buchſtabenzeichen, welches der Functionalgröße vorgeſetzt wird, und mit dieſer in Verbindung die Function bedeutet.

Fundamentalabſtand, ſ. Perſpectiv.

Funfzehneck, ſ. Vieleck, ordentliches.

G.

Ganz iſt ein Verhältnißbegriff, deſſen zugehöriger Begriff der Theil iſt. Das Ganze iſt ſo groß, als ſeine erſchöpfenden Theile zuſammen. Bey einer Zahlgröße zeigt der Zuſatz, ganz, an, daß ſie vollſtändig durch Wiederholung der Einheit zuſammengeſetzt wird, oder die Einheit ſelbſt iſt, im Gegenſatze gegen Brüche. Eine ganze Potenz (mit einem ganzen Exponenten) entſteht durch Wiederholung eines Factors allein, eine gebrochne Potenz (mit einem gebrochnen Exponenten) durch Wiederholung eines Factors und Zerlegung des Products in eine Anzahl gleicher Factoren. Was eine ganze Function in Beziehung auf eine gebrochene iſt, iſt in dem Artikel, Function, erklärt.

Gegeben (datum) iſt ein Verhältnißbegriff, deſſen Correlatum das unbekannte iſt. Die Auflöſung einer Aufgabe beſtimmt das unbekannte durch das gegebene, ein einzelnes oder mehreres. Bey allgemeinen Unterſuchungen wird das gegebene unbeſtimmt gelaſſen, und in der Anwendung auf einzelne Fälle entweder willkührlich angenommen, oder durch die Frage beſtimmt, oder durch Erfahrung, in der angewandten Mathematik, ausgemacht. In der Rechnung werden die gegebenen Größen durch die erſten Buchſtaben des Alphabets, auch durch die mittlern, die unbekannten durch die letztern bezeichnet und unterſchieden.

Was die Data des Euklides ſind, ſ. Data.

Gegend iſt bey geraden Linien bisweilen daſſelbe was Richtung, ein unbeſtimmt entfernter Punct, nach welchem hin ſie gezogen wird, beſonders in der Aſtronomie und Geographie Puncte des Horizonts an der ſcheinbaren Fläche des Himmels. In der analytiſchen Geometrie wird auf ſolche Art die Gegend der poſitiven und negativen Abſciſſen unterſchieden. Auf ebenen Flächen iſt der Theil derſelben, der durch eine gerade Linie von dem andern abgeſondert wird, eine

Gegend, nach welcher von jener Linie an, aus irgend welchen Puncten, gerade Linien in einer beſtimmten Richtung gezogen werden. Die beiden Theile der ganzen Ebene ſind entgegengeſetzte Gegenden. Bey krummen Linien unterſcheidet man ſolchergeſtalt die Gegend der poſitiven und negativen Ordinaten. Von einer unbeſtimmten körperlichen Ausdehnung iſt der Theil, der durch eine Ebene von dem andern abgeſondert wird, eine Gegend, nach welcher von jener Ebene an, aus irgend welchen Puncten, gerade Linien in einer beſtimmten Richtung gezogen werden. Die beiden Theile der ganzen Ausdehnung auf beiden Seiten der Ebene ſind entgegengeſetzte Gegenden. An krummen Flächen wird dadurch die Lage der parallelen Ordinaten unterſchieden.

Gemiſcht iſt, was aus ungleichartigem zuſammengeſetzt iſt. Eine gemiſchte ebene Figur iſt, deren Umfangslinie aus Linien verſchiedener Art zuſammengeſetzt iſt, als aus geraden und krummen, oder aus krummen, deren Puncte nach verſchiedenen Geſetzen beſtimmt werden. Z. B. eine Ovale, die aus Kreisbogen mit verſchiedenen Halbmeſſern zuſammengeſetzt iſt, dagegen in einer Ellipſe alle Ordinaten durch dieſelbe Formel aus ihren Abſciſſen beſtimmt werden.

Die gemiſchte Mathematik iſt der reinen entgegengeſetzt, weil in jener nicht allein die gegebenen Größen durch Erfahrung geſucht werden müſſen, ſondern auch die Verbindung der bekannten und unbekannten Größen den Geſetzen der Natur gemäß genommen werden muß.

Ein gemiſchtes Verhältniß iſt, was aus ungleichnamigen Verhältniſſen zuſammengeſetzt wird. Z. B. das Verhältniß der Wege zweyer Körper aus den Verhältniſſen der Zeiten und Geſchwindigkeiten; der Preiſe zweyer Waaren aus dem ihrer Menge, dem Verhältniſſe der Gewicht oder Ellenmaaßen, und dem der Geldſorten.

Gemiſchte Zahl, eine aus ganzen und gebrochnen, oder aus rationalen und irrationalen zuſammengeſetzte.

Geodäſie iſt eigentlich derjenige Theil der prakti- ſchen Geometrie, worin die Eintheilung der Felder und Ländereyen nach vorgeſchriebenen Verhältniſſen und Maa- ßen gelehrt wird. Das Kunſtwort iſt von den beiden griechiſchen Wörtern, γη, die Erde, und δαιειν, theilen, ab- geleitet. Die Theorie des ganzen Verfahrens bey dieſem Geſchäft iſt in dem Artikel, Figur, vorgetragen.

Man gebraucht das Wort aber auch im weitern Verſtande für die Feldmeßkunſt überhaupt, als die An- wendung der Geometrie auf die Meſſung und Berechnung der Ländereyen, ſowohl in Abſicht auf ihren Umfang und Inhalt, als auf ihre Eintheilung. Zollmann hat ſei- ne Anweiſung zur Feldmeßkunſt betitelt: Vollſtändige An- leitung zur Geodäſie oder praktiſchen Geometrie, Halle 1744, Fol. Einige Schriftſteller haben auch die Meſ- ſungen der Linien und Winkel, welche zur Beſtimmung der Länge eines Bogens auf einem Meridian der Erde angeſtellt ſind, geodätiſche Operationen genannt, um ſie von den aſtronomiſchen Operationen zu unter- ſcheiden, wodurch die Weite des gemeſſenen Bogens ge- funden wird, oder der Winkel, welchen die lothrechten Linien auf den Endpuncten des Bogens, nach dem In- nern der Erde verlängert, mit einander machen.

Geometer, eine Perſon, die der Geometrie wohl kundig iſt. Im Franzöſiſchen pflegt man einen Mathe- matikverſtändigen insbeſondere einen Geometer zu nennen, weil man wegen des großen Einfluſſes, den die Geome- trie auf alle übrigen Theile der Mathematik hat, in keinem gründliche Kenntniſſe haben kann, ohne eine genaue Be- kanntſchaft mit jener.

D'Alembert macht in dem Artikel, Geometer, des Dictionn. encyclopédique, ſehr gute Bemerkungen zur Würdigung des geometriſchen (oder vielmehr mathe- matiſchen) Talents, die Vertragſamkeit deſſelben mit dem Talent für Dichtkunſt und Wohlredenheit, und den Ein- fluß auf andere Beſchäftigungen. Einen Auszug daraus wird man in dem Artikel, Mathematiker, finden. Der

ganze Aufſatz iſt in dem Eſprit de l'Encyclopédie, à Genéve, T. III. eingerückt.

Geometrie iſt die Wiſſenſchaft von den Formen ausgedehnter Größen. Sie unterſcheidet ſich von der Analyſis dadurch, daß ſie eigentlich nicht rechnet, die Größen nicht auf eine Einheit, weder eine beſtimmte noch unbeſtimmte bezieht, ſondern die Vergleichungen theils durch Zerlegungen und Zuſammenſetzungen macht, theils die Größen paarweiſe, durch ihre Verhältniſſe, vergleicht. Die Geometrie nimmt die Bilder der intellectuellen Größen ſelbſt zu Symbolen, da die Analyſis willkührliche, an ſich bedeutungsloſe, Zeichen der Größen und ihrer Verbindungen gebraucht. Doch kann die Rechnung auch auf geometriſche Größen angewandt werden. Zum praktiſchen Gebrauch iſt dieſes gewöhnlich nöthig, und am genaueſten. In höhern Unterſuchungen muß die Analyſis zu Hülfe genommen werden.

Die Geometrie iſt theils eine niedere, theils eine höhere Zu der niedern gehören erſtlich alle Unterſuchungen über Verbindungen gerader Linien, gerädlinichter Figuren, und über Körper, die von Ebenen eingeſchloſſen ſind; dann die Betrachtungen des Kreiſes, der Kugel, des Cylinders und des Kegels, ſo fern darin Verhältniſſe gerader Linien verglichen werden; einiges leichtere auch über die Vergleichung des Krummen, oder, wenn man will, alles, was durch die Exhauſtions-Methode dabey herausgebracht werden kann; wodurch zwar die Lehren des Archimedes von der Kugel, dem Cylinder und dem Kegel noch in die niedere Geometrie zu bringen wären, allein auch an der Gränze mit der höhern ſich befänden.

Die elementariſche Geometrie macht einen Theil der niedern aus Sie enthält die Hauptſätze, die beſtändig zu den Beweiſen gebraucht werden, mit den Auflöſungen derer Aufgaben, die am häufigſten vorkommen. Man muß die niedere Geometrie nicht nach dem Inhalte unſerer Lehrbücher beurtheilen, die nur das nothwendigſte enthalten. Man ſehe die mathematiſchen Sammlungen

des Pappus an; auch die wiederhergeſtellten Schriften des Apollonius, die ebenen Örter, die Bücher von dem beſtimmten Schnitte, von der Theilung des Raumes, und die noch erhaltene von der Theilung des Verhältniſſes; unter den Neuern die Werke von Gregorius a St. Vincentio, Tacquet, und das angefangene ausführliche Lehrgebäude der Geometrie von Gilbert. Erſter Theil 1798.

Man theilt bisweilen die Elementar-Geometrie in Longimetrie, Planimetrie und Stereometrie ein, ſ. dieſe Kunſtwörter. Doch wird in dieſelbe auch die Vergleichung der Oberflächen des ſenkrechten Cylinders und Kegels, und der Kugel mit ebenen Figuren aufgenommen. Man rechnet dieſe zur Stereometrie, dem Wortverſtande nicht gemäß.

Die höhere Geometrie beſchäftigt ſich mit den krummen Linien, den von ihnen eingeſchloſſenen Flächenräumen, und den von ihnen erzeugten Körpern und Oberflächen. Sie fängt mit der Lehre von den Kegelſchnitten an, die auf verſchiedene Art, entweder rein geometriſch, oder mit Zuziehung analytiſcher Rechnung behandelt werden kann. Von dieſen, durch ihre mancherley Eigenſchaften merkwürdigen, Linien geht ſie zu den höhern krummen Linien über, deren verſchiedene Formen ſie aus einander ſetzt. So weit es hier auf die Verhältniſſe der darin nach beſtimmten Geſetzen gezogenen geraden Linien ankommt, kann die Analyſis endlicher Größen mit der Unterſuchung fertig werden, wie man aus den Abhandlungen von Euler in dem zweyten Bande ſeiner Introductio in Analyſin Infin. und Cramers Analyſe des lignes courbes ſieht. Wo aber das Krumme unmittelbar in Betrachtung zu ziehen iſt, oder wo man von den letzten charakteriſtiſchen Verhältniſſen der Veränderungen an den krummen Linien und Flächen ausgehen muß, da iſt die Hülfsleiſtung der Analyſis des Unendlichen nothwendig. Die reine (von der Erfahrung unabhängige) Mechanik führt insbeſondere auf krumme Linien, die nur durch dieſes Hülfsmittel erforſcht werden können. Die wichtigſte

und ſchwerſte Frage dieſer Art iſt die Beſtimmung der gedoppelt krummen Linie, die ein Weltkörper vermöge mehrerer auf ihn wirkenden Kräfte beſchreibt, eine Aufgabe, womit man ſich ſchon über ein Jahrhundert beſchäftigt hat, und die man nur unter gewiſſen Einſchränkungen aufzulöſen in Stand gekommen iſt.

Ein neuer Zweig der Geometrie iſt die Vergleichung der Winkel mittelſt ihrer trigonometriſchen Functionen mit denjenigen der Winkel, woraus ſie zuſammengeſetzt werden. Man rechnet dieſe zu der analytiſchen Trigonometrie. Sie wird von dieſer abgeſondert, unter der Benennung, Goniometrie, in dieſem Werke abgehandelt werden. Die Alten hatten nur ſehr unvollkommene Kenntniß von dieſem Theile der rechnenden Geometrie. Sie hat vorzüglich durch Euler ihre Bildung erhalten.

Die Methode in der Geometrie, in Abſicht der Hülfsmittel, iſt zweyerley. Man kann ſich erſtlich bloß der Lehren der Elementar-Geometrie, nebſt derjenigen Art von Rechnung des Unendlichen, welche die Exhauſtions-Methode genannt wird, bedienen, wie die Alten es durchgehends thaten, und die Engländer noch jetzt gewöhnlich thun. Zweytens kann man ſich der Hülfe der Algebra, der Analyſis und der analytiſchen Trigonometrie nebſt der Goniometrie bedienen, indem man alle Sätze auf Gleichungen bringt, dieſe mit einander verbindet, und aus den Eigenſchaften der Gleichungen und andern analytiſchen Sätzen, beſonders denen aus der Differential- und Integralrechnung, und den trigonometriſch-goniometriſchen Formeln, geometriſche Vergleichungen herleitet. Dieſes Verfahren erſpart viele Mühe, da man nach der Methode der Alten erſt die Mittelglieder der Schlußfolgen mühſam und künſtlich aufſuchen muß, dagegen nach jener analytiſch-rechnenden Methode nur das beſondere aus dem allgemeinen herzuleiten iſt. Die erſtere reicht kaum oder wenig über die Kegelſchnitte hinaus, der andern iſt faſt alles zugänglich oder wird es noch werden.

Die Methode in der Geometrie in Abſicht des logiſchen Verfahrens iſt, wie überhaupt, entweder ſynthetiſch oder analytiſch. Die ſynthetiſche Methode iſt nicht, wie man gewöhnlich anzunehmen ſcheint, einzig und allein die Methode der Alten in der Geometrie, aus bewieſenen Sätzen einen neuen herzuleiten, oder aus dem gegebenen das unbekannte directe zu finden, ſondern ſie hat auch bey der Anwendung der analytiſchen Rechnung Statt, beſonders bey dem Erweiſe von Lehrſätzen. Dieſe wird man nicht leicht rückwärts erweiſen, ſo nämlich, daß gezeigt würde, wie man von einem als wahr angenommenen Satze auf einen als wahr ſchon anerkannten Satz geführt werde, ſ. Th. I. S. 88. Die analytiſche Auflöſung geometriſcher Aufgaben pflegt mit der ſynthetiſchen verbunden zu werden. Der weſentliche Unterſchied der Methode der Alten und der Neuern beruht auf den Hülfsmitteln, die von beiden gebraucht werden.

Die Methode der Alten hat man beſonders in dem Anfange des mathematiſchen Studium ſich geläufig zu machen. Sie giebt eine unmittelbare, anſchauliche Zergliederung der Relationen, ſie nöthigt, in jedem Falle auf beſondere Verbindungen und Anknüpfungen der Größen, und Einführung von Mittelbegriffen zu ſinnen. Auch prägt ſie durch die öftere Anwendung der gefundenen Sätze dieſe dem Gedächtniſſe, zur ſchnellen Bereitſchaft, ein. Durch alles dieſes wird der mathematiſche Geiſt geſchärft, und der Zeitaufwand vergütet. Iſt man erſt im Beſitze der allgemeinen Hülfsmittel aus der Analyſis der Neuern, ſo wird man vielleicht nicht die Geduld haben, zu Fuße zu gehen, wo man fliegen kann. Die faſt unüberſehbare Menge von Kenntniſſen, welche die neuere Mathematik enthält, nöthigt auch die Zeit zu ſparen.

Newton, der erſte Erfinder der neuern Analyſis, hielt die Methode der Alten ſehr hoch, und rühmte die Mathematiker ſeiner Zeit, welche in der Anwendung derſelben Geſchicklichkeit hatten, beſonders Huygens. Er pflegte ſich oft ſelbſt zu tadeln, daß er ſie nicht mehr be-

folge, uud bedauerte, daß er in dem Anfange ſeiner mathematiſchen Studien ſich zu ſehr an Descartes und andere algebraiſche Schriftſteller gehalten hätte, ehe er die Elemente des Euklides ſich vollkommen zu eigen gemacht hatte. Das erzählt Pemberton in der Vorrede zu dem View of Sir Iſaac Newton's Philoſophy.

Ueberſicht der Geſchichte der Geometrie.

Die wiſſenſchaftliche Geometrie hat ihren Urſprung von der techniſchen, der Feldmeßkunſt, wie der Name (von γη, Erde, und μετρειν, meſſen) zu erkennen giebt. Herodotus erzählt (B. II. C. 109), daß der ägyptiſche König Seſoſtris jedem ſeiner Unterthanen gleich viel Land zugetheilt habe, wovon jeder eine, für alle gleiche, Abgabe zu leiſten hatte. Verlor einer durch die Überſchwemmung des Nils etwas von ſeinem Antheil, ſo ward durch einen Feldmeſſer nachgeſehen, wie viel er verloren hatte, und darnach die Abgabe vermindert. Herodotus fügt hinzu, daß hiedurch die Geometrie erfunden ſeyn möge, welche darauf nach Griechenland übergegangen ſey. Ariſtoteles bemerkt in dem Anfange ſeiner Metaphyſik ohne Zweifel ſehr richtig, daß die Mathematik ihren Urſprung in Ägypten habe, da hier das Collegium der Prieſter frey von den Arbeiten des bürgerlichen Lebens Muße hatte, ſich den Wiſſenſchaften zu widmen. Inzwiſchen mögen die ägyptiſchen Prieſter doch nicht weit gekommen ſeyn, oder ſind ſehr geheim mit ihren Entdeckungen geweſen, da Thales, der zu ihnen gereiſet war, noch die erſten Sätze der Geometrie zu erfinden hatte, und Pythagoras über die Entdeckung eines ſehr nothwendigen Satzes ſo große Freude bezeugte. Nach der Erzählung des Diogenes Laertius und Plutarchus hat Thales den Ägyptern gezeigt, wie man die Höhe der Pyramiden mittelſt des Schattens meſſen könne.

Thales (650 J. v. C. G.) hat, wie Proklus berichtet, gefunden, daß in gleichſchenklichten Dreyecken die Winkel an der Grundlinie gleich groß ſind, daß die Schei-

telwinkel ſich gleich ſind, daß Dreyecke gleich ſind, die in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinkommen, und daß ein Kreis von ſeinen Durchmeſſern in zwey gleiche Theile getheilt wird. Auch fand er, daß jeder Winkel am Umfange in einem Halbkreiſe ein rechter iſt, für welchen Satz er den Muſen einen Ochſen opferte. Von ihm erhielten die Griechen die erſten Begriffe von Aſtronomie und Naturlehre.

Pythagoras (im 6ten Jahrh. v. C. G.) erfand den nach ihm genannten geometriſchen Satz, ein wichtiges Hülfsmittel zu geometriſchen Vergleichungen, und den Grund zur arithmetiſchen Beſtimmung der Linien. Daß er den Göttern hundert Ochſen zum Dank geopfert habe, iſt Fabel, da es nach ſeiner Lehre nicht erlaubt war, ein Thier zu tödten. Pythagoras hat ſchon eingeſehen, daß der Kreis unter allen ebenen Figuren gleichen Umfanges den größten Inhalt, und die Kugel unter allen Körpern mit derſelben Oberfläche den größten Raum ausfülle. Die numeriſche Vergleichung der Linien führte die Pythagoräer auf die incommenſurablen Größen. Sie geriethen auch auf die regelmäßigen Körper, die nach ihnen bisweilen benannt werden. Sie verglichen ſie, nach ihrer ſymboliſchen Lehrart, mit ſinnlichen Gegenſtänden, die Pyramide mit dem Feuer, den Würfel mit der Erde, das Oktaedron mit der Luft, das Ickoſaedron mit dem Waſſer, das Dodekaedron mit dem Weltall

Önopides von Chio (500 J. v C. G.) fand, wie eine ſenkrechte von einem gegebenen Puncte auf eine gerade Linie gezogen, ein Winkel einem andern gleich gemacht, und ein Winkel in zwey gleiche getheilt wird. Doch ſcheinen dieſe Sätze ſchon früher, dem Thales und Pythagoras, bekannt geweſen zu ſeyn müſſen.

Zenodorus, ein Schüler des Önopides, zeigte, daß aus der Gleichheit des Umfanges zweyer Figuren nicht die Gleichheit des Inhalts folge. Seinen Aufſatz hierüber, die älteſte auf uns gekommene geometriſche Schrift des Alterthums, hat Theon in ſeinem Commentar über das Almageſt aufbehalten.

Hippokrates von Chio (450 J. v. C.) fand die Quadratur einer durch zwey Kreisbogen auf gewiſſe Art begränzten Figur, die von ihm den Namen lunula Hippocratis führt, ſ. Hippokrates. Zu ſeiner Zeit kam die Aufgabe in Anregung, einen gegebenen Würfel zu verdoppeln, ſo daß ein Würfel bleibe. Hippokrates bemerkte, daß es hiebey darauf ankomme, zwiſchen zwey gegebenen Linien zwey mittlere proportionale zu finden. Er iſt, wie Proklus angiebt, der erſte, der geometriſche Anfangsgründe verfaßt hat.

Die lineariſche Perſpectiv iſt, wenn das Zeugniß des Vitruvs (de Architect. VII. praef.) zuverläſſig iſt, früh bearbeitet worden. Er ſagt, daß Anaxagoras und Demokritus über die theatraliſche Malerey geſchrieben haben, quemadmodum oporteat ad aciem oculorum radiorumque extenſionem, certo loco centro conſtituto, ad lineas ratione naturali reſpondere, uti de incerta re certae imagines aedificiorum in ſcenarum picturis redderent ſpeciem, et quae in directis planisque frontibus ſint figuratae, alia abſcedentia, alia prominentia eſſe videantur. In der Optik, welche des Euklides Namen führt, ſind zwar Sätze vorgetragen, worauf ſich die Perſpectiv gründet, aber eine perſpectiviſche Geometrie iſt es noch nicht.

Plato (400 J. v. C.) beſchäftigte ſich viel mit der Geometrie, und ſcheint durch Aufmunterung fähiger Köpfe zu ihrer Erweiterung vieles beygetragen zu haben. Er hat zwar, ſo viel man weiß, keine Schrift geometriſchen Inhalts verfaßt, allein man ſieht aus verſchiedenen Stellen ſeiner Schriften, daß er die Geometrie liebte, und ſie mit der Philoſophie zu verbinden ſuchte. Dies erhellt aus der bekannten Inſchrift über der Thür ſeines Hörſaals, kein der Geometrie Unkundiger komme herein. Er verlangte dadurch, daß der Verſtand ſeiner Zuhörer durch die Geometrie gebildet ſeyn ſollte, um die abſtracten unſinnlichen Lehren ſeiner Philoſophie zu faſſen. Auch iſt von ihm bekannt der Ausſpruch, Gott iſt immer Geometer

(ὁ Θεος ἀει γεωμετρει). Man ſchreibt dem Plato die Erfindung der geometriſchen Analyſis, und der Kegelſchnitte zu. Doch mag er jene nur im Allgemeinen vorgetragen und empfohlen, und dieſe nur nach ihrer Entſtehung aus dem Kegel betrachtet haben, ohne gewiſſe Eigenſchaften an ihnen zu entdecken. Denn ſeine Auflöſung von der Verdoppelung des Würfels iſt nur eine mechaniſche. Seine Zöglinge und Nachfolger, Eudoxus, Menächmus, Dinoſtratus, Ariſtäus, bearbeiteten dieſen wichtigen Theil der Geometrie, und wandten die analytiſche Methode mit Scharfſinn und glücklichem Erfolge an.

Eudoxus aus Cnidus wird von Archimedes als der Erfinder verſchiedener Sätze in der Lehre von den Körpern angeführt, als daß eine Pyramide der dritte Theil eines Prisma von gleicher Höhe über derſelben Grundfläche iſt, und eines ähnlichen Satzes von dem Verhältniſſe eines Kegels und Cylinders (von Kugel und Cylinder, Vorr.). Er hat ſich entweder mit den Kegelſchnitten oder mit andern krummen Linien beſchäftigt, und das Deliſche Problem durch eine beſondere von ihm erfundene Curve aufgelöſet. Eratoſthenes nennt ihn in der Aufſchrift ſeines Meſolabum den gottähnlichen, und führt die von Eudoxus gebrauchte Curve als unterſchieden von den drey Kegelſchnitten des Menächmus an. Er hat Anfangsgründe der Geometrie verfaßt, und die Lehre von der Proportion erweitert, ſo daß auch das fünfte Buch des Euklides ihm von einigen zugeſchrieben wird.

Menächmus ſcheint den Grund zu der Lehre von den Kegelſchnitten gelegt zu haben, da Eratoſthenes in der gedachten Aufſchrift die drey Linien nach ihm benennt, (Μεναιχμειους κωνοτομειν τριαδας). Er wandte die Verbindungen zweyer Kegelſchnitte ſehr kunſtgerecht zur Auflöſung der Deliſchen Aufgabe an.

Dinoſtratus, ſein Bruder, erdachte zur Auflöſung der Aufgabe, einen Winkel nach einem gegebenen Verhältniſſe einzutheilen, die Quadratrix.

Ariſtäus der ältere iſt der erſte, der über die Kegelſchnitte geſchrieben hat, ein Werk in fünf Büchern. Pappus führt es an (Coll. math. VII. praef.). Sein Werk über die körperlichen Örter (Auflöſungen von Aufgaben durch Linien, die durch Durchſchnitte von Körpern mit Ebenen entſtehen) in fünf Büchern ſetzt er mit unter die Hauptwerke, die man ſtudieren müſſe, um ſich in der geometriſchen Analyſis Fertigkeit zu erwerben. Dieſe kunſtreiche Methode der alten Geometer hat, wie man hieraus ſieht, ſeit den erſten Anwendungen des Menächmus, bald beträchtliche Erweiterungen erhalten. Die Lehre von den körperlichen Örtern beruhet auf der Lehre von den Kegelſchnitten.

Euklides (300 J. v. C.) iſt durch ſeine Elemente der Geometrie und der Arithmetik allen bekannt. Durch ihre Gründlichkeit und wiſſenſchaftliche ſtrenge Anordnung haben ſie ſich den großen Beyfall in allen Zeiten und bey allen cultivirten Völkern erworben. In England beſonders ſind ſie faſt das einzige Lehrbuch der Geometrie, gewiß zur feinern Bildung des Geiſtes. Ohne Zweifel ſind vor Euklides ſchon gute Elemente der Geometrie vorhanden geweſen, die er benutzen konnte. Proklus nennt vier oder fünf frühere Verfaſſer von Elementen; Euklides habe aber die Entdeckungen ſeiner Vorgänger vervollkommnet, und beſonders die noch mangelhaften Beweiſe zur völligen Schärfe gebracht. Allein er hat auch mehrere Werke geliefert, die über die Elemente hinausgehen. Seine Data erſtlich enthalten eine Sammlung von Sätzen, die einem Geometer zu eigenen Unterſuchungen nothwendig ſind, Data Euclidis. Über die Kegelſchnitte verfaßte er ein Werk in vier Büchern, worauf Apollonius nachher ſein großes Werk gegründet hat. Pappus führt ein Werk von ihm an, Örter an eine Oberfläche, wovon er aber keine weitere Nachricht giebt. Es können nichts anders als krumme Linien von doppelter Krümmung, auf einer krummen Fläche gezogen, ſeyn. Das Hauptwerk des Euklides ſind die Porismata in drey Büchern, wovon Pappus ſagt, daß ſie eine höchſt kunſtreiche Sammlung von Sätzen ſind,

die zur Analyſis der ſchwerern und allgemeinern Aufgaben dienen, wovon die Natur eine unendliche Menge an die Hand gebe. Die beiden letztern Werke ſind verloren gegangen, weil ſie zu kunſtreich waren. S. Porismata. Die Hauptausgabe aller noch vorhandenen Schriften des Euklides, griechiſch und lateiniſch, iſt von David Gregory. Oxford 1703. Fol. Robert Simſon hat eine Ausgabe der geometriſchen Elemente, der ſechs erſten Bücher, mit dem 11ten und 12ten, lateiniſch 1756. 4. und engliſch 1757 herausgegeben, worin er kritiſche Verbeſſerungen des Textes gemacht hat. Von der engliſchen Überſetzung iſt 1775 die fünfte Auflage gemacht. Bey dieſer und einigen vorhergehenden befinden ſich auch die Data mit Verbeſſerungen. Eine ſorgfältige deutſche Überſetzung aller 15 Bücher hat Lorenz geliefert. Zweyte Ausgabe 1798. Die beiden letzten Bücher der Elemente ſchreibt man dem Hypſikles zu. Verzeichniſſe von Ausgaben der Euklidiſchen Schriften findet man in Scheibels mathem. Bücherkenntniß, 1. Stück, und in Murhards mathem. Bibliothek, 2 Bd.

Archimedes (250 J. v. C.) eröffnete ſich Wege in Gegenden der Geometrie, die bis dahin faſt gar nicht betreten waren, durch Vergleichung krummlinichter Größen unter einander und mit geradlinichten. Sein Scharfſinn führte ihn zu vielen merkwürdigen Entdeckungen von neuer Art, daher das Alterthum ihm die erſte Stelle unter den Geometern einräumte. Er hat mancherley Schriften hinterlaſſen, die alle geometriſchen oder geometriſch-ſtatiſchen Inhalts ſind. Denn von ſeinen techniſchen Erfindungen, deren das Alterthum ihm vierzig beylegt, hat er nichts aufgeſetzt. In der Schrift von Kugel und Cylinder vergleicht er dieſe Körper und ihre Abſchnitte in Rückſicht auf Oberfläche und Inhalt. Der Aufſatz über die Kreismeſſung iſt der erſte Verſuch einer Rectification, ſ. Cyklotechnie. In dem Buche von Konoiden und Sphäroiden gieng er noch weiter. Er vergleicht die Abſchnitte dieſer Körper oder das Ganze mit Cylindern und Kegeln von derſelben Höhe über derſelben Grundfläche. Die

Quadratur der Parabel fand er auf zweyerley Art, von welchen die durch Hülfe der Statik eine ganz überraſchende Combination zweyer ſehr ungleichartigen Vergleichungen iſt. Seine Unterſuchungen über die von Conon erdachte Spirale geben die Verhältniſſe der zuſammengehörigen Flächenräume an dieſer Linie und dem Kreiſe, auch die Verhältniſſe der Subtangenten von dem Mittelpuncte aus genommen zu den Kreisbogen. Die Beweiſe der letztern haben einem guten Mathematiker im 17ten Jahrhundert, Bouillaud, nach ſeinem Geſtändniſſe, Mühe gemacht, ſo daß er zweifelte, ob er ſie ganz gefaßt hätte. Archimedes war es auch, der die Statik und Hydroſtatik gegründet hat. Seine beiden Bücher über die gleichwichtigen ebenen Figuren, oder die Schwerpuncte ſolcher Figuren, enthalten ſehr ſcharfſinnige geometriſche Methoden, den Schwerpunct geradlinichter, beſonders aber paraboliſcher Figuren zu finden. Von der Methode, deren ſich Archimedes zur Vergleichung krummlinichter Größen bedient hat, ſ. den Artikel, Exhauſtions-Methode. Eine prächtige Ausgabe der Werke des Archimedes, mit Anmerkungen und gelehrten Abhandlungen begleitet, iſt zu Oxford 1792, groß Folio, herausgekommen. Den größten Antheil an dieſer Ausgabe hat Torelli, ein Geometer aus Verona, nach deſſen Tode, einige Liebhaber der alten Geometrie ſeine Handſchriften gekauft, und zum Druck befördert haben. Ein Beweis der Liebe für die Alten in England.

Apollonius von Pergä (200 J. v. C.) heißt bey den Alten der große Geometer, oder der Geometer vorzugsweiſe. Man hat allerdings ihn unmittelbar nach Archimedes zu ſetzen, der wegen der Neuheit ſeiner Unterſuchungen, und der Methoden, die er dazu anwandte, noch den Rang vor Apollonius behaupten möchte. Das Hauptwerk dieſes Geometers iſt das über die Kegelſchnitte in acht Büchern abgefaßte, von welchen noch die erſten vier im Original, die drey folgenden in einer arabiſchen Überſetzung, und aus dieſer in einer lateiniſchen übrig ſind. Das achte iſt von Halley nach der kurzen von Apollonius

gegebenen Anzeige wieder hergeſtellt. Alle acht Bücher, die vier erſten zugleich griechiſch, ſind von ihm zu Oxford 1710 gr. Fol. herausgegeben. In den vier erſten Büchern hat Apollonius das vor ihm ſchon bekannte mit Verbeſſerung der Form vorgetragen, und mit neuen Sätzen bereichert. Die vier andern Bücher aber enthalten ganz neue und tief geſchöpfte Unterſuchungen. In dem Artikel, Kegelſchnitte, wird davon weitere Nachricht gegeben. Die übrigen Schriften des Apollonius betreffen beſondere Aufgaben aus der Geometrie, wobey viele Fälle möglich ſind, die darin einzeln vorgenommen werden. Sie waren den Alten wegen der darin angewandten geometriſchen Analyſis wichtig. Sie ſind alle verloren gegangen, bis auf die Schrift de ſectione rationis, die in einer arabiſchen Überſetzung ſich erhalten hat. Ihre Titel und die wieder hergeſtellten ſind in dem 1. Th. S. 66. angeführt. Die algebraiſchen Auflöſungen der Aufgaben de ſectione rationis und de ſectione ſpatii ſind daſelbſt S. 113 und 115. anzutreffen, die von der ſectione determinata, S. 293. ff. ein Fall der Aufgabe de inclinationibus, S. 120. Unter den übrigen Schriften, von deren Inhalt gar keine nähere Anzeige vorhanden iſt, war eine über die Vergleichung des Dodekaedron und Ikoſaedron, die in derſelben Kugel eingeſchrieben ſind, auch eine Schrift über die Stillſtandspuncte und Rückgangsbogen der Planeten.

Mit Apollonius hatte der geometriſche Geiſt unter den Alten ſeine größte Stärke erreicht. Die folgenden Zeiten mußten ſich begnügen, die Werke der großen Meiſter zu ſtudieren, und einiges als Nachleſe beyzufügen. Die Aſtronomie beſchäftigte nun vorzüglich die Mathematiker.

Dieſe Wiſſenſchaft war es auch, welche die Geometer nöthigte, die Arithmetik auf die Geometrie anzuwenden. Schon die Bedürfniſſe bey Meſſungen von Entfernungen auf der Erdfläche, und Beſtimmung des Inhalts von Feldern müſſen dazu geleitet haben. Die Aſtronomie machte es nothwendig, die Winkel durch Ver-

hältniſſe der Linien in rechtwinklichten Dreyecken zu beſtimmen. Der erſte, deſſen Bemühungen zu dieſem Zweck bekannt ſind, iſt Menelaus aus Alexandrien, (100 J. n. C. G.), der ſechs Bücher von den Chorden im Kreiſe geſchrieben hat, die nicht mehr vorhanden ſind. Die Aſtronomie bedarf gar ſehr der Lehre von den Lagen der Kreiſe auf einer Kugelfläche gegen einander, und von den Dreyecken, welche die großen Kreiſe auf einer Kugel bilden. Die erſte bekannte Schrift über dieſe Lehre iſt von Theodoſius (50 J. v. C. G.). Sein Zweck iſt die geometriſchen Gründe der ſphäriſchen Aſtronomie feſt zu ſtellen, und die Erſcheinungen, womit ſie ſich beſchäftigt, zu erklären. Das dritte Buch enthält manche merkwürdige und ziemlich ſchwere Sätze, ſo daß Pappus nöthig gefunden hat, darüber Erläuterungen zu geben, welche das ſechſte Buch ſeiner Sammlungen einnehmen.

Menelaus hat auch ein Werk übrr die Sphärik geſchrieben, worin hauptſächlich von ſphäriſchen Dreyecken und ihrer Auflöſung gehandelt wird. Man trifft darin manche merkwürdige und wenig bekannte Sätze an. Dieſer Geometer hat ſich auch mit krummen Linien höherer Art als die Kegelſchnitte ſind, beſchäftigt, wie Pappus in einer Anmerkung zu S. 30. des 4. B. anführt.

Serenus aus Antiſſa auf Lesbos (ungewiſſen Zeitalters) ſchrieb eine Abhandlung über die Schnitte eines Cylinders, und die Schnitte eines Kegels durch die Axe.

Nikomedes (der vielleicht noch in die Zeit vor C. G. zu ſetzen iſt) erſann die Conchoide, zur Auflöſung der Aufgabe von der Dreytheilung eines Winkels, und der Erfindung zweyer mittlern proportionalen.

Pappus aus Alexandrien (um 375 n. C. G.) hat uns eine ſchätzbare Sammlung von mathematiſchen Lehrſätzen und Aufſätzen und Aufgaben mit ihren Auflöſungen hinterlaſſen, die er aus vielen damahls vorhandenen Schriften gemacht hat; zugleich war dabey ſein Zweck,

diejenigen Lehrſätze, welche zum Verſtändniß der vornehmſten geometriſchen Werke nöthig ſind, mitzutheilen und zu erweiſen. Aus dieſer Sammlung lernt man den Geiſt der geometriſchen Analyſis der Alten kennen. In der Vorrede zu dem ſiebenten Buche hat er uns den Inhalt der wichtigſten geometriſch-analytiſchen Werke derſelben angezeigt, wovon wir ohne ihn nicht die Titel wiſſen würden, und in dieſer Abtheilung ſeiner Sammlung eine große Anzahl Lemmata (Erläuterungs- und Vorbereitungs-Sätze) zu jenen Schriften mitgetheilt, die nach d r Methode jener behandelt ſind. In der gedachten Vorrede führt er auch die bey den Alten ſehr wichtige Aufgabe an, den geometriſchen Ort zu finden, wodurch die von jedem Puncte deſſelben an gegebene gerade Linien gezogenen Perpendikel gegebene zuſammengeſetzte Verhältniſſe bilden. Die Alten konnten ſie nur für den Fall von drey oder vier gegebenen geraden Linien auflöſen; der neuern Analyſis war es vorbehalten, eine uneingeſchränkte Auflöſung zu liefern. Der Satz, den in neuern Zeiten Guldin bekannt machte, wie mittelſt des Schwerpuncts von Linien und Flächen der Inhalt der davon beſchriebenen Oberflächen und Körper gefunden wird, wird von Pappus als ein von ihm entdeckter angeführt, am Ende der vorhergedachten Vorrede. In dem fünften Buche wird unter andern die Vergleichung iſoperimetriſcher Figuren in Rückſicht auf ihren Inhalt gemacht. Der zehnte Satz iſt, daß unter geradlinichten Figuren von gleichem Umfange, mit derſelben Anzahl Seiten, diejenige den größten Inhalt hat, welche lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel hat. — In Käſtners Geſchichte der Mathematik Bd. II. S. 81 — 94 iſt ein Verzeichniß der mannichfaltigen Gegenſtände in dieſer Sammlung enthalten.

Von den acht Büchern der Sammlung ſind die beiden erſten, und das dritte zum Theil verloren. Die Ausgaben zu Peſaro (Piſauri) 1588 und Venedig 1589 ſind nur in dem Titel verſchieden. Die Ausgabe von 1660 wird zwar auf dem Titel als eine ſehr verbeſſerte angegeben, iſt aber nach Halleys Verſicherung nicht ſo gut als

jene. Das Original iſt noch nicht gedruckt. Nur den griechiſchen Text zu der Vorrede des 7ten Buchs hat Hallen der Schrift des Apollonius de ſectione rationis beygefügt. Wallis hat ein Fragment des zweyten Buchs in dem dritten Theile ſeiner Werke mitgetheilt.

Diokles, (400 J. n. C. G.) erdachte zur Auflöſung der Aufgabe von der Erfindung zweyer mittlern proportionalen die Ciſſoide. Von ihm iſt auch eine geſchickte Auflöſung einer für die alte Geometrie nicht leichten Aufgabe, eine Kugel durch eine Ebene in zwey Theile nach einem gegebenen Verhältniſſe zu theilen. Archimedes verſprach ſie zu liefern; man findet ſie aber in ſeinen Schriften nicht. Eutocius führt die Auflöſung des Diokles und eines andern Geometer, Dionyſodorus, in ſeinem Commentar über das zweyte Buch des Archimedes von Kugel und Cylinder an.

Dieſer jetzt genannte Eutocius aus Aſcalon (5. Jahrh. n. C. G.) hat nützliche Erläuterungen über einige Schriften des Archimedes und die vier erſten Bücher der Kegelſchnitte des Apollonius geliefert. Man findet darin gute hiſtoriſche Nachrichten, in jenen insbeſondere über die Deliſche Aufgabe.

Nach den Commentarien über die Werke des Archimedes und Apollonius findet ſich gar nichts bemerkenswerthes für die Geometrie. Die Eroberung von Ägypten durch die Saracenen (im J. 641.), und die Zerſtörung der herrlichen Bibliothek in Alexandrien machten der ſo alten und verdienten Akademie ein Ende. Politiſche und kirchliche Unruhen in dem griechiſchen Reiche und in den Abendländern unterdrückten faſt alle Beſchäftigung mit der Mathematik. Die Araber fiengen zwar bald an mit der Liebe zum Kriege die Liebe zu den Wiſſenſchaften zu vereinigen, ſo wie ſie immer die Dichtkunſt und Beredſamkeit geliebt hatten; ſie überſetzten die wiſſenſchaftlichen Schriften der Griechen in ihre Sprache, und erhielten uns dadurch einige ſchätzbare Werke; allein ſie brachten die Geometrie nicht weiter. Es iſt wahr, daß nach der

Methode der Alten dieſe ſchwerlich höher zu treiben ſeyn möchte, als es von den Griechen geſchehen war. Der Araber Alhazen verdient aber vieles Lob wegen der Auflöſung der geometriſch-optiſchen Aufgabe, an einem ſphäriſchen Spiegel, wenn die Stelle des Objects und des Auges gegeben iſt, den Zurückwerfungspunct zu finden. Vielleicht gehört die Auflöſung aber einem Griechen. Sein Werk über die Optik iſt ſehr dunkel, verworren und weitſchweifig.

Die Araber haben um die Trigonometrie das Verdienſt, daß ſie anſtatt der von den Alten gebrauchten Chorden die Sinus einführten.

Als in Europa die Liebe zu den Wiſſenſchaften wieder erwachte, und durch die damahls erfundene Buchdruckerkunſt unterſtützt ward, war man eifrig bemüht auch geometriſche Werke der Alten durch Überſetzungen in Umlauf zu bringen. Commandinus (geb. 1509, zu Urbino) verdient hier eine ehrenvolle Erwähnung. Dieſes gab zum Anfang hinlänglich Beſchäftigung. Doch unternahmen einige ſehr arbeitſame Männer in Deutſchland ſchon im 15ten Jahrhundert, noch mehr im 16ten, die Berechnung ſehr genauer und vollſtändiger trigonometriſcher Tafeln. Die Verdienſte des Purbach, Regiomontanus, Rhäticus, Otho, ſind in dem Artikel, Cyklotechnie, Th. I. S. 667. ff. gerühmt. Die Arbeit erforderte gute Kenntniß der Trigonometrie oder Goniometrie, aus welcher manche wichtige Sätze in des Rhäticus Werk de fabrica canonis doctrinae triangulorum vorkommen.

Der Abbate Maurolycus aus Meſſina (geſt. 1575.) war nicht allein ein gelehrter Herausgeber einiger alten geometriſchen Werke, ſondern auch der erſte Mathematiker ſeiner Zeit. Er wagte ſich an die Wiederherſtellung des fünften Buchs des Apollonius, welches von den Größten und Kleinſten an den Kegelſchnitten handelt. Borellus hat dieſen Verſuch aus den nachgelaſſenen Papieren des Maurolycus zu Meſſina 1654 herausgegeben. Montucla rühmt ſehr die Methode, nach welcher Mau-

lonius die Kegelſchnitte behandelt hat, und ſagt, daß de la Hire in ſeinem ausführlichen Werke über dieſe Linien eben dieſelbe befolgt, und weiter angewandt habe.

Nonius, oder mit ſeinem portugieſiſchen Namen Nugnez (geſt. 1577.), zeigte ſich als einen ſcharfſinnigen Geometer durch die Auflöſung der Aufgabe von der kürzeſten Dämmerung, die ſelbſt Jakob Bernoulli viel zu ſchaffen gemacht hat. Er iſt der erſte, der die loxodromiſche Linie betrachtet hat.

Vieta (geſt. 1603.), der insbeſondere als Algebraiſt berühmt iſt, fand Formeln für die Chorden der vielfachen Winkel und ganzer Theile eines Winkels durch die Chorde des einfachen. Dadurch löſete er eine ihm von Adrianus Romanus vorgelegte Aufgabe vom 45ſten Grad auf. Seine Wiederherſtellung der Schrift des Apollonius von den Berührungen, und andern Unterſuchungen, ſind Beweiſe ſeines geometriſchen Scharfſinnes. Von ſeiner Kreisrechnung ſ. Cyklotechnie, Th. I. S. 647.

Kepler (geſt. 1630.) iſt der erſte, der das unendlich kleine in die Geometrie einführte, und es zur Vergleichung des Inhalts runder Körper anwandte, in der Stereometria doliorum, 1615. Er findet dadurch den Inhalt von 90 Arten Körper; hat ſich aber auch, wo ihm die directe Methode fehlte, durch ſeine Einbildungskraft verleiten laſſen, Verhältniſſe anzunehmen, die nur eine gewiſſe Schicklichkeit oder Wahrſcheinlichkeit hatten, welches Alexander Anderſon in ſeinen Vindiciis Archimedis 1616, ihm zeigte.

Cavaleri (geſt. 1647.) ſuchte auf eine andere Art die Exhauſtions-Methode der Alten abzukürzen und zu erweitern. Er fand mittelſt Summirungen arithmetiſcher Reihen von unendlich vielen Gliedern mit unendlich kleinen Unterſchieden den Inhalt von Flächen-Figuren und Körpern. Was gegen ſeine Methode zu erinnern iſt, findet man in dem Artikel, Cavaleri Methode des Untheilbaren.

Guldin (geſt. 1643.) gründete die Berechnung des Inhalts von Flächenräumen und Körpern auf eine Eigenſchaft des Schwerpunctes, ſ. Guldins Regel.

Lucas Valerius hatte in der Schrift de centro gravitatis ſolidorum, 1604. die von Archimedes bloß bey dem paraboliſchen Konoid angefangene Unterſuchung auf mehrere Körper erſtreckt.

Torricelli (geſt. 1647.) erweiterte die Lehre des Archimedes von der Kugel, insbeſondere durch die Beſtimmung des Inhalts der Körper, welche durch Umdrehung regulärer Vielecke erzeugt werden. De ſphaera et ſolidis ſphaeralibus, in der Sammlung ſeiner geometriſchen Wercke. Florent. 1644. Er gab 20 Arten an, die Parabel zu quadriren, theils geometriſche, theils mechaniſche, theils nach der Methode des Untheilbaren, in eben der Sammlung. Die Quadratur der Cykloide fand er auf dreyerley Art. Von ſeinem Streite mit Roberval über das Erfindungsrecht ſ. Theil I. S. 596.

Der Orden der Jeſuiten hatte im 17ten Jahrhundert und ſchon vorher viele Mathematiker von Ruf. Ein ſehr bekannter iſt Clavius (geſt. 1612.), deſſen Werke fünf große Foliobände, eng gedruckt, ausmachen. Doch wird wenig neues von Merkwürdigkeit darin enthalten ſeyn. Vielleicht iſt ſein weitſchweifiges Werk über die ſtereographiſche Projection, welches er Aſtrolabium betitelt, in Rückſicht des Neuen, das wichtigſte. Durch ſeinen großen Commentar über die Euklidiſchen Elemente mag er am nützlichſten geworden ſeyn. Ein anderer Jeſuit, Tacquet (geſt. 1660.), hat ſehr vielerley geometriſchen Inhalts, beſonders über die Meſſung mancherley Körper, geſchrieben, das einen ſtarken Folioband füllt. Der wichtigſte mathematiſche Schriftſteller aus dieſem Orden in dem genannten Zeitraume möchte Gregorius a St. Vincentio (geſt. 1667.) ſeyn. Huygens urtheilt ſehr günſtig von ihm, ob er gleich ſeine vermeintliche Quadratur des Kreiſes wiederlegt hatte, und Leibnitz nennt ihn auf eine ſehr ehrenvolle Art neben Descartes und Fermat. Von ihm iſt ein großes Werk vorhanden: Opus

geometricum quadraturae circuli et ſectionum coni, Antwerp. 1647. Fol. Die Quadratur des Kreiſes, welche er darin will entdeckt haben, iſt zwar unrichtig, allein auf dem Wege, auf welchem er ſie ſuchte, hat er vieles ſchätzenswerthe und merkwürdige gefunden, als manche neue Sätze über den Kreis und jeden Kegelſchnitt; ſehr viele Cubirungen, unter andern der hufförmigen Abſchnitte eines Cylinders mit Grundflächen verſchiedener Art. Alles dieſes mag man jetzt leichter finden können; doch bleibt die Methode lehrreich. Wahrſcheinlich hat er auch die Verwandlung der arithmetiſchen Spirale in eine Parabel gefunden, die Cavaleri im 6ten Buch 9ten S. ſeiner Geometrie vorträgt. Das merkwürdigſte, was der P. Gregorius gefunden hat, wird ſeyn, daß die Flächenräume zwiſchen einer Hyperbel, der einen Aſymptote und den mit der andern parallelen Ordinaten gleichförmig wachſen, wenn die zugehörigen Abſciſſen in geometriſcher Progreſſion genommen werden.

Descartes (geſt. 1650.) gab der Geometrie einen neuen Schwung durch die Anwenduug der Algebra auf die Unterſuchung der Natur krummer Linien. Vor ihm waren ſchon geometriſche Fragen mit Hülfe der Algebra aufgelöſet, allein dieſe betrafen nur einzelne Vergleichungen beſtimmter, mit einander verbundenen, geraden Linien; Descartes ſchloß alle Eigenſchaften einer krummen Linie in eine algebraiſche Gleichung zwiſchen zwey veränderlichen Größen, den Coordinaten, mit gewiſſen gegebenen Linien ein, in der Abſicht, um aus derſelben, als einer vollſtändigen Definition, wo es nöthig, mit Zuziehung einiger Verwandlungen, alle Eigenſchaften einer krummen Linie, auch die verborgenſten, vermittelſt algebraiſcher Lehrſätze und Auflöſungs-Methoden herzuleiten. Dieſes leiſtete er in ſeiner Geometrie, einem kleinen, aber ſehr gehaltvollen Werke, welches zuerſt 1637. erſchien. Schon faſt im Anfange giebt er die Auflöſung einer Aufgabe, welche die Alten nur in einigen beſondern Fällen hatten auflöſen können. Sie iſt folgende: es ſind mehrere gerade Linien der Lage nach gegeben, den Ort des Punctes zu fin-

den, an welchem das Product der Linien, die von demſelben an einige jener Linien unter gegebenen Winkeln gezogen werden, dem Producte derjenigen, die an die übrigen gleichmäßig gezogen werden, gleich ſey, oder zu demſelben ein gegebenes Verhältniß habe. Iſt der geraden Linien eine gerade Anzahl, ſo mag man für jedes Product gleich viele nehmen; ſonſt müßte man für die geringere Anzahl gegebene Linien, oder die lineariſche Einheit, zu Factoren aufnehmen, wie es nöthig iſt, wenn die Anzahl ungerade iſt. Hievon noch in dem Artikel, krumme Linien. — Durch die algebraiſche Darſtellung einer Curve gelangte Descartes zu einer allgemeinen Methode, beſtimmte Gleichungen zu conſtruiren (ſ. Anwendung der Geometrie auf die Algebra Th. 1. S. 132.). Einiges möchte noch gegen ſeine Wahl der dazu anzuwendenden Linien zu erinnern ſeyn. — Durch dieſelbe fand er auch zwey allgemeine Methoden, an eine krumme Linie berührende gerade zu ziehen, wovon in dem Artikel, berührende Linie, Th. 1. S. 280 Nachricht gegeben iſt.

Fermat (geſt. 1665.) hat zu gleicher Zeit mit Descartes die Beſchaffenheit einer Curve durch eine Gleichung dargeſtellt; er gebrauchte auch die unbeſtimmten Gleichungen für zwey krumme Linien um eine beſtimmte zu conſtruiren; nur iſt es unbequem, daß er ſich Vieta's Notation bedient. Seine Methode, hyperboliſche und paraboliſche Linien höherer Art nebſt der gemeinen Parabel zu quadriren, iſt einfach und ſinnreich, vermittelſt der Summirung einer geometriſchen Reihe, wobey er die Abſciſſen in geometriſcher Progreſſion fortgehen läßt. Seine Regel, den Werth einer veränderlichen Größe zu beſtimmen, für welchen die zugehörige veränderliche ein Größtes oder Kleinſtes iſt, iſt im weſentlichen dieſelbe mit derjenigen, die die neuere Analyſis lehrt. Sein Verfahren, berührende an eine Curve zu ziehen, macht die Sache ſehr begreiflich, kann aber nur bey rationalen Gleichungen gebraucht werden, ſ. Th. I. S. 828. Er fand die Rectification der zweyten cubiſchen Parabel, deren Gleichung iſt $y^3 = ax^2$, welche aber auch zwey andere Geo-

meter, van Heuraet und Neil, für ſich mögen gefunden haben. Er wird auch der erſte ſeyn, der die Aufgaben vornahm, wie eine Kugel zu finden ſey, welche andere gegebene Kugeln oder Ebenen berührt, oder deren Oberfläche durch gegebene Puncte geht.

Pascal (geſt. 1662, im 39ſten Jahre) war ein außerordentlicher Kopf für die Geometrie, da er ſchon im 16ten Jahre eine Abhandlung über die Kegelſchnitte verfaßte, worin er aus einem einzigen Satze auf 400 Corollarien herleitete. Doch iſt von ſeinen mathematiſchen Schriften nichts gedruckt, als ſeine Geſchichte der Cykloide, worin er ſchwere Aufgaben auflöſet. Durch Kränklichkeit und religiöſen Eifer für die Janſeniſten ward er von der Mathematik abgezogen.

Viviani (geſt. 1703 im 81ſten J.) gab im J. 1659. eine Wiederherſtellung des fünften Buchs über die Kegelſchnitte von Apollonius heraus, de Maximis et Minimis geometrica divinatio in V. Conicorum Apollonii Pergaei adhuc deſideratum, worin er vieles neue zur Ergänzung des alten Werks vorträgt, einige der ſchwerſten Fragen aber unberührt gelaſſen hat. Im Jahr 1673. gab er auch eine Wiederherſtellung der Schrift de locis ſolidis des ältern Ariſtäus heraus, wovon er 1701. eine vermehrte Ausgabe erſcheinen ließ. Viviani iſt unter den Neuern einer der vertrauteſten mit der alten Geometrie.

Huygens (geſt. 1695.) bereicherte die Geometrie mit der Theorie der Evoluten, in dem dritten Theile des Horologium oſcillatorium, 1673. Sie führte ihn zu manchen neuen Sätzen und Bemerkungen, als über die Rectification der Curven, und zu der merkwürdigen Eigenſchaft der Cykloide, daß ſie durch die Abwickelung ſich ſelbſt wieder erzeugt. Die Kreisrechnung erhielt durch ihn Erweiterungen.

Wallis (geſt 1703.) wandte die Lehre von der Summirung unendlicher Reihen, deren Glieder eine ſtetige Folge ausmachen, auf die Geometrie ausführlicher an, als es ſeit Cavaleri's Zeit von andern Geometern geſchehen

war. Seine Arithmetica infinitorum erſchien zuerſt 1655. Es iſt eigentlich ein geometriſches Werk, worin beſonders die Quadratur krummlinichter Figuren vorgenommen wird. Darauf folgten die Schriften über die Cykloide und Ciſſoide und die dadurch erzeugten Körper, nebſt Methoden zur Rectification und Complanation, 1659; ſehr ausführliche Unterſuchungen über den Schwerpunct der Körper (faſt 300 S. Fol. ſtark, im J. 1670); eine Abhandlung über die Winkeltheilungen, 1685. Doch iſt alles dieſes, ſo ſcharfſinnig es auch erfunden iſt, gegenwärtig zu weitſchweifig und mühſam. Von ſeinem Ausdruck des Verhältniſſes zwiſchen dem Quadrat des Durchmeſſers und dem Flächeninhalte eines Kreiſes, ſ. Th. I. S. 654.

Lord Brounker (geſt. 1684) fand für das eben gedachte Verhältniß einen Ausdruck durch einen Kettenbruch, ſ. Th. I. S. 655. Er war auch der erſte, der den Flächeninhalt einer Curve durch eine unendliche Reihe, nämlich an der Hyperbel, darſtellte, ſ. Brounkerſche Reihen, Th. I. S. 356.

Mercator (geſt. 1694) fand eine bequemere Reihe für die Quadratur der Hyperbel an ihren Aſymptoten, dieſelbe, welche die Integralrechnung unmittelbar giebt.

Barrow (geſt. 1677) gab mancherley künſtliche Methoden an, berührende an krumme Linien zu ziehen, aber auch die einfache, welche die Differentialrechnung an die Hand giebt, nur daß er ſie noch nicht anders als bey rationalen Gleichungen anzuwenden vermochte. S. Th. I. S. 284. Barrows lectiones geometricae et opticae 1669, welche letztern ganz geometriſch ſind, enthalten ſcharfſinnige Unterſuchungen. Mit dem Ende des ſiebzehnten Jahrhunderts ſchließt ſich auch das Zeitalter der mittlern Geometrie, die entweder ganz nach dem Muſter der alten geformt war, oder ſich mit der Algebra verband, und ſich der Summirung unendlicher Reihen gleichſam mit mehrerer Kühnheit als die Geometrie der Alten bediente. Die Analyſis des Unendlichen, welche Newton und Leibnitz erfanden, ſetzte die Geometer in Stand, nicht allein alle Aufgaben, wobey neben den veränderlichen Größen ſelbſt

auch die Gränzverhältniſſe ihrer Veränderungen in Betrachtung kommen, (als die von berührenden, von Wendungspuncten, Rückkehrpuncten, vom Krümmungskreiſe, von Brennlinien, von Größten und Kleinſten), leicht und allgemein aufzulöſen, ſondern auch von dieſen Verhältniſſen durch die Integralrechnung zu den endlichen Größen ſelbſt zu gelangen. Alſo wurden Quadraturen, Cubirungen, Complanationen, Lage des Schwerpunktes, womit ſich die vorhergehenden Geometer viele Mühe und auch viele Freude gemacht hatten, nur eine vorbereitende Anwendung der neuen Rechnung, um zu ſchwerern Unterſuchungen ſich geſchickt zu machen. Von dieſer Zeit an ſind Analyſis, Geometrie und die reine Mechanik ſo genau mit einander verſchwiſtert, daß die Geſchichte der einen immer in die der andern eingreift. Doch behielt die Geometrie der Alten immer noch ihre Verehrer, beſonders in Italien und England. Dem letztern Lande dankt man die beſten Ausgaben der alten Geometer und Wiederherſtellungen ihrer verlornen Schriften. Die Kegelſchnitte ſind von Engländern häufig bearbeitet, immer nach der Methode der Alten, und werden mit zu dem Elementar-Unterrichte gezogen. Auch die analytiſchen Unterſuchungen der Engländer haben eine alt-geometriſche Geſtalt.

Newtons drey Schriften, geometriſch-analytiſchen Inhalts, ſind in dem Artikel, Differentialrechnung, Th. I. S. 831. ff. angezeigt. In der größern derſelben, der Methodus fluxionum et ſerierum infinitarum, ſind ſehr viele wichtige geometriſche Unterſuchungen enthalten. Der Abſtand gegen die beſten ältern Schriften iſt ſehr groß. Man muß ſich wundern, daß ein ſolches Werk bis 1736 ungedruckt geblieben iſt, wenn nicht die Beſitzer des Manuſcripts einen ſolchen Schatz geheim zu halten geſucht haben. Zu jenen drey Schriften iſt hier noch die Enumeratio linearum tertii ordinis zu ſetzen. Es war ein ganz neuer Gedanke, die ſehr beträchtliche Anzahl dieſer Curven in Claſſen zu bringen, und ihre Verſchiedenheiten anzugeben. Newton brachte nach ſeiner Eintheilungsart zwey und ſiebzig Species heraus. Sein

Commentator über dieſe Materie, Stirling, fügte noch zwey von Newton aus der Acht gelaſſene hinzu, im J. 1717, und Gua noch vier, die auch Stirling überſehen hatte. Der letztere ſuchte den Weg zu entdecken, auf welchem Newton zu ſeinen Reſultaten gelangt ſeyn möchte. Er machte ſeine Bemerkungen bekannt in einer Schrift: Uſage de l'analyſe deDescartes pour découvrir, ſans le calcul differentiel, les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres, 1740.

Nach dem Beyſpiele, das Newton gegeben hatte, fuhr man fort, die Theorie der krummen Linien vollſtändiger und zuſammenhängender zu machen. Bragelogne, Mitglied der franzöſiſchen Akademie, wählte die Linien der vierten Ordnung zu einem beſondern Gegenſtande ſeiner Unſuchung. In den Abhandlungen der Akademie von 1730 und 1731 theilte er die Vorbereitungen dazu mit; in der Geſchichte für das J. 1732 wird auch ein Abriß von ſeiner Methode zur Aufzählung der Linien der vierten Ordnung gegeben; aber er verſtarb vor Beendigung des mühſamen Unternehmens. Euler widmete den 2ten Theil ſeiner Einleitung in die Analyſis des Unendlichen (1748) der Lehre von den krummen Linien, theils in Allgemeinen, theils insbeſondere denen von der zweyten und dritten Ordnung. Von den Linien der vierten Ordnung war es hinlänglich eine allgemeine Claſſification zu machen. Dazu fügte er einiges von den transſcendenten Linien und von den Oberflächen der Körper. In dieſem Werke wird die trigonometriſche Rechnungsmethode oft angewandt. Es iſt ſehr lichtvoll und belehrend. Ein anderes, noch ausführlicheres Werk über die krummen Linien iſt das von Cramer. Introduction à l'Analyſe des lignes courbes algébriques. 1750, 640 pag. 4to. Es iſt deutlich und methodiſch geſchrieben, ohne Zuziehung der Analyſis des Unendlichen und der trigonometriſchen Rechnung. In gedrängter Kürze iſt abgefaßt Traité des courbes algébriques par Dionis de Séjour et Godin, Paris 1756. Von dem erſtern Verfaſſer iſt noch ein beſonderes Werk: Traité des propriétés communes à toutes les courbes. Paris 1778.

Newton hatte am Ende ſeiner Abhandlung über die Linien der dritten Ordnung kurz angezeigt, wie Curven durch ſtetige Bewegung eines Punctes, vermittelſt der Durchſchnitte der Schenkel zweyer gegebenen, um ihre fixen Scheitelpuncte beweglichen Winkel beſchrieben werden können, indem die andern Schenkel eine gegebene Linie mit ihrem Durchſchnittspuncte durchlaufen. Maclaurin (geb. 1698. geſt. 1746.) bewies nicht allein Newtons Sätze, ſondern erweiterte noch das ganze Verfahren, und fügte mehrere merkwürdige Sätze hinzu, in der Schrift: Geometria organica, ſeu deſcriptio linearum curvarum univerſalis, Londini 1720. Man behauptet, daß er ſchon in ſeinem ſechszehnten Jahre viele von den in dieſem Buche enthaltenen Sätzen gefunden habe. Eine andere Art der Beſchreibung krummer Linien gab Braikenridge an in der Exercitatio geometrica de deſcriptione linearum curvarum, Londini 1733. Er gebraucht die Durchſchnitte dreyer, um fixe Puncte beweglichen Linien. Eine ähnliche Beſchreibung der Kegelſchnitte lehrte ſchon Joh. de Witt in den Elementis curvarum linearum, 1683, in van Schooten Ausgabe der Geometrie von Descartes.

Das Hauptwerk von Maclaurin, ſein Treatiſe of Fluxions, Edinburgh, 1742, 2 vol. 4to. 754 pag. enthält größtentheils geometriſche Unterſuchungen, ſowohl reine als angewandte. Wenn man des Verfaſſers zu umſtändliche Beweiſe der Infiniteſimalrechnung nicht gebraucht, und mit dieſer ſchon gut bekannt iſt, ſo wird man unter den neuern Schriften ſchwerlich eine finden, die zur Übung in der feinern Geometrie dienlicher wäre, als dieſes Werk, welches deſto mehr zu dieſem Zwecke zu empfehlen iſt, je weniger man in den Schriften der neueſten Mathematiker Gelegenheit findet, in der conſtruirenden Geometrie Fortſchritte zu thun. Boſſüt empfiehlt in ſeiner Geſchichte der Mathematik dieſes Werk gar ſehr, und führt an, daß mehrere franzöſiſche Mathematiker, die in der Folge berühmt geworden ſind, es als Anleitung zu der neuen Geometrie benutzt haben. Bey der Algebra,

die Maclaurin zum Verfaſſer hat, befindet ſich eine kurze, aber ſehr reichhaltige Abhandlung über die allgemeinen Eigenſchaften der geometriſchen Linien.

Das erſte Werk über die krummen Linien von doppelter Krümmung lieferte Clairaut. Recherches ſur les courbes à double courbure, à Paris 1731. 4to. 119 pag. Er verfaßte dieſe Schrift in einem Alter von ſechszehn Jahren, wie der Cenſor und der Secretär der Akademie bezeugen. Er druckt die Natur dieſer Curven durch Gleichungen zwiſchen drey Coordinaten aus. Euler hat in ſeiner Theorie des Mondes, dem zweyten Werke, die Bahn dieſes Trabanten auf ſolche Art beſtimmt. Die Bahnen der Weltkörper ſind alle transſcendente Curven von doppelter Krümmung, die nicht in ſich zurücklaufen, daher die Aſtronomie zugleich der ſchwerſte Theil der Geometrie iſt.

Die neue Analyſis gab in Verbindung mit der reinen Mechanik zu manchen ſchweren geometriſchen Aufgaben Anlaß. Das ganze Werk der Principien der Naturwiſſenſchaft von Newton iſt voll von geometriſchen Beſtimmungen mancherley Bewegungen: es enthält auch rein geometriſche Unterſuchungen, als aus der Lehre von den Kegelſchnitten, von Epicykloiden, Spiralen u. m. Hier kommt zuerſt die Bahn eines geworfenen Körpers in einem widerſtehenden Mittel vor, freilich nur noch mit der leichteſten Annahme des Widerſtandes; auch zuerſt die Aufgabe von der Figur eines Körpers, die den Widerſtand eines flüſſigen Mittels am geringſten macht, aber nur als Vorbereitung zu einer beſtimmtern Auflöſung.

Leibnitz legte, um die Vortrefflichkeit ſeiner neuen Rechnung des Unendlichen zu zeigen, die Aufgaben von der Iſochrona und der iſochrona paracentrica vor. Auf jener fällt ein ſchwerer Körper nach ſenkrechter relativer Bewegung gleichförmig; auf dieſer nähert er ſich einem gegebenen Puncte gleichförmig, und entfernt ſich ſo von demſelben.

In gleicher Abſicht legten die beiden Bernoulli Aufgaben von ſchwer zu findenden krummen Linien vor, und

geriethen dabey in einen Wettſtreit, der in Bitterkeit aus- artete. Jakob Bernoulli gab die Kettenlinie auf, zuerſt für eine gleichförmig ſchwere Linie, und dann für eine ungleichförmig ſchwere. Er fand die Gleichung für die elaſtiſche, durch ein Gewicht gebogene Linie, die zugleich diejenige iſt, nach welcher ein mit einem flüſſigen ſchweren Körper beſchwertes, undurchdringliches Tuch ſich krümmt (lintearia); auch fand er die Geſtalt eines vom Winde geſpannten Segels (velaria).

Joh. Bernoulli gab im J. 1696 die berühmte Aufgabe von der Linie des ſchnellſten Falles (brachyſtochrona) auf. Seiner Auflöſung fügte er eine andere Aufgabe bey, die krumme Linie zu finden, welche auf einer ſtetigen Folge von Cykloiden, die in denſelben lothrechten Ebenen, durch denſelben Anfangspunct einer gemeinſchaftlichen Grundlinie gezogen ſind, Bogen abſchneidet, die alle von dem Anfangspuncte an in einerley Zeit durchlaufen werden. Dieſe Linie nannte er die Synchrona, die Linie der übereinſtimmigen Fallzeiten. Eine für die praktiſche Anwendung brauchbare Curve ward von l'Hoſpital beſtimmt, diejenige, auf welcher ein Gewicht mit einer Zugbrücke, vermittelſt einer Kette, in jeder Lage derſelben im Gleichgewicht iſt. Joh. Bernoulli zeigte, daß ſie eine Epicykloide iſt.

Die Theorie der Brennlinien, wovon Huygens und Tſchirnhauſen zuerſt die Entſtehung bemerkt hatten, ward von den beiden Bernoulli ausführlich unterſucht. Man wird etwa noch die Form der Reſultate etwas bequemer einrichten können.

Die Rectification der Epicykloiden, welche durch einen Punct auf dem Umfange des rollenden Kreiſes beſchrieben werden, fand Newton. Die beiden Bernoulli wandten die neue Analyſis darauf an. De la Hire behandelte ſie nach der Methode der alten Geometrie, aber auf eine zu mühſame und verwickelte Art.

Jakob Bernoulli bemerkte, daß die logarithmiſche Spirale auf mancherley Art durch ſich ſelbſt erzeugt wird, daher er ſie ſpira mirabilis nannte.

Leibnitz und Joh. Bernoulli geriethen auf die Aufgaben von den rechtwinklichten Trajectorien, das iſt Curven, die eine ſtetige Folge von Curven gleicher Art, die nach einem gewiſſen Geſetze beſchrieben ſind, alle unter einem rechten Winkel ſchneidet. In dem Streite wegen der Erfindung der Differentialrechnung ward eine Aufgabe dieſer Art von Leibnitz und Bernoulli gebraucht, um die engliſchen Geometer ihre Kräfte daran verſuchen zu laſſen. Nicolaus Bernoulli legte im J. 1720 eine Aufgabe verwandter Art vor. Zwey parallele Axen ſind gegeben; in dem Raume zwiſchen ihnen über jeder derſelben eine Curve zu beſchreiben, ſo daß wenn eine derſelben, oder auch beide auf ihrer Axe mit paralleler Bewegung fortgeſchoben werden, ſie ſich immer unter demſelben Winkel ſchneiden. Dieſes iſt die Aufgabe von den Trajectoriis reciprocis. Euler hat ſich viel mit den Trajectorien beiderley Art beſchäftigt.

Das berühmteſte Problem war das iſoperimetriſche, welches Jakob Bernoulli den Geometern ſeiner Zeit, und namentlich ſeinem Bruder, vorlegte. Er war darauf durch die Aufgabe von der Curve der kürzeſten Fallzeit geleitet, die mit jener zu einer Claſſe gehört. Er trug ſie zuerſt (1697) folgenderſtalt vor; Unter allen Curven von gleicher Länge, über derſelben Grundlinie, diejenige zu finden, welche zwar nicht ſelbſt mit dieſer den möglich größten Raum einſchließt, durch welche aber dieſes für eine andere Curve über derſelben Grundlinie erhalten wird, an welcher die Ordinaten zu den Ordinaten oder Bogen jener Curve irgend ein vielfaches oder umgekehrt vielfaches Verhältniß haben. Allgemeiner trug er ſie in einer akademiſchen Diſſertation 1701. vor. Die Unterſuchung dieſer Frage beförderte den Bruch zwiſchen den beiden Brüdern. Joh. Bernoulli hatte ſich wirklich bey der Auflöſung geirrt, da er die Methode, welche er bey der Frage von der Curve der kürzeſten Fallzeit gebraucht hatte, auch hier ohne die nöthige Erweiterung anwenden wollte. Jener Fall war einfacher, da keine Bedingung wegen der Beſchaffenheit der Curve gemacht wird, hier aber die Curve, an

welcher eine Function ihrer Ordinaten ein Größtes iſt, mit den andern, an welchen dieſe Function kleinere Werthe erhält, gleiche Länge haben ſoll. Da Jakob Bernoulli ſeinem Bruder anzeigte, daß ſeine Methode mangelhaft ſey, geſtand dieſer zwar ein, daß er ſich in einem Stücke übereilt hätte, und gab eine andere Aufiöſuug, die aber in der That noch von eben der Seite, wie die erſte, unvollkommen war. Auf die wiederholte Erinnerung ſeines Bruders blieb er bey ſeiner Behauptung nicht gefehlt zu haben, und bey dem ſtolzen Ton, den er gegen jenen ſeit einiger Zeit angenommen hatte. Als aber dieſer im J. 1701 ſeine Methode bekannt machte, ſchwieg er gänzlich von der Unterſuchung. Erſt im J. 1718, als er eine neue Auflöſung bekannt machte, geſtand er ſein Verſehen ein.

Euler behandelte in der Folge die Aufgabe auf eine viel allgemeinere Art, ſo daß anſtatt der gleichen Länge der Bogen auch irgend eine andere gemeinſchaftliche Eigenſchaft der Curven geſetzt werden mag. Methodus inveniendi lineas curvas maxim minimive proprietate gaudentes. Lauſannae 1744. 4. Nach Euler erweiterte la Grange die Aufgabe noch mehr, ſo daß ſie nicht auf geometriſche Größen eingeſchränkt blieb, dabey ſehr ſchwere Unterſuchungen befaßte, und auch in der Methode gewann. Seit dieſer Zeit heißt dieſe Rechnung die Variations-Rechnung.

Cotes (geſt. 1716) wandte die trigonometriſche und logarithmiſche Rechnung auf die Integrationen an, da er zeigte, wie die Fluenten oder Integrale mittelſt der in den trigonometriſchen oder logarithmiſchen Tafeln berechneten Größen gefunden werden können, ſo daß Integrale, die von der Quadratur des Kreiſes oder der Hyperbel (den Logarithmen) abhangen, kaum mehr für transſcendente Größen zu halten ſind. Cotes entdeckte eine merkwürdige Eigenſchaft des Kreiſes, betreffend die Linien, welche aus einem Punkte innerhalb oder außerhalb deſſelben an die Endpuncte gleich großer Bogen gezogen werden. Moivre erweiterte den Coteſiſchen Lehrſatz von einer zweytheiligen Function auf eine dreytheilige. Der Satz giebt der analytiſchen Entwickelung der Functionen $x^n \pm a^n$, und

$r^{2n} - 2a^n r^n \cos\alpha + a^{2n}$ eine ſchöne Erläuterung, ſ. Coteſiſcher Lehrſatz.

Noch manche einzelne neue geometriſche Sätze und Aufgaben könnten hier angeführt werden. Dergleichen iſt die von Jakob Bernoulli vorgelegte, zwiſchen zwey gegebenen Puncten auf einem Konoid oder Sphäroid die kürzeſte Linie zu ziehen. Joh. Bernoulli fand, daß auf einer Parabel zwey Bogen in einem gegebenen Verhältniſſe ſich beſtimmen laſſen, daher ſich auch zwey Bogen finden laſſen, deren Summe oder Unterſchied einer geraden Linie gleich iſt, nur nicht mit einem gemeinſchaftlichen Endpuncte. Der Marcheſe Fagnano hat nachher eben dieſes an der Ellipſe und Hyperbel bewerkſtelligt. Joh. Bernoulli gab eine allgemeine Methode an, auf einer ſphäriſchen Oberfläche rectificable Curven zu ziehen. Nicole beſtimmte auch die Fälle, da ſphäriſche Epicykloiden algebraiſch und rectificabel ſind.

Die Darſtellung oder Symbolization eines Kreisbogens durch unmögliche Logarithmen iſt von Joh. Bernoulli zuerſt angegeben, der daraus eine allgemeine Formel für die Tangente des vielfachen Bogens durch diejenige des einfachen fand.

Die formulare Trigonometrie, welche ſowohl bey geometriſchen Unterſuchungen als vorzüglich in der Aſtronomie ſo große Dienſte leiſtet, hat ihre geſchmeidige Einrichtung hauptſächlich durch Euler erhalten. Die Geſtalt, welche die trigonometriſchen und goniometriſchen Sätze bey den ältern Mathematikern hatten, waren zur Verbindung der Rechnung mit der Geometrie nicht bequem. Friedr. Chriſt. Mayer, Mitglied der Petersburger Akademie, ſtellte in den Commentarien derſelben im zweyten Bande für 1727 theils für die Zuſammenſetzungen der Winkel mittelſt ihrer Sinus, Coſinus und Tangenten, theils für geradlinichte und ſphäriſche Dreyecke Formeln auf, an welchen nur das noch unbequem iſt, daß die trigonometriſchen Linien durch einzelne Buchſtaben bezeichnet werden, welches theils ihre Combinationen erſchwert, theils den Gebrauch dieſer Buchſtaben für andere Größen hindert.

Die cyklometriſchen Reihen wurden von Euler auf eine ungemein mannigfaltige Art zerlegt, verbunden, und mit andern Reihen verglichen, ſowohl in ſeiner Einleitung zur Analyſis des Unendlichen als in dem zweyten Theile der Differentialrechnung. Um alle dieſe mancherley Formen gehörig zu faſſen, muß man die Capitel, die davon handeln, beſonders und aufmerkſam durchgehen.

Zuletzt iſt noch die für die Anwendung bey Gewölben brauchbare Lehre von den Durchſchnitten der Oberflächen der Körper anzuführen. Die franzöſiſchen Geometer haben ſich vorzüglich mit dieſer Unterſuchung beſchäftigt. Die praktiſchen Schriftſteller über die Behauung der Steine (coupe des pierres), als Derand, Jouſſe, Frezier waren dazu genöthigt. Der letztere hat darüber ein Werk in drey ſtarken Quartbänden geliefert, worin alles durch Hülfe der gewöhnlichen Geometrie gefunden wird, allein auf eine ſehr mühſame Art. Gegenwärtig iſt man in Frankreich eifrig damit beſchäftigt, die Theorie von den Durchſchnitten und Projectionen der Oberflächen der Körper, den doppelt gekrümmten Linien, und geradlinicht = krummen Flächen zu erweitern. Man nennt ſie Géométrie deſcriptive. Monge hat dieſen neuen Anbau der Geometrie ſehr glücklich angefangen. Er hat einige neue merkwürdige Lehrſätze gefunden, und verſchiedene wichtige ſchwere Aufgaben aufgelöſet. Lacroix hat darüber ein elementariſches Werk geliefert, welches wegen der Deutlichkeit und geſchickten Auseinanderſetzungen gerühmt wird. Eſſais de Géométrie ſur les plans et les ſurfaces courbes: (Elémens de Géométrie deſcriptive). Seconde édition à Paris An X. 1802. 8.

Geometriſch, was zur Geometrie gehört, oder darauf irgend eine Beziehung hat.

Geometriſche Auflöſung iſt diejenige, wobey man bloß die geometriſchen Größen unmittelbar gebraucht, alſo das geſuchte, uud was dazu vorher gefunden werden muß, bloß durch Durchſchnitte und Begränzungen von Li=

nien und Flächen beſtimmt. Sie iſt der arithmetiſchen und analytiſchen entgegengeſetzt.

Geometriſcher Beweis verhält ſich auf ähnliche Art.

Geometriſche Conſtruction der Gleichungen iſt die Auflöſung derſelben vermittelſt der Durchſchnitte von Linien, woraus die Wurzeln einer Gleichung ſich unmittelbar alle zuſammen ergeben, ſo viele mögliche als ſie hat, ſ. Anwendung der Geometrie auf die Algebra.

Geometriſche Fläche und Curve ſind ſolche, worin alle Puncte nach einem gemeinſchaftlichen Geſetze beſtimmt werden, im Gegenſatz gegen ſolche, wobey kein Geſetz der Bildung ſich findet.

Geometriſche Methode der Alten, ſ. Geometrie.

Geometriſches Mittel iſt das mittlere Glied in einer ſtetigen Proportion von drey Größen, ſ. Proportion.

Geometriſcher Ort iſt eine Linie oder Fläche, deren Puncte alle zur Auflöſung einer unbeſtimmten Aufgabe dienen, ſ. Ort.

Geometriſche Progreſſion oder Reihe, ſ. den folgenden Artikel.

Geometriſche Proportion und Proportionalzahl, ſ. an ihrem Orte.

Geometriſches Quadrat ein Inſtrument zur Meſſung der Höhen, welches gegenwärtig nicht mehr üblich iſt.

Geometriſcher Riß (Entwerfung) iſt eine nach geometriſchen Regeln verfertigte Abbildung eines Gegenſtandes, z. B. eines Hauſes, eines Feldes, im Gegenſatz gegen die nach dem Augenmaße durch freye, mahleriſche Zeichnung gemachte. S. Projection und Perſpectiv.

Geometriſcher Schritt wird, ohne Grund, eine Länge von fünf Fußen genannt.

Geometriſches Verhältniß, ſ. Proportion.

Geometriſche Reihe iſt eine Folge von Größen, deren jede zu der nächſtfolgenden daſſelbe geometriſche Verhältniß hat, wie die Reihe,

$$\frac{1}{8} : \frac{1}{4} : \frac{1}{2} : 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : \text{etc.}$$

oder allgemein,

$$\frac{a^4}{b^3} : \frac{a^3}{b^2} : \frac{a^2}{b} : a : b : \frac{b^2}{a} : \frac{b^3}{a^2} : \frac{b^4}{a^3} : \text{etc.}$$

1. Die Bezeichnung des Geſetzes der Reihe geſchieht am bequemſten und deutlichſten, wie es hier geſchehen iſt, durch das Zeichen des geometriſchen Verhältniſſes. Man ſetzt auch der Reihe das Zeichen $\div\!\!\cdot$ vor, und zwiſchen jedes Paar Glieder einen Punct, wie

$$\div\!\!\cdot\ 1.\ 3.\ 9.\ 27.\ 81.\ 243.\ \text{etc.}$$

2. Eine geometriſche Reihe geht von irgend einem Gliede nach beiden Seiten hin ohne Ende fort, auf der einen Seite unbegränzt zunehmend, auf der andern eben ſo abnehmend. Ein Stück einer Reihe iſt eine ſteigende (wachſende) Reihe, wenn die folgenden Glieder wachſen, eine fallende (abnehmende), wenn ſie abnehmen.

3. Der Exponent des Verhältniſſes zweyer nächſten Glieder ſey $= e$, das Anfangsglied eines Stücks der Reihe $= a$, ſo iſt von dieſem an genommen, die Reihe,

$$a : ea : e^2a : e^3a \ldots e^{n-1}a : e^n a : \text{etc.}$$

Dieſes Stück hat $n + 1$ Glieder. Das nte Glied ſey $= u$, ſo iſt

$$u = e^{n-1}a.$$

4. Die Summe von n Gliedern ſey $= S$. Dieſe zu finden, multiplicire man die Glieder der Reihe,

$$a : ea : e^2a \ldots e^{n-2}a : e^{n-1}a,$$

durch e, ſo wird ſie

$$ea : e^2a \ldots e^n a.$$

Es iſt alſo

$$eS = S + e^n a - a,$$

folglich in dem Falle, da $a > 1$,

$$S = \frac{e^n a - a}{e - 1} = \frac{eu - a}{e - 1};$$

und, wenn $e < 1$ iſt,

$$S = \frac{a - eu}{1 - e}.$$

Die Formel für den erſten Fall dient auch für den zweyten, indem man von den negativen Werthen des Zählers und Nenners das entgegengeſetzte nimmt.

5. Die Reihe ſey eine fallende, ſo iſt die Gränze, welcher ihre Summe ſich immer mehr nähert, je mehr Glieder genommen werden, die Summe der ganzen, ohne Ende fortgeſetzten Reihe. Die Gränze der Summe zu erhalten, muß das letzte Glied $= 0$ geſetzt werden, und ſo iſt die Summe der vollſtändigen Reihe,

$$a : ea : e^2a : e^3a : \text{etc.} = \frac{a}{1 - e}.$$

Z. B. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \text{etc.} = 2$;
die Summe $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \text{etc.} = \frac{3}{2}$.

6. Wie bey der arithmetiſchen Reihe ſind hier fünf verſchiedene Größen vorhanden, von welchen je zwey durch die übrigen drey beſtimmt werden. Dieſes giebt zehn Fälle für die gegebenen Größen, alſo zehn Aufgaben, deren jede wieder zwey in ſich enthält, nachdem die eine oder die andere der unbekannten Größen gefunden werden ſoll. Die vier, a, u, e, S, werden, mit Ausnahme zweyer Fälle, durch arithmetiſche Operationen gefunden, die Erhebung auf Potenzen und Ausziehung jeder Wurzel als ausführbar angenommen. Aber die Anzahl n der Glieder zu finden, erfordert aus Potenz und Wurzel den Grad der Potenz zu finden, welches ſo viel iſt, als in einem logarithmiſchen Syſtem aus der Zahl ihren Logarithmen angeben. Daher muß man, wenn n verlangt wird, die Logarithmen zu Hülfe nehmen.

7. Es werde aus a, e, u die Anzahl der Glieder n geſucht, ſo iſt $\log u = \log e^{n-1} + \log a = (n-1)\,le + la$ und $n - 1 = \frac{lu - la}{le}$, alſo

$$n = \frac{lu - la + le}{le}.$$

8. Die beiden in (6.) gedachten Ausnahmen finden ſich, wenn e geſucht wird, aus a, n, S, oder aus u, n, S. Denn da $S(e-1) = e^n a - a$, ſo iſt, wenn e geſucht wird, die Gleichung,

$$e^n - \frac{S}{a} e + \frac{S}{a} - 1 = 0,$$

aufzulöſen. Sind u, n, S gegeben, und wird e geſucht, ſo iſt es derſelbe Fall, indem u ſtatt a, und $\frac{1}{e}$ ſtatt e kommt. Oder man ſetze in der Gleichung, $S(e-1) = eu - a$, für a ſeinen Werth, $\frac{u}{e^{n-1}}$, und multiplicire beide Theile der Gleichung mit e^{n-1}, ſo wird erhalten

$$(S-u)e^n - Se^{n-1} + u = 0.$$

9. Wenn $e = 1$, ſo iſt die Summe von n Gliedern $= na$. In dieſem Falle iſt der Zähler, ſo wie der Nenner des Bruches für den Werth von S Null: daher dieſer Werth durch die Formel ſelbſt unbeſtimmt bleibt. Den Werth des Bruches zu beſtimmen verfahre man ſo, wie in dem Artikel, Function (50) gewieſen iſt. Man ſetze nämlich den Exponenten $e = 1 + \varepsilon$, ſo iſt $e^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n.n-1.}{1.2}\varepsilon^2 +$ etc. (binomiſcher Lehrſatz 1.) und $\frac{e^n - 1}{e - 1} = \frac{1}{\varepsilon}(n\varepsilon + \frac{n.n-1.}{1.2}\varepsilon^2 + \text{etc.}) = n + \frac{n.n-1.}{1.2}\varepsilon + \text{etc.}$

Setzt man e = 1, alſo ε = 0, ſo iſt der Bruch = n, alſo S = na.

10. Die geometriſche Reihe ſey

$$a : b : \frac{b^2}{a} : \frac{b^3}{a^2} : \ldots \ldots \frac{b^{n+1}}{a^n},$$

welche n + 2 Glieder enthält, ſo daß zwiſchen den beiden äußerſten n Glieder vorhanden ſind. Das erſte dieſer iſt = b oder $a \sqrt[n+1]{\frac{b^{n+1}}{a^n . a}}$. Setzt man nun das letzte Glied = u, ſo iſt das erſte der n eingeſchalteten Glieder = $a \sqrt[n+1]{\frac{u}{a}}$.

Z. B. a = 2, u = 162, n = 3, ſo iſt b = $2 \sqrt[4]{81}$ = 2 . 3. und die Reihe iſt 2 : 3 : 6 : 18 : 54 : 162.

11. In der Reihe,

$$a : ea : e^2 a : e^3 a \ldots e^n a : \text{etc.}$$

werden zwiſchen je zwey nächſten Glieder m — 1 Glieder in ſteriger Progreſſion eingeſchaltet, ſo erhält die Reihe ſtatt je eines Gliedes m Glieder. Sie iſt nunmehr folgende:

$$a : e^{\frac{1}{m}} a : e^{\frac{2}{m}} a : \ldots e^{\frac{m-1}{m}} a : e^{\frac{m}{m}} a :$$

$$e^{\frac{m+1}{m}} . a : \ldots e^{\frac{2m-1}{m}} . a : e^{\frac{2m}{m}} . a :$$

$$e^{\frac{2m+1}{m}} . a : \ldots e^{\frac{3m-1}{m}} . a : e^{\frac{3m}{m}} . a : \text{etc.}$$

Alſo iſt $e^{\frac{r}{m}} . a$ in der interpolirten Reihe das rte Glied nach dem Anfangsgliede a. Iſt $e^n a$ das nächſt vorhergehende Glied der urſprünglichen Reihe, ſo iſt deſſen Stelle in der interpolirten Reihe nach a die

mnte und $e^{\frac{r}{m}} \cdot a$ iſt das $(r - mn)$ te nach dieſem Gliede.

12. Jede gegebene Zahl findet in einer geometriſchen Reihe entweder unmittelbar ihren Platz, oder in einer interpolirten, oder zwiſchen zwey Gliedern einer interpolirten, die man ihr ſo nahe bringen kann, daß der Unterſchied kleiner als jede angebbare Größe iſt. Nimmt man die Anzahl der zwiſchen je zwey Gliedern eingeſchalteten Glieder unendlich groß, ſo iſt jede Zahl, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale, in einer geometriſchen Reihe anzutreffen. Die Fortſchreitung der Glieder iſt nun eine ſtetige, und jede Reihe mit einem endlichen Exponenten iſt eine aus der ſtetigen Reihe herausgehobene, indem zwiſchen jedem Paare jener Reihe eine gleich große Anzahl Glieder aus dieſer ausgelaſſen ſind. So wird man begreifen, wie in einem logarithmiſchen Syſtem jede Zahl ihren Logarithmen, den Exponenten von e, und jeder Logarithme ſeine zugehörige Zahl habe. In dem Artikel, Logarithmotechnie, wird gewieſen, wie für jede Zahl $e^{\frac{r}{m}}a$ der Exponent $\frac{r}{m}$ bequem gefunden werden könne.

13. Exempel. I. die Zinſen eines Capitals werden jährlich zu demſelben geſchlagen, es iſt die Frage, wie groß es mit dieſen nach n Jahren wird?

Das Capital, deſſen Zinſe $= 1$ iſt, ſey $= r$, (z B. 20 bey 5 P. C. oder 25 bey 4 P. C.), ſo iſt nach Verlauf des erſten Jahrs die Summe von Capital und Zinſen $= \frac{r+1}{r}a$, nach 2 Jahren $= \left(\frac{r+1}{r}\right)^2 a$; alſo nach 3 Jahren $= \left(\frac{r+1}{r}\right)^3 a$, alſo nach n Jahren $= \left(\frac{r+1}{r}\right)^n a$.

Dieſe Summen machen eine geometriſche Progreſſion aus, deren Exponent iſt $\frac{r+1}{r}$; das iſt, $\frac{21}{20}$ bey 5 P. C; $\frac{26}{25}$ bey 4 P. C.

14. II. Es legt jemand in eine Erſparungscaſſe jedes Jahr die Summe a, wie hoch wachſen die Einlagen in n Jahren an?

Es ſey der Kürze wegen $\frac{r+1}{r} = q$, ſo iſt ſeine Competenz die Summe von $q^n a + q^{n-1} a \ldots + q^2 a + q a$, wenn die Einlage mit Anfang jedes Jahrs geſchieht, und die Competenz nach Verlauf von n Jahren berechnet wird. Dieſe Summe iſt $= \frac{q^n - 1}{q - 1} q a =$ $\left(\left(\frac{r+1}{r} \right)^n - 1 \right) (r + 1) a.$

Z. B. Die Einlage ſey $= 1$; der Zinsfuß 4 P. C. alſo $r = 25$. Die Zahl $n = 10$, ſo iſt $\left(\frac{r+1}{r} \right)^{10} =$ 1,48024, und die Competenz nach 10 Jahren iſt 12,48624. Nach 20 Jahren iſt ſie 30,96912.

15. III. Es verleihet jemand ein Capital a mit der Bedingung, daß der Empfänger ihm jedes Jahr mit Einſchluß der ſchuldigen Zinſen die Summe b zahle, ſo daß das Capital allmählig abgetragen werde, wie viel iſt nach n Jahren von dem Capital noch rückſtändig?

Man kann beide als Creditoren und Debitoren betrachten. Der eine hat nach n Jahren das Capital $\left(\frac{r+1}{r} \right)^n a$ zu fordern. Der andere hat ſeit $n - 1$ Jahren mit Anfang jedes Jahrs b gezahlt, und dazu am Ende des nten Jahrs eben ſo viel. Jene Zahlungen ſind nach n Jahren werth $\left[\left(\frac{r+1}{r} \right)^{n-1} - 1 \right]$

$(r+1)b$, oder $\left(\frac{r+1}{r}\right)^n rb - (r+1)b$. Dazu die letzte Zahlung ſelbſt genommen, iſt ſeine Forderung werth $\left(\left(\frac{r+1}{r}\right)^n - 1\right) rb$. Er iſt alſo, wenn dieſe Summe weniger als jene beträgt, noch ſchuldig

$$\left(\frac{r+1}{r}\right)^n (a - rb) + rb.$$

$$\text{oder } rb - \left(\frac{r+1}{r}\right)^n (rb - a).$$

16. Sollte man wegen der zuſammengeſetzten Zinſen, wenn ſie gleich auf beiden Seiten angerechnet werden, Schwierigkeit finden, ſo ſtelle man die Berechnung folgendergeſtalt an. Der Verleiher heiße A, der Empfänger B. Der erſtere hat nach Verlauf des erſten Jahrs zu fordern $\frac{r+1}{r}$ a oder qa, erhält die Summe b, hat alſo nun zu fordern $qa - b$. Aus dieſer Forderung wird am Ende des zweyten Jahrs $q^2a - qb$, wovon durch die Bezahlung von b bleibt $q^2a - qb - b$. Am Ende des dritten Jahrs hat A zu fordern $q^3a - q^2b - qb$, und da b abbezahlt wird, bleibt $q^3a - q^2b - qb - b$. So wird mit jedem Jahre der Reſt am Ende des vorhergehenden Jahrs mit q multiplicirt, und dann b abgezogen, dadurch wird nach n Jahren der Reſt =

$$q^n a - q^{n-1} b - q^{n-2} b \ldots - qb - b.$$

Der ſubtractive Theil iſt die geometriſche Reihe, $1 + q + q^2 \ldots q^{n-1}$ in b multiplicirt, das iſt $\frac{q^n - 1}{q - 1} b$. Alſo iſt der Reſt, den B noch ſchuldig iſt,

$$q^n a - \frac{q^n - 1}{q - 1} b, \text{ oder}$$

$$\left(\frac{r+1}{r}\right)^n(a-rb)+rb,$$

wie vorher gefunden iſt.

Wenn b die Intereſſe von dem Capital iſt, ſo iſt rb = a, alſo bleibt die Schuld des B immer rb oder a, da er nicht mehr bezahlt als was er ſchuldig iſt. Soll die Schuld vermindert werden, ſo muß b größer ſeyn als die Intereſſe a, alſo rb größer als a. Die Formel für den Reſt iſt daher

$$rb-\left(\frac{r+1}{r}\right)^n(rb-a).$$

17. Wenn nach n Jahren die Schuld ganz abgetragen ſeyn ſoll, ſo iſt

$$rb=\left(\frac{r+1}{r}\right)^n(rb-a),$$

$$\text{und } \frac{a}{b}=r-\left(\frac{r}{r+1}\right)^u r.$$

Z. B. Wenn $r=25$, und $n=20$, ſo iſt $1-\left(\frac{r}{r+1}\right)^n=0{,}54362$, und $\frac{a}{b}=13{,}5905$, oder die Kaufſumme, (der baare Werth,) einer Leibrente auf 20 Jahr iſt $13\frac{59}{100}$ mahl die Rente. Bey 5 P. C. oder $r=20$ iſt die Kaufſumme $12\frac{46}{100}$ mahl die Rente. Bey 3 P. C. iſt der baare Werth $14\frac{88}{100}$ mahl die Rente.

Tabellen, nach dieſen Formeln berechnet, ſind zu finden in Florencourts Abhandlungen aus der juriſtiſchen und politiſchen Rechenkunſt, am vollſtändigſten in Tetens Berechnung der Leibrenten.

18. Exempel. Von einem Weinfaſſe, das a Maaß enthält, werden jeden Tag b Maaß weggenommen, und eben ſo viele wieder aufgefüllt, wie viel Maaß ſind nach n Tagen von den erſten a Maaß übrig? und wie viel von m Maaß, die in m Tagen aufgefüllt ſind, am Ende dieſer m Tage?

Wenn an irgend einem Tage der Reſt x bleibt, ſo wird von demſelben $\frac{bx}{a}$ weggenommen, und es iſt alſo für den nächſten Tag der Reſt $\frac{(a-b)x}{a}$. Eben ſo iſt den folgenden Tag der Reſt $\frac{(a-b)^2 x}{a^2}$, u. ſ. f. Da am erſten Tage das Ganze a war, ſo iſt nach n Tagen der Reſt $= \left(\frac{a-b}{a}\right)^n a$.

Von den n b Maaß, die in n Tagen aufgefüllt ſind, ſind noch übrig

$$\left(1-\left(\frac{a-b}{a}\right)^n\right) a.$$

Alſo ſind überhaupt von m Maaß, die in m Tagen aufgegoſſen worden ſind, nach den m Tagen übrig

$$\left(1-\left(\frac{a-b}{a}\right)^m\right) a.$$

Dieſes läßt ſich auch folgendergeſtalt finden. Von den b Maaß, die an dem erſten dieſer m Tage aufgefüllt ſind, bleiben $\left(\frac{a-b}{a}\right)^{m-1}$ b übrig; von den b Maaß des zweyten Tages $\left(\frac{a-b}{a}\right)^{m-2}$ b; u. ſ. w. Die b Maaß, die an dem mten Tage aufgefüllt werden, ſind an demſelben unvermindert vorhanden. Man hat alſo die geometriſche Progreſſion

$$\left(\left(\frac{a-b}{a}\right)^{m-1} + \left(\frac{a-b}{a}\right)^{m-2} \ldots + \frac{a-b}{a} + 1\right) b$$

zu ſummiren. Die Summe iſt $\left(1-\left(\frac{a-b}{a}\right)^m\right) a$.

19. Von dem Erfinder des Schachſpiels wird erzählt, daß derſelbe ſich von dem Fürſten, dem er es überreicht hatte, als Belohnung auf das erſte Feld ein Gerſten- oder Weizenkorn, auf das zweyte zwey, auf das dritte vier, u. ſ. f. in dem Verhältniſſe 1 : 2 ausgebeten habe. So gering als der Fürſt zuerſt dieſe Belohnung gehalten, ſo ſehr ſey er erſtaunt, als die Berechnung die ungeheure Menge Körner zeigte. Es iſt $1 + 2 + 4 \dots + u = \frac{2u - 1}{2 - 1} = 2u - 1$. Hier iſt u das 64ſte Glied der Reihe =

9 223372 036854 775808,

und die Summe von 1 bis u =

18 446744 073709 551615

Dieſes iſt mehr als 18 Ernten geben würden, wenn die Erdfläche ganz und gar Ackerland wäre. In der franzöſiſchen Encyklopädie wird berechnet, daß zur Einſcheurung dieſer Menge 91522 Scheuren erfordert werden, jede ein Quadrat, eine Lieue oder 14400 Fuß im Umfange, worin das Korn 20 Fuß hoch aufgehäuft ſey. Der Verfaſſer rechnet, daß höchſtens 450 Körner Weizen auf einen Cubikzoll gehen.

Dieſes Exempel dient einen Begriff von der ſchnellen Zunahme einer geometriſchen Reihe, ſelbſt bey einem kleinen Exponenten, zu geben.

Vergleichung zweyer geometriſchen Reihen.

20. Man nehme zwey geometriſche Reihen,

$$a : ea : e^2a \dots e^m a \dots e^x a \dots$$

$$A : EA : E^2A \dots E^n A \dots E^y A \dots$$

und ſetze, daß $e^m a = E^n A$, auch daß $e^x a = E^y A$ ſey. Es iſt die Frage, wie die Relation der Exponenten m, n, x, y, und der Exponenten e, E beſchaffen ſey. Zu dem Ende müſſen die Anfangsglieder, a, A weggeſchafft werden. Dieſes geſchieht ſogleich durch die Divi-

ſion der Theile jener Gleichungen eines durch den andern, welches giebt

$$e^{x-m} = E^{y-n}.$$

Man betrachte E als ein Glied in der geometriſchen Reihe, $1 : e : e^2 : e^3 :$ etc. und ſetze $E = e^{\alpha : \beta}$, zufolge (12.). Hieraus iſt $E^{\beta} = e^{\alpha}$. Man erhebe die Theile der Gleichung zwiſchen e und E auf die Potenz mit dem Exponenten β, ſo iſt

$$e^{\beta(x-m)} = E^{\beta(y-n)}.$$

Nun iſt $E^{\beta(y-n)} = (E^{\beta})^{y-n} = (e^{\alpha})^{y-n} = e^{\alpha(y-n)}$ alſo iſt

$$e^{\beta(x-m)} = e^{\alpha(y-n)},$$

folglich $\beta(x-m) = \alpha(y-n)$,

und $x-m : y-n = \alpha : \beta$.

Oder, die Unterſchiede der Stellenzahlen derſelben zweyer Glieder in beiden Reihen haben ein gegebenes Verhältniß.

21. Man nehme noch in jeder der beiden Reihen ein Glied von derſelben Größe, deſſen Stelle in der erſten Reihe p, in der zweyten q ſey, oder es ſey $e^p a = E^q A$, ſo iſt

$$p-m : q-n = \alpha : \beta.$$

Alſo iſt

$$x-m : y-n = p-m : q-n.$$

Daraus

$$x = \frac{p-m}{q-n}(y-n) + m,$$

$$y = \frac{q-n}{p-m}(x-m) + n.$$

22. Wenn $A = a$ iſt, ſo laſſe man die beiden ſich gleichen Glieder, $e^m a$ und $E^n A$, die Anfangsglieder der beiden Reihen ſeyn. Dieſes giebt $m = 0$; $n = 0$, und es iſt $x : y = p : q$, das iſt, die Stellenzahlen derſelben

zweyer Glieder in beyden Reihen haben ein gegebenes Verhältniß.

Hieraus erſieht man, wie aus der Stelle einer Zahl in einer geometriſchen Reihe die Stelle derſelben Zahl in jeder andern geometriſchen Reihe leicht gefunden wird, das iſt, wie aus den Logarithmen in einem Syſtem die Logarithmen derſelben Zahlen in jedem andern berechnet werden.

23. Exempel. Es ſey $a = 1$; $e = 10$, ſo iſt x der Briggiſche oder gemeine Logarithme von e^x. In dem Neperiſchen Syſtem iſt die Reihe eine fallende, und das Anfangsglied $A = 1000\,0000$. Das nächſte nach demſelben in der Tafel (primum proportionale nennt Neper es) iſt 999 9999, wobey in der Tafel zwar als Logarithme 1 ſteht, allein es iſt darum nicht $E = \frac{999\,9999}{1000\,0000}$. Denn Neper ſagt ausdrücklich in der Schrift, mirifici Logar. canonis conſtructio, §. 30, daß der Logarithme (numerus artificialis) von 999 9999 zwiſchen 1.0000001 und 1.0000000 falle. Wir haben E zu wiſſen nicht nöthig, da wir nur irgend ein Paar Logarithmen aus dem Neperiſchen Syſtem als gegebene Größen in die Rechnung einführen können.

Man bezeichne einen Briggiſchen Logarithmen durch lB; einen Neperiſchen durch lN. Nun iſt $lB.\,10^7 = 7$, und $lN.\,10^7 = 0$, alſo $m = 7$; $n = 0$. Die Neperiſchen Logarithmen ſind alle negative Größen. Bezeichnen nun q und y bloß die Quantität, ſo iſt dieſen Symbolen das Vorzeichen — zu geben, ſo daß $-y = \frac{-q}{p-7}(x-7)$ iſt. Dieſe Formel verwandelt ſich in folgende,

$$y = \frac{q}{7-p}(7-x).$$

Da Neper den Sinus totus 10 Millionen ſetzt, ſo haben wir zu den tabulariſchen Logarithmen, ſo fern ſie ſich auf den Sinus totus als Einheit beziehen, in der Characteriſtik 7 zu addiren. Man nehme

$p = \text{logtab. sin } 30^\circ + 7 = 6,6989700$

$q = \text{lN. sin } 30^\circ = 6931469,$

ſo iſt $\frac{q}{7 - p} = \frac{6931469}{0,3010300} = 23025840$, und

$\text{lN. sin } \varphi = 23025840\ (7 - \text{lB. sin } \varphi)$.

Man ſuche nun lN. sin 60°. Es iſt lB. sin 60°, oder $x = 6,9375306$, alſo

$7 - \text{lB. sin } 60^\circ = 0,0624694$, und

lN. sin 60° = 1438411, wie bey Neper, bis auf die letzte Ziffer, die daſelbſt 0 iſt.

Gerade Zahl iſt eine ſolche ganze, die ſich durch Zwey ohne Reſt theilen läßt. Eine doppeltgerade oder geradgerade (numerus pariter par) iſt durch Vier ohne Reſt theilbar; eine ungeradgerade (impariter par) läßt durch 4 getheilt den Reſt 2.

Gerade Linie, ſ. Linie.

Geradlinichte Figur iſt eine ſolche, die ganz von geraden Linien eingeſchloſſen iſt.

Geſchoben wird bisweilen von Parallelogrammen mit ſchiefen Winkeln gebraucht, ſ. Rhombus und Rhomboides.

Geſellſchaftsrechnung iſt die Eintheilung einer Zahl nach gegebenen Verhältniſſen. Weil dieſe Rechnung in denen Fällen gebraucht wird, wo Gewinn oder Verluſt, Abgabe oder Einnahme unter mehrere Perſonen zu vertheilen iſt, ſo hat ſie daher von den Rechenmeiſtern die Benennung erhalten.

Es ſind von dieſer Rechnung zwey Fälle. In dem erſten machen die Verhältnißzahlen, nach welchen ein gegebenes Ganze getheilt werden ſoll, zuſammen genommen, ein ähnliches Ganze wie jenes aus; in dem zweyten aber nicht.

Ein Beyſpiel des erſten Falles iſt folgendes. Es ſollen 1000 Rthl auf drey Perſonen A, B, C, vertheilt werden, ſo daß die Theile von A und B ſich wie 2 : 3: und die Theile von B und C ſich wie 3 : 5 verhalten. Da hier die Verhältnißzahl für B, nämlich 3 ſowohl für das eine als das andere Verhältniß dient, ſo iſt das Ganze, 2 + 3 + 5, oder 10, ſchon auf die verlangte Art eingetheilt. Man hat alſo nur die Proportion zu machen: das Normalganze, 10, verhält ſich zu dem einzutheilenden Ganzen, 1000, wie einer der Theile jenes (z. B. 2.) zu dem gleichnamigen Theile dieſes, welcher alſo 200 Rthl. beträgt.

Allgemein ſeyn die Verhältniſſe, nach welchen ein Normalganzes eingetheilt iſt, a : b : c : d : etc. ſo daß der erſte und zweyte Theil ſich wie a : b: der zweyte und dritte wie b : c: der dritte und vierte ſich wie c : d verhalten, u. ſ. f. Ein gegebenes Ganze ſoll auf gleichmäßige Art in die Theile A, B, C, D, E, etc. eingetheilt werden, ſo iſt

$a + b + c + d + e + \text{etc.} : A + B + C + D + E + \text{etc.}$
$= a : A$ oder $= b : B$, oder $= c : C$; u. ſ. f.

Dieſes beruht auf folgendem Satze aus der Lehre von der Proportion: wenn

$$A : B = a : b$$
$$B : C = b : c$$
$$C : D = c : d$$
$$D : E = d : e$$

u. ſ. f.

ſo iſt die Summe der Glieder, $A + B + C + D +$ etc. zu einem derſelben, wie die Summe der Glieder, $a + b + c + d +$ etc. zu dem mit jenem gleichſtelligen unter ihnen.

Nicht allein bey Vertheilungen einer Geldſumme auf eine Anzahl Perſonen, ſondern auch bey Miſchungen nach gegebenen Verhältniſſen wird dieſe Vorſchrift angewandt. Z. B. Es mögen zu einer Sorte Schießpulver

zu nehmen ſeyn 75 Theile Salpeter, 10 Theile Schwefel und 15 Theile Kohlen, oder in kleinern Zahlen 15; 2; 3 Theile, ſo ſind auf 1000 Pfund zu nehmen $\frac{1000}{20} \times 15$ oder 750 Pfund Salpeter; $\frac{1000}{20} \times 2$ oder 100 Pf. Schwefel, und $\frac{1000}{20} \times 3$ oder 150 Pf. Kohlen.

Der zweyte Fall iſt, wenn die Verhältnißzahlen für jeden Theil in Beziehung auf zwey andere Theile nicht dieſelben ſind, oder wenn kein Normalganzes gegeben wird, deſſen Theile zur Beſtimmung der Theile eines andern Ganzen dienen. Ein gewiſſes Ganze ſey alſo zu theilen in die Theile A, B, C, D, E, etc. ſo daß

$$A : B = a : b \quad ; \quad B : C = \beta : c$$
$$C : D = \gamma : d \quad ; \quad D : E = \delta : e,$$

u. ſ. f.

Man hat nun dieſe Verhältniſſe auf die Form, wie in dem erſten Falle zu bringen, ſo daß das Hinterglied jedes das Vorderglied des nächſtfolgenden werde. Dieſes geſchieht folgendergeſtalt für vier Verhältniſſe,

$$A : B = a\beta\gamma\delta : b\beta\gamma\delta$$
$$B : C = b\beta\gamma\delta : bc\gamma\delta$$
$$C : D = bc\gamma\delta : bcd\delta$$
$$D : E = bcd\delta : bcde.$$

Auf ähnliche Art bey mehrern oder wenigern Verhältniſſen. Haben die Verhältnißglieder rechter Hand gemeinſchaftliche Theile, ſo wird man zur Erleichterung der Berechnung ſie dadurch zu theilen haben.

Z. B. $a : b = 2 : 3$; $b : c = 5 : 4$; $c : d = 9 : 7$; $d : e = 6 : 5$. Daraus iſt $A : B : C : D : E = 540 : 810 : 648 : 504 : 420 = 90 : 135 : 108 : 84 : 70$.

Geſetz einer Reihe iſt die Art, wie die Glieder derſelben jedes zufolge ſeiner Stelle zuſammengeſetzt

werden. Iſt die Reihe nach den Potenzen einer gewiſſen Größe geordnet, ſo iſt zuerſt die Fortſchreitung der Exponenten dieſer Potenzen zu beſtimmen. Sie kann auch nach den Potenzen zweyer Größen geordnet ſeyn, wie in der Potenz eines Binomium, a + b, nach den Potenzen von a und b zugleich, wo die Summe der Exponenten in dem Producte beider Potenzen eine beſtimmte Summe ausmacht. Dividirt man mit der höchſten Potenz einer von beiden Größen, und multiplicirt zugleich das Ganze mit derſelben Potenz, ſo erhält man eine Fortſchreitung von Potenzen einer einzelnen Größe.

Die Coefficienten der Potenzen, nach welchen die Reihe geordnet iſt, ſind entweder Functionen ihrer Stelle, oder auf andere Art der Form nach beſtimmt, von welcher letztern die Binomial-Coefficienten ein Beyſpiel geben. Oft iſt das Geſetz ſo verwickelt und zuſammengeſetzt, daß man es nicht zu entdecken vermag.

Geſichtspunct, ſ. Perſpectiv.

Gleich iſt, was in Abſicht der Größe eins für das andere geſetzt werden darf. Die Art der Zuſammenſetzung mag verſchieden oder dieſelbe ſeyn.

Gleichartig (homogen) iſt, was durch dieſelbe Einheit gemeſſen wird, oder gemeſſen werden kann. Alle Linien ſind gleichartige Größen, ſo auch alle Flächen unter ſich, alle Körper, desgleichen Zeiten, beſchleunigende Kräfte, Gewichte. Alle Zahlen mit einer unbeſtimmten Einheit ſind gleichartige Größen. Gleichartige Größen, und keine andere, kann man zu einander ſetzen, und eine von der andern abziehen. Größen, die im Allgemeinen gleichartig ſind, können durch verſchiedene Beſtimmung der Einheit ungleichartig werden, z. B. Fuße und Zolle; Quadratzolle und Kreiszolle; Nonageſimalgrade und Centeſimalgrade. Dergleichen kann man zwar zuſammenſetzen, aber nicht ihre Zahlwerthe.

Gleichartige Radicalgrößen ſind ſolche, welche Wurzeln gleichen Grades ſind, z. B. $\sqrt[3]{25}$; $\sqrt[3]{43}$.

Von einer algebraiſchen Gleichung wird geſagt, daß das Geſetz des Gleichartigen darin beobachtet ſey, wenn alle Glieder derſelben einerley Dimenſion oder Abmeſſung haben.

Eine gleichartige Differentialgleichung zwiſchen zwey veränderlichen Größen iſt eine ſolche, worin die Glieder bloß in Abſicht derſelben einerley Dimenſion haben.

Homogeneum affectionis et comparationis, ſ. an ſeinem Orte.

Gleichförmig wachſend oder abnehmend iſt eine Reihe von Größen, deren jede von der folgenden um gleichviel auf gleiche Art unterſchieden iſt. Die ungleichförmigen Veränderungen zu meſſen gebraucht man zugehörige gleichförmige Veränderungen einer zugeordneten Größe.

Gleichheit iſt die Beſchaffenheit der Größen, wodurch ſie gleich ſind. — Verhältniß der Gleichheit iſt das a ; a, oder 1 : 1. Alle Beweiſe in der Mathematik beruhen auf der Beſtimmung der Gleichheit oder Ungleichheit der Größen. In der Differentialrechnung kommt das Verhältniß der Gleichheit als Gränze eines veränderlichen Verhältniſſes, oder vielmehr als Grundlage eines ſolchen, oft vor.

Gleichlaufend, ſ. parallel.

Gleichnamig (homologa) ſind die Vorderglieder oder die Hinterglieder zweyer oder mehrerer Verhältniſſe; auch die Seiten ähnlicher geradlinichter Figuren, die von den gleichen und auf gleiche Art liegenden Winkeln eingeſchloſſen ſind. In den Proportionen zwiſchen ſolchen Seiten ſind ſie entweder die Vorderglieder oder die Hinterglieder, wenn nämlich die Seiten in der einen Figur zu einem Verhältniſſe, und die in der andern Figur zu dem andern Verhältniſſe genommen werden.

Gleichſeitig (aequilaterum) iſt erſtlich ein Vieleck, das lauter gleiche Seiten hat; zweytens eine Hyperbel, deren Axen gleich groß ſind.

Gleichwinklicht (aequiangulum) iſt ein Vieleck, das lauter gleiche Winkel hat. Die regulären Vielecke ſind gleichſeitig und gleichwinklicht.

Gleichung iſt entweder ein ſymboliſcher Ausdruck der Art, wie mehrere mit einander verbundene Größen jede aus der andern zuſammengeſetzt werden, oder eine Verknüpfung zweyer Formen derſelben Größe.

1. Beyſpiele der erſten Gattung ſind

$$x^2 + ax = b.$$

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0.$$

$$x^2 + 7xy - 8y^2 + 10x - 12y - 20 = 0.$$

Beyſpiele der zweyten Gattung ſind

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{(a-b)}{b^2}x + \frac{a-b}{b^3}x^2 - \frac{(a-b)}{b^4}x^3 + \text{etc.}$$

$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}.$$

$$\sqrt{(3+\sqrt{5})} = \sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

2. Man pflegt dieſe beiden Gattungen nicht zu unterſcheiden. Sie ſind aber, wie man aus den gegebenen Beyſpielen ſieht, von ſehr verſchiedener Beſchaffenheit. Die Auflöſung der Gleichungen von der erſten Gattung gehört für die Algebra. In dieſem Artikel iſt es die Abſicht, die Auflöſung derſelben zu zeigen, das iſt, wie die unbekannte Größe aus den gegebenen directe zuſammen zu ſetzen ſey, da ſie in der Gleichung auf eine unentwickelte Art mit dieſen dargeſtellt wird.

3. Die Gleichungen für eine einzige unbekannte Größe theilt man nach den höchſten Potenzen ein, auf welche die unbekannte Größe in denſelben ſteigt.

Eine Gleichung vom erſten Grade, eine einfache, iſt eine ſolche, worin die unbekannte Größe nur einfach oder in der erſten Potenz erſcheint; Gleichungen vom zweyten Grade, oder quadratiſche, ſind, worin das Quadrat der unbekannten Größe nebſt der erſten Potenz, oder auch ohne dieſe vorkommt; vom dritten Grade, oder cubiſche, worin der Cubus, nebſt allen oder einigen niedrigern Potenzen, oder auch ganz allein enthalten iſt; vom vierten Grade oder biquadratiſche, worin die unbekannte Größe bis zum Biquadrat oder der vierten Potenz ſteigt, u. ſ. w.

4. Wenn eine Potenz der unbekannten Größe, ohne die niedrigern, mit der gegebenen Größe allein in einer Gleichung vorhanden iſt, ſo heißt die Gleichung eine reine (aequatio pura). Wenn mehrere Potenzen der unbekannten Größe zuſammen kommen, ſo heißt es eine unreine Gleichung oder beſſer eine zuſammengeſetzte (non pura vel affecta). Eine vollſtändige Gleichung, (aequatio completa), iſt diejenige, worin alle Potenzen von der höchſten bis zu der erſten nebſt dem gegebenen Gliede vorhanden ſind; eine unvollſtändige iſt, worin eine oder mehrere Potenzen fehlen.

5. Die einzelnen Größen, woraus eine Gleichung, ſie ſey von welcher Art ſie wolle, zuſammen geſetzt wird, heißen die Glieder (termini) derſelben, wie x^2; ax; b in der Gleichung $x^2 - ax = b$. Die gegebenen Factoren der unbekannten Größe heißen ihre Coefficienten. Man muß dabey zugleich auf das Vorzeichen achten

Die Aggregate der Glieder auf jeder Seite des Gleichheits-Zeichens heißen die Theile (membra) der Gleichung.

6. Die gewöhnlichen Stellungen der Glieder ſind zweyerley. Entweder ſetzt man das gegebene Glied auf die eine Seite des Gleichheits-Zeichens, und alle die, welche unbekannte Größen enthalten, auf die andere; oder man bringt alle Glieder auf dieſelbe Seite, ſo daß der eine Theil der Gleichung $= 0$ iſt, indem ſich alle Glieder des andern Theils gegen einander aufheben. Dieſe Stellung

iſt zu manchen Abſichten die brauchbarſte, als um zu zeigen, wie eine Gleichung aus Factoren zuſammengeſetzt wird, um einen oder mehrere Factoren abzuſondern, die Conſecution der Folgen und Abwechslungen der Vorzeichen anzugeben, welche von der Anzahl der poſitiven und negativen Wurzeln abhängt, eine gegebene Gleichung mit einer allgemeinen, oder canoniſchen zu vergleichen, und überhaupt allgemeine Lehrſätze über die Eigenſchaften der Gleichungen uud Regeln zur Auflöſung zu geben.

7. Eine Gleichung, worin nur eine einzige unbekannte Größe enthalten iſt, heißt eine **beſtimmte Gleichung** (aequatio determinata); eine einzelne, worin zwey oder mehrere unbekannte Größen vorkommen, iſt eine **unbeſtimmte Gleichung** (indeterminata). Durch jene wird die unbekannte Größe mittelſt der gegebenen beſtimmt, durch dieſe aber nicht, weil ſie von gegebenen und nicht gegebenen Größen zugleich abhängt.

8. Wenn bey der Auflöſung einer Aufgabe oder überhaupt bey der Unterſuchung irgend einer Verbindung von Größen, mehrere unbekannte Größen, wie es oft der Fall iſt, vorhanden ſind, ſo ſind dieſe in den Gleichungen zwiſchen ihnen und den gegebenen, mit einander vermengt. Es iſt alsdann nöthig, für jede der unbekannten Größen eine beſtimmte Gleichung zu finden. Dieſes iſt möglich, wenn ſo viele Gleichungen als unbekannte Größen vorhanden ſind, ſ. **Elimination**. Die Gleichungen mit mehr als einer unbekannten Größe gehören in dieſem Falle nicht zu den unbeſtimmten. Sind aber weniger Gleichungen als unbekannte Größen vorhanden, ſo behält man bey allen Combinationen der Gleichungen doch zum Reſultat eine unbeſtimmte Gleichung.

9. Die beſtimmten Gleichungen ſind das Reſultat der analytiſchen Unterſuchung über den Zuſammenhang gewiſſer Größen. Dieſe überliefert gleichſam die Analyſis der Algebra, um die Werthe der unbekannten Größen mittelſt der bekannten daraus zu beſtimmen.

10. Die unbeſtimmten Gleichungen gehören für die Unterſuchung des Zuſammenhanges der nach irgend einem

Geſetze von einander abhängigen veränderlichen Größen, es ſey in der reinen Analyſis, oder in der Geometrie, in der Mechanik, Aſtronomie und andern Anwendungen der Mathematik. Eine beſondere Gattung unbeſtimmter Gleichungen iſt die, wodurch nicht die Größe aber die Form der unbekannten Größen beſtimmt wird, ſ. unbeſtimmte Analytik.

11. Die Wurzeln der beſtimmten Gleichungen ſind diejenigen Werthe der unbekannten Größe, welche der Gleichung zu folge der gegebenen Größen und ihrer Zuſammenſetzungsart Genüge thun. So ſind $+2$ und $+5$ die Wurzeln der quadratiſchen Gleichung $x^2 - 7x + 10 = 0$, und $+2$; $+5$; -4 die Wurzeln der cubiſchen Gleichung $x^3 - 3x^2 - 18x + 40 = 0$.

12. Die poſitiven Wurzeln ſind diejenigen, bey welchen in dem Aggregat der Glieder die eigentliche Bedeutung der Vorzeichen beybehalten wird, als bey den Wurzeln $+2$ und $+5$ in jenen beiden Gleichungen. Sie werden in demjenigen Sinne genommen, der bey der Auflöſung der Frage für ſie feſtgeſetzt iſt. Die negativen Wurzeln ſind, für welche die Vorzeichen der ungeraden Potenzen ihre Bedeutung ändern, ſo daß die mit $+$ begleiteten ſubtractiv, die mit $-$ begleiteten additiv werden. So iſt in der obigen cubiſchen Gleichung, wenn die Wurzel -4 gebraucht wird, das Aggregat $-64 - 48 + 72 + 40 = 0$.

13. Die negativen Wurzeln dienen, zwey in den Vorzeichen bloß verſchiedene Gleichungen in eine einzige zu vereinigen. Man verändere in einer Gleichung bloß die Vorzeichen der ungeraden Potenzen, oder, welches bey Gleichungen von einem ungeraden Grade bequemer iſt, die Vorzeichen der geraden Potenzen, ſo ſind die negativen Wurzeln der einen Gleichung die poſitiven der andern. Z. B. die Gleichung, $x^3 + 3x^2 - 18x - 40 = 0$, hat die poſitive Wurzel $+4$, und die negativen -2; -5; die Gleichung, $x^3 - 3x^2 - 18x + 40 = 0$, hat die Wurzeln -4; $+2$; $+5$. Die biquadratiſche Gleichung, $x^4 - 2x^3 - 21x^2 + 22x + 40 = 0$, hat die

Wurzeln $+2$; $+5$; -4; -1; die Gleichung, $x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 22x + 40 = 0$, hat die Wurzeln -2; -5; $+4$; $+1$. Wollte man die negativen Wurzeln vermeiden, ſo müßte man zu der vollſtändigen Auflöſung einer Aufgabe zwey Gleichungen anwenden, die von der erklärten entgegengeſetzten Beſchaffenheit wären, ſo daß der eine Theil der Werthe der geſuchten Größe durch die eine Gleichung, der andere Theil durch die andere Gleichung, nach ihrer abſoluten Größe, zufolge der eigentlichen Bedeutung der Vorzeichen, gegeben würde. Allein es iſt dem Geiſte der Analyſis gemäß, dieſe verwandten Beziehungen des geſuchten zu dem gegebenen in eine einzige Formel zu faſſen, ſ. entgegengeſetzte Größen.

14. Die verſchiedenen Wurzeln ſind Werthe verſchiedener Größen, die alle bey einer Aufgabe geſucht werden, wenn man gleich nur nach einer einzigen fragen ſollte. Die Algebra verbeſſert in ihrer Antwort das Mangelhafte in der Frage. Darüber wird die Betrachtung der Gleichungen von den verſchiedenen Graden völliges Licht ertheilen.

15. Manche der alten Algebraiſten (als Descartes, Wolf,) nannten die negativen Wurzeln ſehr unrichtig falſche Wurzeln, weil ſie ſich zu dem Falle, worauf ſie die Rechnung eingerichtet hatten, nicht ſchickten. Sie ſind ſo gut Antworten auf die Frage als die von ihnen ſo genannten wahren, die poſitiven, Wurzeln. Jene verändern nur die Vorzeichen, ſo daß ihre ungeraden Potenzen ſubtrahirt oder addirt werden, wo dieſe addirt oder ſubtrahirt werden, wie es allemahl geſchieht, wenn in den arithmetiſchen Operationen eine Größe durchaus ihr Vorzeichen ändert; ſ. entgegengeſetzte Größen.

16. Gleichungen, in welchen alle Potenzen der unbekannten Größe gerade Exponenten haben, enthalten je zwey gleiche und entgegengeſetzte Wurzeln, da das Quadrat und jede andere gerade Potenz einer Größe ihr Vorzeichen nicht ändert, wenn das Vorzeichen der Wurzel geändert wird.

17. Gleichungen, in welchen neben jeder Wurzel, die p heiße, das reciproke derſelben $\frac{1}{p}$ auch als Wurzel vorhanden iſt, heißen **reciproke** Gleichungen. Euler hat dieſe Benennung eingeführt. Comm. vet. Petrop. T. VI. p. 223.

18. Wenn für die unbekannte Größe irgend ein poſitiver oder negativer Werth geſetzt wird, ſo heißt das Aggregat aller Glieder, auf eine Seite gebracht, der **Werth der Gleichung** für dieſen in die Stelle der Wurzel geſetzten Werth. Die Werthe einer Gleichung machen eine ſtetige Reihe aus, und wachſen ins Unendliche, wenn für x ein unendlich großer Werth geſetzt wird. Wird für x eine der Wurzeln ſelbſt genommen, ſo iſt der Werth der Gleichung = 0.

19. Wir wollen nun die beſtimmten Gleichungen vom erſten bis vierten Grade, jede Gattung beſonders, unterſuchen, und die Methoden zu ihrer Aufloͤſung kennen lernen. Alsdann wird die allgemeine Betrachtung der Gleichungen keine Schwierigkeit machen, wenn es gleich, einzelne Faͤlle ausgenommen, nicht moͤglich iſt, die hoͤhern Gleichungen vom fuͤnften Grade an, anders als durch unendliche Reihen, oder fuͤr numeriſche Werthe der Coefficienten durch Annaͤherung aufzuloͤſen.

I. Gleichungen vom erſten Grade.

20. Wenn die unbekannte Groͤße in einer Gleichung bloß in der erſten Potenz vorhanden iſt, ſo bringe man alle Glieder, welche ſie enthalten, durch Veraͤnderung des Vorzeichens, auf eine Seite der Gleichung, die andern, die bekannten, eben ſo auf die andere Seite: man dividire das Aggregat der bekannten durch den Factor der unbekannten Groͤße, oder multiplicire es durch den Diviſor derſelben, in den Faͤllen, wo dieſe mit einem Multiplicator oder Diviſor verbunden iſt. So erhaͤlt man den Werth der unbekannten Groͤße durch bekannte Groͤßen.

Z. B. $5x - 12 = 3x + 4$

ſo iſt $5x - 3x = 4 + 12$

$$2x = 16$$

$$x = 8.$$

Oder allgemeiner ſey

$$ax - b = cx + d$$

ſo iſt $ax - cx = b + d$

$$(a - c)x = b + d$$

$$x = \frac{b + d}{a - c}.$$

Als Beyſpiele zur Erfindung der Gleichungen und ihrer Verbindungen dienen folgende Aufgaben. Man verbinde hiemit den Artikel: Buchſtabenrechnung.

21. Aufg. Aus der Summe zweyer Zahlen, a, und ihrem Unterſchiede, b, die Zahlen zu finden.

Aufl. Die Zahlen ſeyn x und y, ſo iſt

$x + y = a$, und $x - y = b$. Daraus iſt

$2x = a + b$, und $x = \frac{1}{2}(a + b)$

$2y = a - b$, $y = \frac{1}{2}(a - b)$.

22. Aufg. Aus dem Unterſchiede zweyer Zahlen, a, und dem Unterſchiede ihrer Quadrate, b, die Zahlen zu finden.

Aufl. Die Zahlen ſeyn x und y, ſo iſt $x - y = a$, und $x^2 - y^2 = b$. Da $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, (Buchſtabenrechnung, 14.) ſo iſt

$$x + y = \frac{b}{a}.$$

alſo zufolge (21.)

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} + a\right) = \frac{b + aa}{2a}$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} - a\right) = \frac{b - aa}{2a}.$$

Wenn aa größer als b iſt, ſo iſt y negativ, und a bedeutet die Summe $x + y$.

23. Aufg. Ein Courier A, deſſen Geſchwindigkeit, (Weg in einer Stunde) $= a$ iſt, geht m Stunden eher ab, als ein Courier B, deſſen Geſchwindigkeit $= b$ iſt, von einem Orte abgeht, der c Meilen von dem Orte des A rückwärts entfernt liegt. Beide gehen nach derſelben Richtung. Wo und wenn wird A von B eingeholt, wofern $b > a$ iſt?

Es ſey x der Weg des A, bis er eingeholt wird, ſo iſt $x + c$ der Weg des B bis dahin. Die Zeit des A auf dem Wege x iſt $= \frac{x}{a}$; die Zeit des B auf dem Wege $x + c$ iſt $\frac{x+c}{b}$. Der Unterſchied beider Zeiten iſt $= m$. Alſo iſt

$$\frac{x}{a} - \frac{x+c}{b} = m.$$

Daraus iſt für A

der Weg $x = \frac{a(c+mb)}{b-a}$,

die Zeit $= \frac{c+mb}{b-a}$.

Der Weg des B $= x + c = \frac{b(c+ma)}{b-a}$,

und die Zeit $= \frac{c+ma}{b-a}$.

Wenn die Couriere einander entgegen gehen, ſo iſt $x = \frac{a(c+mb)}{b+a}$. Denn der Weg des B iſt alsdann $c - x$. Man erhält den Werth von x in dieſem Falle, wenn man in der Formel für den erſten Fall a negativ nimmt, wodurch x negativ wird, welches bedeutet, daß

der Weg x eine der in jenem Falle geſetzten Richtung entgegengeſetzte hat.

24. Aufg. Es ſey das ſideriſche Jahr $= A$; der mittlere ſideriſche periodiſche Monath $= M$; der mittlere ſynodiſche Monath $= N$; die Vergleichung zwiſchen dieſen Größen zu machen.

Aufl. Der Bogen der Eckliptik, welchen die Sonne während eines ſynodiſchen Monaths beſchreibt, ſey $= x$, der ganze Umkreis $= p$, ſo iſt $\frac{x}{p} A = N$. Da $p + x$ der von dem Monde während derſelben Zeit beſchriebene Bogen iſt, ſo iſt $\frac{p+x}{p} M = N$. In der erſtern Gleichung addire man auf beiden Seiten die Größe A, ſo iſt $\frac{p+x}{p} A = A + N$. Aus dieſer Gleichung und der zweyten folgt durch Diviſion

$$\frac{M}{A} = \frac{N}{A+N}. \quad \text{Alſo iſt } M = \frac{A.N}{A+N}.$$

Hieraus iſt $M(A+N) = A.N$; ferner

$$M.A = (A-M)N, \text{ und } N = \frac{A.M}{A-M}.$$

Es iſt

$A = 365$ T. 6 St. $9' \; 12'' = 365,25639$ T.
$M = 27. \; 7. \; 43. \; 11. = 27,32165$ =
$N = 29. \; 12. \; 44. \; 3. = 29,53059$ =

Der Werth von N findet ſich auch aus dem Werthe der Zeit in der vorhergehenden Aufgabe, wenn man daſelbſt $m = 0$ ſetzt. Es iſt c der Umkreis p, weil der Mond von der Conjunction mit der Sonne an denſelben beſchreiben muß, ehe er an die Stelle kommt, von welcher die Sonne ausgieng. Der in irgend einer Zeit-Einheit, als ein Tag, von der Sonne beſchriebene Bogen iſt $\frac{p}{A} = a$;

der von dem Monde beſchriebene Bogen iſt $\frac{p}{M}$ = b. Setzt man dieſe Werthe für c, a, b, ſo wird die Zeit bis zur nächſten Conjunction, $N = \frac{A.M}{A-M}$. Hieraus ergiebt ſich $M = \frac{A.N}{A+N}$.

25. Aufg. Es ſoll aus m löthigen und n löthigen Silber eine Maſſe von a Loth zuſammen geſetzt werden, die r löthig iſt. Wie viel von jedem Silber iſt zu nehmen?

Aufl. Von dem erſtern ſeyn zu nehmen x Loth, von dem andern y Loth. Die Menge des feinen Silbers in x Loth iſt $\frac{mx}{16}$, in den y Loth iſt ſie $= \frac{ny}{16}$, in der Miſchung $\frac{ra}{16}$. Alſo iſt

$$\text{I.} \quad mx + ny = ra.$$

Es iſt auch

$$\text{II.} \quad x + y = a.$$

Hier iſt nur nöthig, das Verhältniß x : y zu ſuchen. Darum verwandle man II. in folgende,

$$\text{III.} \quad rx + ry = ra.$$

Demnach iſt

$$\text{IV.} \quad mx + ny = rx + ry$$

oder

$$\text{V.} \quad mx - rx = ry - ny.$$

Alſo iſt

$$\text{VI.} \quad x : y = r - n : m - r.$$

Durch die Geſellſchafts-Regel findet man hieraus ſowohl x als y.

Wollte man, ohne das Verhältniß gefunden zu haben, x und y unmittelbar finden, ſo iſt, wenn x geſucht wird, in I. der Werth von y aus II. zu ſetzen, nämlich $y = a - x$. Dies giebt $mx + n(a-x) = ra$, das

iſt $(m-n)x = (r-n)a$, und $x = \frac{r-n}{m-n}a$. Wenn m und x mit n und y vertauſcht werden, ſo iſt $(n-m)y = (r-m)a$, oder $(m-n)y = (m-r)a$, und $y = \frac{m-r}{m-n}a$.

26. Aufg. Das ſpecifiſche Gewicht einer Materie ſey $= a$, einer andern $= b$, einer Miſchung aus beiden $= c$, man ſucht, wie viel von jeder in der Miſchung enthalten iſt, vorausgeſetzt, daß die Summe der Räume beider Materien in und außer der Miſchung gleich groß iſt.

Aufl. Da die Einheit der Gewichte, ſo wie der Räume, willkührlich iſt, ſo nehme man das Gewicht der Raum-Einheit an Waſſer zur Einheit, und es iſt das Gewicht der erſten Materie in der Raum-Einheit $= a$, und der Raum von dem Gewichte x derſelben $= \frac{x}{a}$. Eben ſo iſt von dem Gewichte der zweyten Materie der Raum $= \frac{y}{b}$, und von der Miſchung beider $= \frac{x+y}{c}$, wenn die Gewichte der darin enthaltenen beiden Materien x und y ſind. Zufolge der Vorausſetzung iſt

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{x+y}{c}.$$

Daraus

$$bcx + acy = ab(x+y)$$

$$a(c-b)y = b(a-c)x$$

$$x : y = a(c-b) : b(a-c)$$

$$x : y = \frac{a}{a-c} : \frac{b}{c-b}.$$

Z. B. Das ſpecifiſche Gewicht des Silbers ſey $= 11{,}09$, des Kupfers $= 8{,}33$, einer Miſchung $= 10{,}24$, ſo iſt $x : y = 3 : 1$ nahe.

27. Aufg. Aus den Gewichten zweyer Materien, den ſpecifiſchen Gewichten der einen und ihrer Miſchung

das ſpecifiſche Gewicht der andern zu finden, unter der Vorausſetzung wie in (26.).

Die Gewichte ſeyn p, q, das ſpecifiſche Gewicht der erſtern $=a$, der zweyten $=u$, der Miſchung $=c$, ſo iſt

$$\frac{p}{a}+\frac{q}{u}=\frac{p+q}{c}$$

$$\frac{q}{u}=\frac{p+q}{c}-\frac{p}{a}=\frac{a(p+q)-cp}{ac}$$

$$u=\frac{acq}{a(p+q)-cp}.$$

Die Formel würde unter der gemachten Vorausſetzung dienen, aus dem Gewichte einer Salzauflöſung und des darin enthaltenen Salzes, nebſt den ſpecifiſchen Gewichten des Waſſers und der Auflöſung, das ſpecifiſche Gewicht des Salzes zu finden. Z. B. in einer geſättigten Auflöſung iſt nach Lamberts Verſuchen $p=979$; $q=380$; $a=1$; $c=1,205$, alſo $u=2,554$. In einer ſchwächern iſt $p=1095$; $q=100$; $c=1,059$. Dieſes giebt $u=2,99$.

28. Aufg. In einer Salzauflöſung ſey das Gewicht des ſüßen Waſſers $=a$, des Salzes $=b$, der Gehalt $=G=\frac{b}{a+b}$. Man verlangt die Menge des Waſſers, das zugegoſſen werden muß, damit die Auflöſung den Gehalt g bekomme.

Aufl. Die geſuchte Waſſermenge wiege $=x$, ſo iſt $g=\frac{b}{a+x+b}$. Daraus iſt $x=\frac{b}{g}-(a+b)$ $=\frac{b}{g}-\frac{b}{G}=\frac{(G-g)b}{Gg}$. Oder, wenn für b der Werth $G(a+b)$ geſetzt wird, $x=\frac{(G-g)(a+b)}{g}$.

29. Aufg. Zu finden, wie ſich die Gewichte zweyer Körper, deren einer ſchwerer, der andere leichter

als Waſſer iſt, verhalten müſſen, damit beide verbunden im Waſſer ganz eingetaucht ſchwimmend erhalten werden.

Aufl. Das ſpecifiſche Gewicht des ſchwerern Körpers ſey $=m$; des leichtern $=n$, des Waſſers $=p$, das Gewicht des erſtern $=a$, des zweyten $=x$. Damit beide ganz eingetaucht dem Waſſer das Gleichgewicht halten, muß das Gewicht beider ſo groß ſeyn als das Gewicht des Waſſers, deſſen Stelle ſie einnehmen. Nun verhalten ſich die Gewichte zweyer Maſſen von gleicher Räumlichkeit wie ihre ſpecifiſchen Gewichte; alſo iſt das Gewicht des Waſſers, deſſen Stelle der erſtere Körprr einnimmt, $=\frac{pa}{m}$, und das Gewicht des Waſſers in dem Raume des zweyten Körpers $=\frac{px}{n}$. Demnach iſt

$$a+x=\frac{pa}{m}+\frac{px}{n}$$

$$mn(a+x)=p(na+mx)$$

$$(m-p)na=(p-n)mx$$

$$a:x=(p-n)m:(m-p)n$$

$$a:x=\frac{m}{m-p}:\frac{n}{p-n}.$$

Das Verhältniß iſt daſſelbe wie in der Aufgabe (26.), wenn für das dortige ſpecifiſche Gewicht der Miſchung hier das ſpecifiſche Gewicht des Waſſers geſetzt wird. Die beiden verbundenen Körper ſind als eine Miſchung zu betrachten, deren ſpecifiſches Gewicht dem einer Maſſe von gleichem Gewicht und gleichem Umfange, alſo dem des Waſſers gleich iſt. Die Algebra hilft hier die Ähnlichkeit zweyer dem erſten Anblick nach verſchiedenen Fragen einſehen.

30. Aufg. Ein Waſſerbehälter erhält a Cubikfuß Waſſer aus zwey Röhren, wenn die erſte m Stunden, die andere n Stunden läuft; und erhält b Cubikfuß, wenn jene p St. dieſe q St. läuft; wie viel Waſſer giebt jede Röhre in einer Stunde?

Aufl. Die erſte Röhre gebe x Cubikfuß, die zweyte y, ſo iſt

$$\text{I. } mx + ny = a$$
$$\text{II. } px + qy = b.$$

Um y herauszuſchaffen, multiplicire man I. mit q, und II. mit n, ſo iſt

$$\text{I. } mqx + nqy = qa$$
$$\text{II. } npx + nqy = nb.$$

Durch die Subtraction wird

$$\text{III. } mqx - npx = qa - nb$$
$$x = \frac{qa - nb}{mq - np}.$$

Eben ſo $y = \frac{mb - pa}{mq - np}.$

Wäre $qa < nb$, ſo iſt auch $mq < np$, ſo wie $mb < pa$, und man hat nur die Vorzeichen im Zähler und Nenner zu ändern.

In dem Falle, daß das Waſſer durch die zweyte Röhre hinausfließt, hat man nur y negativ zu ſetzen, oder das Vorzeichen zu ändern. Es iſt alsdann $y = \frac{pa - mb}{mq - np}$. Wüßte man nicht, ob durch die zweyte Röhre das Waſſer hinein oder herausliefe, ſo dürfte man nur den einen oder den andern Fall beliebig vorausſetzen. Iſt der Werth von y poſitiv, ſo iſt die Vorausſetzung richtig; iſt er negativ, ſo erhellt daraus, daß die entgegengeſetzte zu nehmen iſt.

Z. B. $m = 2$; $n = 3$; $p = 4$; $q = 5$; $a = 5$; $b = 35$, ſo iſt, wenn die Rechnung nach dem erſten Falle gemacht wird, $x = 40$; $y = -25$. Durch die zweyte Röhre fließt das Waſſer nicht hinein, ſondern hinaus.

31. Aufg. Es ſey I. $x + y = a$; II. $x + z = b$; III. $y + z = c$, man ſucht die Größen x, y, z.

Aufl. Weil $2x + 2y + 2z = a + b + c$,
ſo iſt $2x = a + b - c$

$$2y = a - b + c$$

$$2z = b + c - a.$$

32. Das allgemeine Verfahren, wenn drey oder mehr Gleichungen vom erſten Grade mit eben ſo vielen unbekannten Größen gegeben werden, iſt in dem Artikel, Elimination, anzutreffen.

Mehrere Exempel ſuche man in den Lehrbüchern, beſonders in Saundersons Algebra (Engliſch, 1740, 2 Bände in 4. franzöſiſch, 1756), und in L'Huiliers Algebra, 1799 und 1801, 2 Bde. in 8.

II. Quadratiſche Gleichungen.

Alle Fragen, wodurch man auf quadratiſche Gleichungen geführt wird, laſſen ſich auf folgende beide bringen.

33. Aufg. Es iſt gegeben die Summe, a, zweyer Zahlen, und ihr Product, b, die Zahlen zu finden.

Aufl. Die Zahlen ſeyn p und q, jene die größere, ſo daß $p > \frac{1}{2}a$, alſo $q < \frac{1}{2}a$. Es iſt

$$\text{I. } p + q = a; \text{ II. } pq = b.$$

Die Theile der erſtern Gleichung multiplicire man mit p, ſo iſt

$$pp + pq = ap, \text{ das iſt}$$

$$pp - ap + b = 0.$$

Man addire auf beiden Seiten die bekannte Größe, $\frac{1}{4}aa - b$, ſo iſt

$$pp - ap + \tfrac{1}{4}aa = \tfrac{1}{4}aa - b,$$

alſo $p - \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$

und $p = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$.

Für die zweyte der geſuchten Größen, q, iſt ebenfalls die Gleichung

$$qq - aq + b = 0,$$

und $qq - aq + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - b$.

Da aber $q < \frac{1}{2}a$, ſo iſt

$$\tfrac{1}{2}a - q = \surd(\tfrac{1}{4}aa - b),$$

und $q = \frac{1}{2}a - \surd(\frac{1}{4}aa - b)$.

Bezeichnet man jede der beiden Größen durch x, ſo iſt

$$xx - ax + b = o,$$

und $x = \frac{1}{2}a \pm \surd(\frac{1}{4}aa - b)$.

Hieraus ſieht man, woher die Gleichung, $xx - ax + b = o$, zwey Wurzeln hat. Denn ſie iſt die Antwort auf eine Frage nach zwey Größen. Die Algebra findet auch ohne Rückſicht auf dieſe Frage einen doppelten Werth für x. Denn die Quadratwurzel aus $xx - ax + \frac{1}{4}aa$ iſt ſo gut $x - \frac{1}{2}a$ als $\frac{1}{2}a - x$. Jene giebt

$$x = \tfrac{1}{2}a + \surd(\tfrac{1}{4}aa - b),$$

dieſe $x = \frac{1}{2}a - \surd(\frac{1}{4}aa - b)$.

34. Aufg. Es iſt gegeben der Unterſchied, a, zweyer Zahlen, und ihr Product, b, die Zahlen zu finden.

Aufl. Die Zahlen ſeyn p und q, ſo iſt

$$\text{I. } p - q = a \text{ ; II. } pq = b.$$

Wie vorher iſt

$$pp - b = ap,$$

und $pp - ap - b = o$.

Auf beiden Seiten addirt $\frac{1}{4}aa + b$, iſt

$$pp - ap + \tfrac{1}{4}aa = \tfrac{1}{4}aa + b.$$

Daher $p - \frac{1}{2}a = \surd(\frac{1}{4}aa + b)$,

$$p = \surd(\tfrac{1}{4}aa + b) + \tfrac{1}{2}a.$$

Ferner iſt

$$pq - qq = aq, \quad \text{das iſt,}$$

$$b - qq = aq, \quad \text{oder}$$

$$qq + aq - b = o.$$

Auf beiden Seiten addirt $\frac{1}{4}aa + b$, iſt

$$qq + aq + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + b,$$

daher $$q + \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + b)},$$

$$q = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + b)} - \frac{1}{2}a.$$

Um die beiden Gleichungen, $pp - ap - b = o$, und $qq + aq - b = o$, durch eine einzige Gleichung, $xx - ax - b = o$, oder auch $xx + ax - b = o$, darzuſtellen, muß man in jener unter x ſowohl p als $-q$, in dieſer ſowohl q als $-p$ verſtehen, ſo daß die eine Wurzel die eine geſuchte Größe in dem Sinne der Frage, die andere Wurzel aber die andere Größe in dem entgegengeſetzten Sinne angebe. Die Wurzeln der Gleichung,

$$xx - ax - b = o,$$

ſind ſolchergeſtalt

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa + b)};$$

und die Wurzeln der Gleichung,

$$xx + ax - b = o,$$

ſind $$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa + b)}.$$

35. Alle Formen einer quadratiſchen Gleichung ſind

1) $xx - ax + b = o$
2) $xx + ax + b = o$
3) $xx - ax - b = o$
4) $xx + ax - b = c.$

Die zweyte entſteht aus der erſten, und dieſe aus der zweyten, wenn x negativ genommen wird. Man kommt in der Rechnung auf die zweyte Form, wenn man die Relation der Wurzeln x (oder p und q) gegen die gegebenen Größen aus dem Falle der erſten Form herleitet, und beide in einer entgegengeſetzten Beziehung gegen die in jener Form nimmt. Die dritte und vierte Form enthalten ebenfalls einerley Wurzeln, nur in entgegengeſetzter Bedeutung. Die Wurzeln in den beiden erſten Formen ſind gleichnamig, in den andern beiden ungleichnamig oder ſich

entgegengeſetzt. (Vergl. Anwendung der Geometrie auf die Algebra, I. V.)

36. Es ſind alſo zwey Hauptformen der quadratiſchen Gleichungen.

$$\text{I. } xx \mp ax + b = 0,$$

$$\text{II. } xx \mp ax - b = 0.$$

Beide unterſcheiden ſich darin weſentlich, daß die erſte unmögliche Wurzeln enthalten kann. Denn der Unterſchied der geſuchten Größen ſey $= u$, ſo ſind ſie (21.) eine $= \frac{1}{2}(a + u)$, die andere $= \frac{1}{2}(a - u)$. Alſo ihr Product $b = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}uu$, ſo daß nothwendig $b < \frac{1}{4}aa$ iſt. Die Nichterfüllung dieſer nothwendigen Bedingung macht die Auflöſung unmöglich.

Z. B. $xx - 10x + 24 = 0$

hat zwey mögliche Wurzeln $+6$ und $+4$,

aber $xx - 10x + 26 = 0$

hat keine mögliche Wurzeln.

37. Wenn man unter der Summe zweyer Größen auch ihren Unterſchied verſteht, und das Vorzeichen ihres Products gehörig beſtimmt, ſo begreift die Gleichung, $x^2 - ax + b = 0$, alle vier Formen, und die Aufgabe in (33.) alle Fälle, welche auf eine quadratiſche Gleichung führen. Jene Form iſt zur Repräſentantinn aller ſehr gut geeignet, da ihre beiden Wurzeln gleichnamig ſind.

38. Da für die Form $xx - ax + b = 0$ die beiden Wurzeln ſind $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$, oder $x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{(aa - 4b)}$, ſo kann man dieſe Auflöſung auch auf die andern Formen mit gehöriger Abänderung der Vorzeichen anwenden.

Den Wurzeln kann man auch folgende Formen geben, $\dfrac{b}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(aa - 4b)}}$, und $\dfrac{b}{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(aa - 4b)}}$.

Dieſe entſtehen aus den Formen $\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{(aa - 4b)}$

durch die Multiplication und Diviſion mit einer und derſelben Größe, $\frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}\sqrt{(aa-4b)}$. Sie ſind zuweilen bequemer als die erſtern.

39. In allen vier Formen ſind ſo viele Folgen ungleichnamiger Vorzeichen als poſitive Wurzeln, und ſo viele Folgen gleichnamiger als negative Wurzeln, wenn nämlich noch dem erſten Gliede das Zeichen + vorgeſetzt wird, und beide Wurzeln möglich ſind.

40. In allen vier Formen iſt die Summe der beiden den Wurzeln entgegengeſetzten Größen gleich dem Coefficienten von x in Verbindung mit ſeinem Vorzeichen, und das Product derſelben gleich dem gegebenen Gliede in der Gleichung, auch in Verbindung mit ſeinem Vorzeichen. Das erſte Glied, xx, habe den Coefficienten $+1$.

41. Wenn $4b > aa$ iſt, ſo ſind beide Wurzeln der Gleichung zwar unmöglich (36.) allein die Summe derſelben und ihr Product ſind dennoch mögliche Größen. In der Summe hebt ſich das unmögliche eben ſo wie das mögliche irrationale. In dem Producte der unmöglichen Wurzeln geſchieht daſſelbe, und das Product von $+\sqrt{(aa-4b)}$ in $-\sqrt{(aa-4b)}$ iſt die mögliche Größe, $-(aa-4b)$, es mag aa größer oder kleiner als $4b$ ſeyn.

42. Der Satz in (40.) gilt alſo auch, wenn die Wurzeln unmögliche Werthe haben, nämlich in dem Falle, da $b > \frac{1}{4}aa$ iſt. Um dem Satze die völligſte Ausdehnung zu geben, werden die unmöglichen Wurzeln, wenn ſie gleich nichts weiter als Bezeichnungen ſind, mit unter die Wurzeln aufgenommen. Ihre Form iſt $x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, und es iſt, wenn ſie die Wurzeln der Gleichung, $x^2 - ax + b = 0$, ſind, $\alpha = \frac{1}{2}a$; $\beta^2 = b - \frac{1}{4}aa$. Der Theil $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$ der Wurzel x iſt $\sqrt{(b-\frac{1}{4}aa)(-1)} = \sqrt{\beta^2(-1)} = \beta\sqrt{-1}$.

43. Die Wurzeln der Gleichung, $xx - ax + b = 0$, ſeyn p, q, es iſt

$$xx - ax + b = (x-p)(x-q).$$

Denn die Entwickelung des Products, welches P heiße, giebt

$$P = xx - px + pq$$
$$ - qx$$

Da $p + q = a$, und $pq = b$ iſt, ſo erhellt der Satz.

44. Um eine dreytheilige Größe, wie $xx - ax + b$, in zwey Factoren zu zerfällen, ſuche man die Wurzeln, p, q, der Gleichung, $xx - ax + b = 0$, ſo iſt $xx - ax + b = (x - p)(x - q)$, was man auch für x ſetzen mag. Hat die Gleichung keine mögliche Wurzeln, ſo läßt ſich das Trinomium nur der Form nach in Factoren zerlegen

Exempel. Die Wurzeln der Gleichung, $xx - 12x + 35 = 0$, ſind $+5$ und $+7$, alſo iſt

$$xx - 12x + 35 = (x - 5)(x - 7).$$

Die Wurzeln der Gleichung $xx - 5x - 84 = 0$ ſind $+12$ und -7, alſo iſt $xx - 5x - 84 = (x - 12)(x + 7)$. So auch iſt $3x^4 - 10a^2x^2 + 3a^4 = (3x^2 - a^2)(x^2 - 3a^2)$. Denn die Gleichung, $x^4 - \frac{10}{3}a^2x^2 + a^4 = 0$, hat die Wurzeln, $x^2 = \frac{5}{3}a^2 \pm \sqrt{(\frac{25}{9}a^4 - a^4)} = \frac{5}{3}a^2 \pm \frac{4}{3}a^2$. Alſo iſt

$$x^4 - \frac{10}{3}a^2x^2 + a^4 = (x^2 - 3a^2)(x^2 - \frac{1}{3}a^2),$$

und daher

$$3x^4 - 10a^2x^2 + 3a^4 = (x^2 - 3a^2)(3x^2 - a^2)$$
$$= (3a^2 - x^2)(a^2 - 3x^2).$$

45. Das Aggregat der Glieder der Gleichung, ihr Werth, iſt negativ, wenn der Werth von x zwiſchen den beiden möglichen Wurzeln liegt; poſitiv, wenn er jenſeits der einen wie der andern genommen wird. Denn das Product $(x - p)(x - q)$, oder $(p - x)(q - x)$, hat in dem erſtern Falle ungleichnamige Factoren, und iſt dadurch negativ. In dem andern Falle iſt das Product poſitiv.

46. Hat die Gleichung keine mögliche Wurzeln, ſo iſt ihr Werth immer poſitiv. Denn xx kann immer ſo groß genommen werden, daß es größer iſt, als die beiden andern Glieder zuſammen, wenn ſie auch beide das

Vorzeichen — erhalten. Könnte nun der Werth der Gleichung auch negativ ſeyn, ſo müßte zwiſchen den poſitiven Werthen und dem negativen ein Werth $= 0$ fallen, die Gleichung alſo mögliche Wurzeln haben.

47. Hat die Gleichung zwey gleiche mögliche Wurzeln, ſo wird ihr Werth für dieſe $= 0$, iſt aber für alle andere Werthe von x poſitiv. Dieſer Fall macht den Übergang von der Möglichkeit der Wurzeln zu ihrer Unmöglichkeit. S. Anwendung der Geometrie auf die Algebra. IV.

Beyſpiele einiger Aufgaben.

48. Aufg. Es iſt gegeben $x + y = a$, und $xx + yy = bb$, die Zahlen x, y, zu finden.

Aufl. Es iſt $xx + 2xy + yy = aa$, alſo $2xy = aa - bb$. Da nun die Summe und das Product gegeben ſind, ſo iſt, wenn x jede der beiden Größen bezeichnet,

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{2}(aa - bb))}$$
$$= \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}bb - \tfrac{1}{4}aa)}.$$

Es muß $bb >$ oder $= \tfrac{1}{2}aa$ ſeyn, wenn die Auflöſung möglich ſeyn ſoll.

49. Aufg. Es iſt gegeben die Summe der Quadrate zweyer Größen, und ihr Product, die Größen zu finden.

Aufl. Es ſey $xx + yy = aa$; $xy = b$, ſo iſt $xx + 2xy + yy = aa + 2b$, und $xx - 2xy + yy = aa - 2b$. Alſo $x + y = \sqrt{(aa + 2b)}$, und $x - y = \sqrt{(aa - 2b)}$. Folglich

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{(aa + 2b)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(aa - 2b)}$$
$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(aa + 2b)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(aa - 2b)}.$$

Oder da $xxyy = bb$, ſo iſt zufolge (33.)

$$xx = \tfrac{1}{2}aa + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - bb)}$$
$$yy = \tfrac{1}{2}aa - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - bb)},$$

50. Aufg. Es iſt gegeben $x + y = a$, und $x^3 + y^3 = b^3$, die Größen x, y zu finden.

Aufl. Man ſetze, zur Abänderung der Auflöſungsart, $x - y = u$, ſo iſt

$$x = \tfrac{1}{2}(a + u), \text{ und } y = \tfrac{1}{2}(a - u),$$

alſo $x^3 = \tfrac{1}{8}(a^3 + 3a^2u + 3au^2 + u^3)$,

$$y^3 = \tfrac{1}{8}(a^3 - 3a^2u + 3au^2 - u^3).$$

Daher

$$b^3 = \tfrac{1}{4}(a^3 + 3au^2),$$

$$u^2 = \frac{4b^3 - a^3}{3a},$$

und die beiden Zahlen $= \tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{4b^3 - a^3}{3a}}$.

Es muß $4b^3 >$ oder $= a^3$ ſeyn.

51. Aufg. Es iſt gegeben die Summe a dreyer Zahlen, die in geometriſcher Progreſſion ſind, und die Summe b^2 ihrer Quadrate; die Zahlen zu finden.

Aufl. Die Zahlen ſeyn x, y, z, ſo iſt

$$\text{I.} \quad x + y + z = a$$

$$\text{II.} \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2$$

$$\text{III.} \quad xz = y^2.$$

Die erſte Gleichung quadrirt, giebt

$$\text{IV.} \quad x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2 = a^2.$$

Hieraus entſteht durch Verbindung mit der Gleichung II.

$$\text{V.} \quad 2xy + 2xz + 2yz = a^2 - b^2.$$

Aus dieſer durch Verbindung mit III.

$$\text{VI.} \quad 2xy + 2y^2 + 2yz = a^2 - b^2$$

oder VI. $2y(x + y + z) = a^2 - b^2$.

Hieraus vermittelſt I.

$$\text{VII.} \quad 2ay = a^2 - b^2,$$

und $$y = \frac{a^2 - b^2}{2a}.$$

Da $x + z = a - y$, ſo iſt

$$x + z = \frac{a^2 + b^2}{2a}.$$

Auch iſt $$xz = \frac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2}.$$

Demnach iſt Summe und Product der Größen x und z gegeben. Jene ſey $= A$; dieſes $= B^2$, ſo iſt (33.)

$$x = \tfrac{1}{2}A \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}A^2 - B^2)},$$

oder $$x = \tfrac{1}{2}A \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}A + B)(\tfrac{1}{2}A - B)}.$$

Nun iſt $A = \frac{a^2 + b^2}{2a}$; $B = \frac{a^2 - b^2}{2a}$,

alſo $\tfrac{1}{2}A + B = \frac{3a^2 - b^2}{4a}$; $\tfrac{1}{2}A - B = \frac{3b^2 - a^2}{4a}$

und $$x = \frac{a^2 + b^2}{4a} \pm \frac{\sqrt{(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)}}{4a}.$$

wenn x jedes der beiden äußern Glieder der Progreſſion bedeutet. Damit die Aufgabe möglich ſey, muß ſeyn $b^2 >$ oder $= \tfrac{1}{3}a^2$ und $b^2 <$ oder $= 3a^2$.

Zweyte Auflöſung. Man nenne das erſte Glied der Progreſſion x, den Exponenten u, ſo iſt

I. $x(1 + u + u^2) = a$

II. $x^2(1 + u^2 + u^4) = b^2$.

Nun iſt

III. $x^2(1 + 2u + 3u^2 + 2u^3 + u^4) = a^2$

IV. $2x^2(1 + u + 2u^2 + u^3 + u^4) = a^2 + b^2$

oder

IV. $2x^2(1 + u^2)(1 + u + u^2) = a^2 + b^2$

V. $2x^2(u + u^2 + u^3) = a^2 - b^2$

oder

V. $2x^2 u(1 + u + u^2) = a^2 - b^2$

VI. $$\frac{1 + u^2}{u} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}.$$

Man ſetze $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = c$, ſo iſt

VII. $u^2 - cu + 1 = 0$

alſo $u = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 - 1)}$

Der Exponent einer geometriſchen Reihe hat immer einen gedoppelten Werth, da die Reihe ſowohl ſteigend als fallend genommen werden kann. Das Product beider Werthe iſt $= 1$, daher der gegebene Terminus der Gleichung $= + 1$ iſt.

52. Aufg. Es iſt gegeben die Summe $x + y = a$, und $x^4 + y^4 = b^4$, die Größen x und y zu finden.

Aufl. Es iſt $(x + y)^4 - 4xy(x + y)^2 + 2x^2y^2 = x^4 + y^4$; alſo $a^4 - 4a^2xy + 2x^2y^2 = b^4$. Solchergeſtalt iſt das Product xy durch eine quadratiſche Gleichung gegeben. Nachdem es hieraus gefunden iſt, werden x und y aus ihrer Summe und ihrem Producte beſtimmt.

53. Aufg. Es iſt gegeben die Summe $x + y = a$, und $x^5 + y^5 = b^5$, die Größen x und y zu finden.

Aufl. Es iſt $(x + y)^5 - 5xy(x + y)^3 + 5x^2y^2(x + y) = x^5 + y^5$; alſo iſt $a^5 - 5a^3xy + 5ax^2y^2 = b^5$, und die fernere Auflöſung iſt wie in (52).

III. Cubiſche Gleichungen.

Die Aufgaben, welche auf cubiſche Gleichungen führen, laſſen ſich alle auf folgende drey bringen.

54. Aufg. I. Es iſt gegeben die Summe a dreyer Größen, die Summe b der Producte je zweyer, und das Product c aller drey; die Gleichungen für dieſe Größen zu finden.

Aufl. Man nenne die geſuchten Größen, p, q, r, ſo iſt

I. $p + q + r = a$, II. $pq + pr + qr = b$.
III. $pqr = c$.

Man ſetze $q + r = \alpha$; $qr = \beta$, ſo iſt

$$\begin{array}{llll} \text{I.} & p + \alpha = a & \text{oder} & p^3 + p^2\alpha = ap^2 \\ \text{II.} & p\alpha + \beta = b & = & p^2\alpha + p\beta = bp \\ \text{III.} & p\beta = c & = & p\beta = c. \end{array}$$

Aus dieſen Gleichungen folgt ſogleich unmittelbar,

$$p^3 = ap^2 - bp + c,$$

oder $$p^3 - ap^2 + bp - c = 0.$$

Die beiden andern Größen werden durch völlig ähnliche Gleichungen gefunden. Bezeichnet man jede derſelben durch x, ſo iſt

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

die Gleichung, welche die Relation jeder der drey Größen zu den gegebenen enthält.

Die Symbole, a, b, c, p, q, r, bedeuten hier und in den folgenden beiden Aufgaben bloß Quantität, oder poſitive Größen.

55. Aufg. 2. Es ſey I. $p + q - r = a$; II. $pq - pr - qr = \pm b$; III. $pqr = c$, die Gleichungen für die Größen p, q, r, zu finden.

Aufl. Es ſey $q - r = \alpha$; $qr = \beta$, ſo iſt

$$\begin{array}{llll} \text{I.} & p + \alpha = a & \text{oder} & p^3 + p^2\alpha = ap^2 \\ \text{II.} & p\alpha - \beta = \pm b & = & p^2\alpha - p\beta = \pm pb \\ \text{III.} & p\beta = c & = & p\beta = c. \end{array}$$

Aus dieſen Gleichungen folgt

$$p^3 = ap^2 \mp bp - c,$$

oder $$p^3 - ap^2 \pm bp + c = 0.$$

Und eben ſo

$$q^3 - aq^2 \pm bq + c = 0.$$

Allein für r erhält man die Gleichung,

$$r^3 + ar^2 \pm br - c = 0.$$

56. Aufg. 3. Es ſey I. $p - q - r = a$; II. $pq + pr - qr = b$; III. $pqr = c$: die Gleichungen für p, q, r zu finden.

Aufl. Durch daſſelbe Verfahren wie vorher iſt

$$p^3 - ap^2 - bp - c = 0$$
$$q^3 + aq^2 - bq + c = 0$$
$$r^3 + ar^2 - br + c = 0.$$

Die Größe b iſt poſitiv, weil $p(q + r) > qr$ iſt, da $p > q + r$ ſeyn ſoll. Wäre $p < q + r$, ſo gehörte dieſer Fall zu der zweyten Aufgabe.

57. Man bezeichne überhaupt jede der Größen, $\pm p$; $\pm q$; $\pm r$, durch x, ſo ſind die Gleichungen, worauf die obigen Aufgaben führen, folgende:

1) $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$
2) $x^3 - ax^2 \pm bx + c = 0$
3) $x^3 + ax^2 \pm bx - c = 0$
4) $x^3 - ax^2 - bx - c = 0$
5) $x^3 + ax^2 - bx + c = 0.$

Dazu nehme man noch die Gleichung,

6) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$

ſo hat man alle Fälle von Abwechslungen und Folgen der Vorzeichen. Die ſechſte Gleichung iſt bloß darin von der erſten verſchieden, daß ihre Wurzeln in einer entgegengeſetzten Beziehung auf die Wurzeln der erſten Gleichung genommen werden, alſo alle negativ ſind, wie bey den quadratiſchen Gleichungen (35 nr 1. 2.). Die Gleichungen 1) und 6) haben drey gleichnamige, aber entgegengeſetzte Wurzeln; die übrigen ungleichnamige. Die Wurzeln von 2) ſind denen von 3) gleich, aber entgegengeſetzt; die von 4) ſind in Abſicht auf die von 5) eben ſo beſchaffen.

Die Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, mit drey gleichnamigen poſitiven Wurzeln begreift alle übrigen, wenn bey den Coefficienten und Wurzeln auch eine negative Bedeutung zugelaſſen wird. Wegen der Gleichförmigkeit ihrer Wurzeln ſoll ſie überhaupt die Repräſentantinn aller der andern ſeyn.

58. Wenn alle drey Wurzeln mögliche Größen ſind, ſo hat eine cubiſche Gleichung ſo viele poſitive Wur-

zeln als Abwechslungen der Vorzeichen + — oder — + zweyer nächſten Glieder ſich finden, und ſo viele negative Wurzeln, als Folgen gleicher Vorzeichen + + oder — — vorhanden ſind. Zum Vorzeichen des erſten Gliedes iſt + zu nehmen.

Die Gleichung 1) in (57.) hat drey poſitive Wurzeln; die 2) hat zwey poſitive Wurzeln, + p, + q und eine negative, — r; die 3) hat eine poſitive + r, und zwey negative, — p, — q. In letztern beiden kann der Coefficient von x das eine oder das andere Vorzeichen haben, ohne daß dadurch die Anzahl der Abwechslungen und Folgen geändert wird. Die Gleichung 4) hat eine poſitive Wurzel, + p, und zwey negative, — q, — r; die 5) hat zwey poſitive, + q, + r, und eine negative, — p. Die 6) hat lauter negative Wurzeln. Allen dieſen Beſchaffenheiten der Wurzeln iſt die Anzahl der Abwechslungen und Folgen der Vorzeichen gemäß, wie es angegeben iſt. Iſt ein Coefficient = o, ſo gehören ihm beide Vorzeichen zu.

Der Satz muß auf mögliche Wurzeln eingeſchränkt werden, weil die Beziehung des entgegengeſezten auf unmögliche Wurzeln nicht anwendbar iſt.

59. Iſt $x^3 - ax^2 + bx - c = o$ eine gegebene Gleichung, ſo ſind ihre Wurzeln die drey Größen, p, q, r, welche folgenden drey Gleichungen Genüge thun: I. $p + q + r = a$; II. $pq + pr + qr = b$; III. $pqr = c$. Denn die Gleichung, welche für jede dieſer drey Größen aus dieſen drey Gleichungen hergeleitet wird, iſt identiſch mit der vorgegebenen. Durch gehörige Veränderung der Vorzeichen von p, q, r, wird jede der andern möglichen Formen erhalten.

Da die drey Coefficienten einer cubiſchen Gleichung nicht mehr als drey Bedingungen hergeben, ſo können keine andern Wurzeln Statt haben, als diejenigen, die durch die drey angeführten Gleichungen beſtimmt werden.

60. Wenn ſtatt der Wurzeln einer cubiſchen Gleichung die ihnen entgegengeſetzten gleichen genommen werden,

ſo iſt der Coefficient des zweyten Gliedes in Verbindung mit dem Vorzeichen die Summe dieſer Größen; eben ſo der Coefficient des dritten Gliedes die Summe der Producte je zweyer, und das dritte Glied das Product aller drey.

61. Die Gleichung, $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, habe die Wurzeln, p, q, r, es iſt

$x^3 - ax^2 + bx - c = (x - p)(x - q)(x - r)$.

Denn die Entwickelung des Products, welches P heiße, giebt

$$\begin{aligned} P = x^3 & - px^2 + pqx - pqr \\ & - qx^2 + prx \\ & - rx^2 + qrx \end{aligned}$$

Die Coefficienten von den Potenzen der Größe x in dem Producte kommen mit den Coefficienten in der Gleichung überein (59.), alſo iſt das Aggregat der Glieder in der Gleichung, oder ihr Werth gleich dem Producte P, was man auch für x ſetzen mag. Beides, das Aggregat und das Product, wird $= 0$, wenn für x eine der Wurzein geſetzt wird.

62. Zwey der durch p, q, r, bezeichneten Wurzeln können unmöglich ſeyn. Denn, wenn man eine derſelben als möglich und bekannt annimmt, ſo iſt von den beiden andern die Summe oder der Unterſchied und das Product gegeben. Iſt es die Summe, welche gegeben wird, ſo muß noch eine Bedingung erfüllt werden, zufolge (36).

63. Eine der Wurzeln iſt immer möglich. Denn man kann für x einen ſo großen poſitiven Werth ſetzen, daß x^3 allein größer iſt, als alle mit — begleiteten Glieder, ſo daß dadurch der Werth der Gleichung poſitiv wird. Man kann aber auch für x einen ſo großen negativen Werth ſetzen, daß dadurch x^3 allein alle Größen zuſammen übertrifft, die das Vorzeichen + erhalten, wodurch folglich der Werth der Gleichung negativ wird. Zwiſchen beiden Werthen von x muß es einen geben, für welchen die mit entgegengeſetzten Vorzeichen begleiteten Glieder eine gleiche Summe ausmachen, alſo der Werth der Gleichung $= 0$

wird. Dieſer Werth von x iſt eine Wurzel der Gleichung. (S. Anwendung der Geometrie auf die Algebra. IV.)

64. In dem Producte $(x - p)(x - q)(x - r) = P$ bedeute p eine mögliche Größe, q und r mögen mögliche oder unmögliche ſeyn. Man gebe dem Producte die Form $P = (x - p)(x^2 - (q + r)x + qr)$, und ſetze $x^2 - (q + r)x + qr = 0$. Hat dieſe quadratiſche Gleichung zwey mögliche Wurzeln, ſo hat P drey mögliche einfache Factoren, und die cubiſche Gleichung, deren Werth P iſt, hat drey mögliche Wurzeln. Hat die quadratiſche Gleichung keine mögliche Wurzeln, ſo hat die cubiſche Gleichung nur eine mögliche Wurzel. Dieſes iſt der Fall, wenn $(q + r)^2 < 4qr$ iſt (36.).

65. Kann der Werth von p vollſtändig durch die Coefficienten der Gleichung angegeben werden, ſo wird durch die Diviſion des Aggregats ihrer Glieder der quadratiſche Factor gefunden. Dieſer $= 0$ geſetzt, giebt die beiden Wurzeln q und r, entweder beide als mögliche, oder beide als unmögliche Größen.

66. Ohne darauf zu ſehen, ob der quadratiſche Factor gefunden werden kann oder nicht, ſetze man denſelben im allgemeinen $= x^2 - \alpha x + \beta$. Die Wurzeln der Gleichung $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ ſeyn unmögliche, $q = m + n\sqrt{-1}$; $r = m - n\sqrt{-1}$, nach (41.), ſo iſt $q + r = 2m$; $qr = mm + nn$. Setzt man in den Gleichungen der erſten Aufgabe für q und r dieſe Werthe, ſo wird eben die Gleichung für p erhalten, als wenn man die einfachen Zeichen, q, r, oder die möglichen Werthe, $m \pm n$, genommen hätte, da die erſte Potenz von n aus der Rechnung herausgeht. Daher gilt der Satz in (59.) auch für den Fall unmöglicher Wurzeln.

67. Man ſetze nun in der cubiſchen Gleichung ſtatt der Wurzel p eine der beiden andern beiden Wurzeln, q, ſo daß $q^3 - aq^2 + bq - c = 0$ ſey. In dem Falle, daß $q = m \pm n\sqrt{-1}$ iſt, hebt ſich alles unmögliche gegen einander auf, eben ſo wie alle Glieder, die n und n^3 enthalten, wenn $q = m \pm n$, geſetzt wird.

68. Die Auflöſung der cubiſchen Gleichungen zu erleichtern, muß das zweyte Glied weggeſchafft werden. Man ſetze $x = u + \frac{1}{3}a$, ſo wird aus der Gleichung, $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, die transformirte

$$u^3 - (\tfrac{1}{3}a^2 - b)\,u - (\tfrac{2}{27}a^3 - \tfrac{1}{3}ab + c) = 0.$$

69. Die Gleichung $x^3 + bx \pm c = 0$ hat zwey unmögliche Wurzeln.

Dieſe Gleichung entſteht daher, daß in dem Falle der Aufgabe (55.) die Bedingungen ſind I. $p + q - r = 0$. II. $pq - pr - qr = + b$. Die erſte giebt $p + q = r$, alſo die zweyte, $pq = r^2 + b$. Daher iſt $pq > r^2$. Wenn aber p und q mögliche Größen ſind, ſo iſt $pq < \frac{1}{4}(p + q)^2$ zufolge (36.), alſo $pq < r^2$. Wegen dieſes Widerſpruchs ſind zwey Wurzeln unmöglich.

Man ſetze $p = m + n\sqrt{-1}$, und $q = m - n\sqrt{-1}$, ſo iſt $p + q = 2m$, und $pq = m^2 + n^2$, ſo daß nun $pq > m^2$ oder $pq > \frac{1}{4}(p + q)^2$.

Die dritte Wurzel r iſt möglich, weil eine cubiſche Gleichung wenigſtens eine mögliche Wurzel hat. Es ſind $p + q$ und pq mögliche Größen.

70. Die Gleichung $x^3 - bx \pm c = 0$ hat drey mögliche Wurzeln, wenn $4b^3 > 27c^2$; zwey unmögliche, wenn $4b^3 = 27c^2$; und zwey gleiche, wenn $4b^3 = 27c^2$ iſt.

Dieſe Gleichung entſteht daher, daß in dem Falle der Aufgabe (55.) die Bedingungen ſind: I. $p + q - r = 0$; II. $pr + qr - pq = b$; III. $pqr = c$. Demnach iſt $p + q = r$, und $r^2 = b + pq$. Es ſey erſtlich $pq < \frac{1}{4}r^2$, ſo iſt $r^2 < b + \frac{1}{4}r^2$, und $\frac{3}{4}r^2 < b$. Ferner iſt $pq = \frac{c}{r}$, alſo $\frac{1}{4}r^2 > \frac{c}{r}$, und $r^3 > 4c$. Die erſtere Formel der Ungleichheit giebt $\frac{64}{27}b^3 > r^6$, die letztere giebt $r^6 > 16c^2$, alſo iſt $\frac{64}{27}b^3 > 16c^2$, das iſt $4b^3 > 27c^2$.

Es ſey zweytens $pq > \frac{1}{4}r^2$, ſo iſt $r^2 > b + \frac{1}{4}r^2$, und $\frac{3}{4}r^2 > b$, alſo $r^6 > \frac{64}{27}b^3$. Ferner, da $pq = \frac{c}{r}$

iſt, ſo iſt $\frac{1}{4}r^2 < \frac{c}{r}$, oder $r^3 < 4c$, und $r^6 < 16c^2$.
Alſo iſt $\frac{64}{27}b^3 < 16c^2$ oder $4b^3 < 27c^2$.

In dem erſtern Falle ſind p und q mögliche Größen, alſo iſt auch r möglich. In dem andern Falle ſind p und q unmöglich. Iſt nun $4b^3 > 27c^2$, ſo ſind alle drey Wurzeln möglich, weil, wenn zwey unmöglich wären, $4b^3 < 27c^2$ ſeyn müßte. Eben ſo folgt aus der Ungleichheit $4b^3 < 27c^2$, daß zwey unmögliche Wurzeln vorhanden ſind.

Es ſey drittens $pq = \frac{1}{4}r^2$, da $p + q = r$ iſt, und $p^2 + 2pq + q^2 = r^2$, ſo iſt $p^2 - 2pq + q^2 = 0$, alſo $p = q$, und $p = \frac{1}{2}r$. Daraus folgt $3p^2 = b$, und $2p^3 = c$, und hieraus $4b^3 = 27c^2$. Umgekehrt iſt $p = q$, wenn $4b^3 = 27c^2$ iſt. Denn wenn p und q ungleich wären, ſo wären auch pq und $\frac{1}{4}r^2$ ungleich, und daher auch $4b^3$ und $27c^2$.

71. Die Gleichung $x^3 - bx \pm c = 0$ kann auch aus dem Falle in der dritten Aufgabe (56.) entſtehen, wenn I. $p - q - r = 0$; II $pq + pr - qr = b$; III $pqr = c$ iſt. Die Deduction des Satzes bleibt dieſelbe, wenn q und r ſtatt p und q, ſo wie p ſtatt r geſetzt werden.

72. Aufg. Die Wurzel der Gleichung, $x^3 + bx - c = 0$, zu finden.

Aufl. Man ſetze $\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{27}b^3 = A^2$, ſo iſt $x = \sqrt[3]{(A + \frac{1}{2}c)} - \sqrt[3]{(A - \frac{1}{2}c)}$.

Bew. Da $x^3 = c - bx$ iſt, ſo ſetze man x aus zwey noch unbeſtimmten Stücken zuſammen, um den Cubus des Aggregats mit $c - bx$ zu vergleichen. Es ſey demnach $x = y - z$. Alſo

$x^3 = y^3 - 3y^2z + 3yz^2 - z^3$, oder

$x^3 = y^3 - 3yz(y - z) - z^3 = y^3 - 3yzx - z^3$

Da nun auch iſt $x^3 = c - bx$, ſo ſetze man $y^3 - z^3 = c$, und $3yz = b$, indem hier die zwey unbeſtimmten

Größen zwey Bedingungen zu ihrer Beſtimmung zu machen geſtatten. Hier iſt der Unterſchied zweyer Größen, $y^3 - z^3 = c$, und ihr Product, $y^3 z^3 = \frac{1}{27} b^3$, gegeben. Daher iſt (34.)

$$y^3 = \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{27}b^3)} + \tfrac{1}{2}c$$
$$z^3 = \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{27}b^3)} - \tfrac{1}{2}c.$$

Hieraus folgt der Satz mit der darin gebrauchten Subſtitution.

73. Die Wurzel der Gleichung, $x^3 - bx - c = 0$, zu finden, wenn nur eine mögliche vorhanden iſt.

Aufl. Man ſetze $\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{27}b^3 = A^2$, ſo iſt $x = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}c + A)} + \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}c - A)}$.

Bew. Man mache $x = y + z$, ſo iſt $x^3 = y^3 + z^3 + 3yzx$. Aus der gegebenen Gleichung iſt $x^3 = c + bx$. Folglich $y^3 + z^3 = c$, und $ayz = b$. Hier iſt die Summe $y^3 + z^3 = c$, und das Product $y^3 z^3 = \frac{1}{27}b^3$ gegeben, alſo iſt nach (II. 1)

$$y^3 = \tfrac{1}{2}c + \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 - \tfrac{1}{27}b^3)}$$
$$z^3 = \tfrac{1}{2}c - \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 - \tfrac{1}{27}b^3)}.$$

Hat c in den beiden Gleichungen (72. 73.) das Vorzeichen +, ſo wird in den Werthen von x die Größe c entgegengeſetzt genommen.

74. Die Formeln für x in beiden Gleichungen ſind dieſelben bis auf das Vorzeichen von b^3, welches mit dem von b in der Gleichung übereinkommt. Die Regel, welche in dieſen Formeln enthalten iſt, heißt Cardans Regel, ſ. Algebra, Th. I. S. 36.

75. Exempel. Es ſey $x^3 - 13,3592x - 24,6377 = 0$. (Die Gleichung kommt bey der Auflöſung einer aſtronomiſchen Aufgabe über den Abſtand des Uranus von der Sonne vor, aſtronom. Jahrbuch 1782. S. 197.). Hier iſt nach (73.) $b = 13,3592$; $c = 24,6377$, alſo

$$\tfrac{1}{4}c^2 = 151,7540$$
$$\tfrac{1}{27}b^3 = 88,3034$$

$$A^2 = 63,4506$$
$$A = 7,96559$$
$$\tfrac{1}{2}c + A = 20,28444$$
$$\tfrac{1}{2}c - A = 4,35326$$
$$\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}c + A)} = 2,72722$$
$$\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}c - A)} = 1,63282$$
$$x = 4,36004$$

76. Wenn in der Gleichung, $x^3 - bx \pm c = 0$, iſt $\frac{1}{27}b^3 > \frac{1}{4}c^2$, ſo wird die Quadratwurzel aus $\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{27}b^3$ unmöglich, obgleich in dieſem Falle die Gleichung drey mögliche Wurzeln hat. Es entſteht daher eine Schwierigkeit wegen der Anwendung der Cardaniſchen Regel auf dieſen Fall, der daher auch caſus irreducibilis heißt. Allein das mögliche iſt hier nur in einer unmöglichen Hülle verſteckt. Die Cubikwurzel aus einem Binomium von der Form $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ kann vermittelſt des binomiſchen Lehrſatzes für gebrochne Exponenten durch eine ins Unendliche fortlaufende Reihe dargeſtellt werden. In den Reihen für $\sqrt[3]{(\alpha + \beta\sqrt{-1})}$ und $\sqrt[3]{(\alpha - \beta\sqrt{-1})}$ bekommen die unmöglichen Glieder entgegengeſetzte Vorzeichen, und heben ſich in der Summe beider Reihen einander auf. Die drey Wurzeln entſtehen daher, daß die Cubikwurzel aus einer zweytheiligen unmöglichen Größe drey unmögliche Werthe hat; daher für $\sqrt[3]{(\alpha + \beta\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(\alpha - \beta\sqrt{-1})}$ neun Combinationen möglich ſind, unter welchen ſich drey finden, die mögliche Größen geben. Dieſe ſind die drey möglichen Wurzeln der cubiſchen Gleichung, ſ. Cardans Regel, II.

77. Die drey möglichen Wurzeln einer cubiſchen Gleichung laſſen ſich algebraiſch darſtellen, aber nur durch Einführung einer Größe, die wiederum durch eine cubiſche Gleichung gegeben iſt. Man ſetze in der cubiſchen Gleichung, $x^3 - bx + c = 0$, eine der Wurzeln $= f + g$; die zweyte $= f - g$; ſo iſt die dritte $= -2f$. Nun iſt

das Product, $(x-f-g)(x-f+g)(x+2f)=0$, das iſt

$$x^3-(3ff+gg)x+2f(ff-gg)=0.$$

Dieſe Gleichung werde mit einer gegebenen,

$$x^3-bx+c=0,$$

verglichen, ſo iſt

$$3ff+gg=b;\ 2f(ff-gg)=c.$$

Es ſey $ff-gg=u$, ſo iſt

$$4ff=b+u;\ 4gg=b-3u.$$

Alſo ſind die Wurzeln der Gleichung, $x^3-bx+c=0$,

$$\text{I. } \tfrac{1}{2}\sqrt{(b+u)}+\tfrac{1}{2}\sqrt{(b-3u)}$$
$$\text{II. } \tfrac{1}{2}\sqrt{(b+u)}-\tfrac{1}{2}\sqrt{(b-3u)}$$
$$\text{III. } -\sqrt{(b+u)}.$$

Die Größe u aber iſt die Wurzel der cubiſchen Gleichung,

$$u^3+bu^2=c^2,$$

da $2f(ff-gg)=c$ iſt.

Man ſetze $u=t-\frac{1}{3}b$, ſo iſt

$$t^3-\tfrac{1}{3}b^2t+\tfrac{2}{27}b^3-c^2=0.$$

Dieſe Gleichung hat nur eine mögliche Wurzel, wenn $4(\frac{1}{3}b^2)^3 < 27(\frac{2}{27}b^3-c^2)^2$, das iſt, wenn $4b^3 < 27c^2$. In dieſem Falle hat die vorgegebene Gleichung auch nur eine mögliche Wurzel, und die Hülfsgleichungen ſind unnöthig. In dem entgegengeſetzten Falle, da $4b^3 > 27c^2$ iſt, iſt bey der Hülfsgleichung dieſelbe Schwierigkeit, wie bey der vorgegebenen. Die gefundenen Wurzeln können alſo nur dienen, wenn das gegebene Glied der Gleichung die Form $u\sqrt{(b+u)}$ hat, oder, wenn die Gleichung $u^3+bu^2-c^2=0$ ſich bequemer auflöſen läßt, als die vorgegebene, oder ſtatt eines quadratiſch irrationalen Werthes von c, einen rationalen c^2 zu ſetzen. Hat die Gleichung für u drey mögliche Wurzeln, ſo geben die Formeln für x zwar neun Werthe, von welchen aber nur drey möglich ſind.

78. Um f und g durch c und eine neue unbekannte v auszudrücken, ſetze man $2f(3ff + gg) = v$, ſo iſt $8f^3 = c + v$, alſo $2f = \sqrt[3]{(c+v)}$. Ferner iſt $8fgg = v - 3c$; $4gg = \frac{v - 3c}{\sqrt[3]{(c+v)}}$. Dadurch iſt

$b = \frac{v}{\sqrt[3]{(c+v)}}$, ſo daß die Hülfsgleichung iſt

$$v^3 - b^3 v - b^3 c = 0.$$

Dieſe Gleichung hat drey mögliche Wurzeln, wenn die Gleichung, $x^3 - bx + c = 0$ eben ſo viele mögliche hat. Sie kann alſo auch, wie die zuerſt gefundene, nur als transformirte Gleichung dienen.

Die beiden Auflöſungen, wenn die Coefficienten einer cubiſchen Gleichung die eine oder die andere hier beſtimmte Form haben, ſind ſchon in dem Artikel, Cardans Regel (13.), angeführt.

79. Da der Sinus und der Coſinus eines Winkels aus dem Sinus und Coſinus des dreyfachen Winkels durch eine cubiſche Gleichung gegeben werden, ſo kann man dieſe ſehr bequem gebrauchen, um durch die Dreytheilung eines Winkels die cubiſchen Gleichungen mit drey möglichen Wurzeln aufzulöſen, ſ. Anwendung der Geometrie auf die Algebra. V.

80. Noch eine Methode, cubiſche Gleichungen mit drey möglichen Wurzeln für numeriſche Coefficienten aufzulöſen, iſt diejenige, die für alle Gleichungen durch Näherung Statt findet, ſ. unten. IX.

81. Es iſt gegeben die Summe zweyer Größen, und die Summe ihrer ſechſten Potenzen, die Größen zu finden.

Aufl. Es iſt

$$(x + y)^6 - 6xy(x + y)^4 + 9x^2y^2(x + y)^2 - 2x^3y^3 = x^6 + y^6.$$

Setzt man $x + y = a$; $x^6 + y^6 = b$, und $xy = z$, ſo iſt

$$2z^3 - 9a^2z^2 + 6a^4z - a^6 + b^6 = 0.$$

Sind die Wurzeln dieſer Gleichung gefunden, ſo wird ferner durch das Product und die Summe jede der beiden Größen gegeben.

82. Es iſt gegeben die Summe zweyer Größen und die Summe ihrer ſiebenten Potenzen, die Größen zu finden.

Aufl. Es iſt

$$(x + y)^7 - 7xy(x + y)^5 + 14x^2y^2(x + y)^3$$
$$- 7x^3y^3(x + y) = x^7 + y^7.$$

oder, nach der vorher gebrauchten Bezeichnung,

$$7az^3 - 14a^3z^2 + 7a^5z - a^7 + b^7 = 0.$$

Die Wurzeln dieſer Gleichung geben mit der Summe a die beiden geſuchten Größen.

IV. Biquadratiſche Gleichungen.

Jede biquadratiſche Gleichung iſt die Aufloſung einer von den folgenden vier Aufgaben, in welchen alle Größen abſolut, bloß nach ihrer Quantität, genommen werden.

83. Aufgabe I. Es iſt gegeben die Summe a von vier Größen; die Summe b der Producte je zweyer von ihnen; die Summe c der Producte je dreyer derſelben, und das Product d aller vier, die Gleichungen für jede der vier geſuchten Größen zu finden.

Aufl. Es ſey

I. $p + q + r + s = a$

II. $pq + pr + ps + qr + qs + rs = b$

III. $pqr + pqs + prs + qrs = c$

IV. $pqrs = d$.

Man ſetze

I. $q + r + s = \alpha$

$$\text{II } qr + qs + rs = \beta$$
$$\text{III. } qrs = \gamma,$$

ſo iſt

1) $p + \alpha = a$ oder $p^4 + p^3\alpha = a p^3$
2) $p\alpha + \beta = b$ „ $p^3\alpha + p^2\beta = b p^2$
3) $p\beta + \gamma = c$ „ $p^2\beta + p\gamma = cp$
4) $p\gamma \quad = d$ „ $p\gamma \quad = d$

Die zweyte und vierte dieſer Gleichungen werden von der Summe der beiden andern abgezogen, ſo entſteht die Gleichung,

$$p^4 = a p^3 - bp^2 + cp - d.$$

Die andern Größen werden durch ganz ähnliche Gleichungen beſtimmt. Folglich iſt, wenn x jede derſelben, bedeutet,

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = o.$$

84. Aufg. II. Die Gleichung für die vier Größen zu finden, wenn eine derſelben, s, negativ iſt.

Aufl. Der Kürze wegen wollen wir nur bemerken, welche Veränderungen in den Vorzeichen der Coefficienten wegen der Veränderung des Vorzeichens von s entſtehen.

I. Es werden d und γ negativ. Bleiben a, b, c poſitiv, ſo iſt

$$x^4 - ax^3 + b x^2 - cx - d = o.$$

II. Iſt c negativ, da a und b poſitiv bleiben, ſo iſt

$$x^4 - ax^3 + bx^2 + cx - d = o.$$

III. Es ſey a noch poſitiv, aber b negativ, ſo iſt entweder α oder β negativ, oder beide ſind es zugleich. Iſt α negativ, ſo iſt es β nothwendig auch. Es iſt alſo zugleich c negativ, und es iſt

$$x^4 - ax^3 - bx^2 + cx - d = o.$$

IV. Iſt a negativ, ſo ſind α und β negativ, folglich

$$x^4 + ax^3 - bx^2 + cx - d = o.$$

85. Aufg. III. Es ſeyn r und s negativ, ſo bleibt d poſitiv. Da γ poſitiv iſt, ſo können α und β nicht beide poſitiv ſeyn. Denn daraus würde eine Gleichung wie nach der erſten Aufgabe folgen, welche keine negative Wurzeln haben kann, da für eine negative Wurzel alle Glieder daſſelbe Vorzeichen + bekämen.

I. Es ſey α poſitiv, alſo β negativ. Noch bleibe b poſitiv, ſo muß c negativ ſeyn, aus dem eben angeführten Grunde. Es iſt alſo

$$x^4 - ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

II. Es bleibe α poſitiv, aber b ſey negativ, ſo mag c poſitiv oder negativ ſeyn. Es iſt demnach entweder

$$x^4 - ax^3 - bx^2 - cx + d = 0,$$

oder $$x^4 - ax^3 - bx^2 + cx + d = 0.$$

III, Es ſey α negativ. Bleibt a poſitiv, ſo muß einer der Coefficienten b oder c, oder beide negativ werden, welches auf eine der obigen drey Gleichungen führt. Es ſey alſo a negativ. Dabey mögen b und c erſtlich beide poſitiv oder negativ ſeyn. Die Gleichung wird alsdann

entweder $$x^4 + ax^3 + bx^2 - cx + d = 0,$$

oder $$x^4 + ax^2 - bx^2 + cx + d = 0.$$

IV. Es ſey a negativ und b allein negativ, ſo iſt

$$x^4 + ax^3 - bx^2 - cx + d = 0.$$

V. Es ſey a negativ, ſo kann c nicht negativ ſeyn, wenn b poſitiv bleibt, weil alsdann alle Vorzeichen + würden, und die Gleichung lauter negative Wurzeln hätte.

86. Aufg. IV. Es ſeyn drey Wurzeln p, q, r negativ. Dieſer Fall entſteht aus dem in der zweyten Aufgabe, wenn man die Vorzeichen von p, q, r, s daher auch von a und c ändert. Es ſind daher die verſchiedenen Gleichungen für dieſen Fall

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - d = 0$$

$$x^4 + ax^3 + bx^2 - cx - d = 0$$

$$x^4 + ax^3 - bx^2 - cx - d = 0$$
$$x^4 - ax^3 - bx^2 - cx - d = 0.$$

Dieſe Gleichungen haben dieſelben Wurzeln der Größe nach, nur entgegengeſetzte mit den Gleichungen für die zweyte Aufgabe.

87. Ein directer Beweis für den erſten Fall in der dritten Aufgabe iſt folgender. Die Vorausſetzung iſt I. $p + q - r - s = a$; II. $pq - pr - ps - qr - qs + rs = b$; III. $-pqr - pqs + prs + qrs = c$; IV. $pqrs = d$. Es ſey $p + q > r + s$. ſo daß a poſitiv iſt; ferner $pq + rs > pr + ps + qr + qs$, oder $pq + rs > (p + q)(r + s)$, ſo daß auch b poſitiv iſt. Alſo iſt $pqr + r^2 s > (p + q)(r^2 + rs)$, und $pqs + rs^2 > (p + q)(rs + s^2)$, und addirt, $pqr + pqs + r^2 s + rs^2 > (p + q)(r^2 + 2rs + s^2)$. Es iſt $r^2 s + rs^2 = rs(r + s)$, und $rs < (r^2 + s^2)$. Auch iſt geſetzt, daß $r + s < p + q$; alſo iſt $rs(r + s) < (r^2 + s^2)(p + q)$ oder $r^2 s + rs^2 < (r^2 + s^2)(p + q)$. Folglich iſt $pqr + pqs > 2rs(p + q)$, und noch mehr iſt $pqr + pqs > rs(p + q)$. Alſo iſt c nothwendig negativ.

Auf dieſelbe Art wird in dem fünften Falle derſelben Aufgabe erwieſen, daß c poſitiv ſeyn muß.

88. Es erhellt aus dieſer Entwickelung der Gleichungen in den verſchiedenen Fällen, daß in jeder biquadratiſchen Gleichung ſo viele Abwechslungen der Vorzeichen ſind, als poſitive Wurzeln, und ſo viele Folgen gleichnamiger Vorzeichen als negative Wurzeln vorhanden ſind. Doch müſſen alle Wurzeln möglich ſeyn, weil die Beſtimmung der Vorzeichen und die Ungleichheit gewiſſer Zuſammenſetzungen auf unmögliche Größen nicht anzuwenden iſt, bey welchen auch, wie ſchon oben bemerkt war, die Beziehung des Entgegengeſetzten nicht Statt hat.

89. Die biquadratiſche Gleichung, $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$, hat vier Wurzeln p, q, r, s, deren Verhalten gegen die Coefficienten durch die in Aufg. 1. angenommenen Bedingungen ausgedruckt wird. Haben

die Coefficienten, es ſey einer oder mehrere, andere Vorzeichen als in dieſer Gleichung, ſo ändern ſich dem gemäß die Vorzeichen der Wurzeln. Der Beweis iſt wie in (59.)

90. Es iſt $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = (x - p)(x - q)(x - r)(x - s)$, welchen Werth man auch für x annimmt. Der Beweis, wie in (61.).

91. Eine biquadratiſche Gleichung hat entweder vier mögliche Wurzeln, oder zwey, oder gar keine. Denn wenn eine mögliche Wurzel, p, gefunden iſt, ſie mag rational oder irrational ſeyn, ſo läßt ſich die Gleichung durch den Factor $x - p$ dividiren, ſo daß dadurch die höchſte Potenz von x in dem Quotienten die dritte wird. Iſt p rational, ſo enthält der Quotient rationale Coefficienten, und kann vollſtändig gefunden werden; iſt p irrational, ſo ſind die Coefficienten auch irrational. Der Quotient iſt das Product $(x - q)(x - r)(x - s)$; dieſes ſey $= x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma$, ſo iſt $x^4 - ax^3 + bx - cx + d = (x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma)(x - p)$. Das Product wird $= 0$, wenn der erſtere Factor $= 0$ wird. Dieſes iſt immer wenigſtens durch einen Werth von x möglich (63.). Hat die Gleichung, $x^3 - \alpha x + \beta x = 0$, drey mögliche Wurzeln, ſo hat die biquadratiſche Gleichung vier mögliche; hat jene aber nur eine mögliche Wurzel, q, ſo ſind zwey Wurzeln, r, s, unmöglich; und es iſt das Aggregat, $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d$, ein Product aus zwey quadratiſchen Factoren, $(x^2 - (p + q)x + pq)(x^2 - Ax + B)$, von welchen der zweyte durch keinen möglichen Werth von x null wird. So wie dieſer Factor nicht null wird, ſo kann, nach Beſchaffenheit der Coefficienten, a, b, c, d, auch der andere nicht null werden, und alsdann hat die Gleichung gar keine mögliche Wurzeln. Die unmöglichen Wurzeln haben die Form $m \mp n\sqrt{-1}$, als die Wurzeln eines quadratiſchen Factors, der für keinen möglichen Werth von x Null wird (42.)

92. Die Coefficienten in dem cubiſchen Factor findet man leicht. Es iſt (Aufg. I.).

$$\alpha = a - p;\ \beta = b - p\alpha;\ \gamma = c - p\beta.$$

Eben ſo findet man die Coefficienten des Factors $x^2 - Ax + B$, wenn die in dem andern Factor, $x^2 - (p+q)x + pq$ bekannt geworden ſind. Es iſt $A = a - (p+q)$, und $B = + \frac{d}{pq}$, wobey man auf die hier angenommenen Vorzeichen, und ihre Abänderungen in jedem Falle wohl achten muß. Die Wurzeln der Gleichung $x^2 - Ax + B = 0$ ſind die beiden andern Wurzeln der biquadratiſchen Gleichung neben den beiden p und q.

93. Zwey Wurzeln einer biquadratiſchen Gleichung haben die Form $m + \sqrt{n}$ und $m - \sqrt{n}$ die beiden andern haben eine ähnliche. Dadurch wird in den Coefficienten des Products der zweytheiligen Wurzelfactoren das Irrationale in den Wurzeln, und das Unmögliche, wenn n negativ iſt, gehoben.

94. Das zweyte Glied einer biquadratiſchen Gleichung, $-ax^3$, wegzuſchaffen, ſetze man $x = u + \frac{1}{4}a$, ſo erhält man eine Gleichung für u, durch deren Auflöſung u gefunden wird, welches darauf x giebt. Iſt das Vorzeichen des zweyten Gliedes +, ſo iſt $x = u - \frac{1}{4}a$ zu nehmen.

95. Eine biquadratiſche Gleichung aufzulöſen, ſind drey vorzügliche Methoden vorhanden, eine von Lodovico Ferrari, die Bombelli bekannt gemacht hat, eine von Descartes, und eine dritte von Euler. Sie folgen hier nach einander.

Lodovico Ferrari (Bombelli's) Verfahren zur Auflöſung biquadratiſcher Gleichungen.

96. Es ſey, nach weggeſchafftem zweyten Gliede, die Gleichung $x^4 = bx^2 + cx + d$, wo b, c, d auch negativ ſeyn mögen, und hier nur der Bequemlichkeit wegen gleichnamig gemacht ſind. Man ſuche eine Zahl y von der Beſchaffenheit, daß $2x^2y + y^2$ mit dem Gliede auf der rechten Seite der Gleichung ein vollſtändiges Qua=

drat werde, ſo wie es $x^4 + 2x^2y + y^2$ iſt. Es ſey alſo $(b + 2y)\,x^2 + cx + d + y^2$, das vollſtändige Quadrat einer zweytheiligen Größe $Ax + B$, ſo daß $A^2 = b + 2y$; $B^2 = d + y^2$, und $2AB = c$ iſt. Daraus folgt $4(b + 2y)(d + y^2) = c^2$, das iſt

$$8y^3 + 4by^2 + 8dy + 4bd - c^2 = 0.$$

Man habe nun die Wurzeln dieſer Gleichung gefunden, ſo ſind dadurch erſtlich die vorher durch A und B bezeichneten Größen bekannt. Da

$$x^4 + 2x^2y + y^2 = (b + 2y)\,x^2 + cx + d + y^2$$
$$= (\pm Ax \pm B)^2,$$

ſo iſt $x^2 + y = \pm Ax \pm B.$

Aus dieſen beiden quadratiſchen Gleichungen werden nach (38.) die vier Werthe von x gefunden.

Da y drey Werthe hat, die unmöglichen, wenn ſolche vorhanden ſind, mit gerechnet, ſo haben A^2 und B^2 auch drey Werthe, folglich A und B jedes drey Paar Werthe mit entgegengeſetzten Vorzeichen. Hat der Coefficient c in der biquadratiſchen Gleichung das Vorzeichen $+$, wie hier geſetzt iſt, ſo bekommen A und B einerley Vorzeichen, hat jener das Vorzeichen $-$, ſo erhalten A und B verſchiedene. Solchergeſtalt entſtehen durch die drey Werthe von y, und die drey Doppelwerthe von A und B ſechs Gleichungen, deren jede durch dieſe: $x^2 + y = Ax + B$, oder $x^2 - Ax - B + y = 0$ ausgedruckt wird. Jede derſelben enthält ein paar Wurzeln der biquadratiſchen Gleichung.

97. Um dieſes zu begreifen, bemerke man, daß aus den vier Wurzeln, p, q, r, s, dieſer Gleichung ſechs Verbindungen je zweyer gemacht werden können, nämlich pq, pr, ps, qr, qs, rs. Da x jede dieſer Wurzeln bedeuten kann, ſo ſind die beiden Wurzeln der ſechs quadratiſchen Gleichungen in dieſen ſechs Paaren enthalten. Sind alle vier Wurzeln, p, q, r, s, möglich, ſo müſſen alle Werthe von y, A, B, mögliche Größen ſeyn, weil das unmögliche ſich nicht in beiden Wurzeln einer quadratiſchen Gleichung heben kann. Sind zwey

derſelben unmöglich, ſo können A und B nur einen möglichen Werth haben, wenn auch alle drey Werthe von y möglich ſind. In vier unter den ſechs quadratiſchen Gleichungen iſt eine Wurzel möglich, die andere unmöglich, das erſtere dadurch, daß ſich das unmögliche bey der Entwickelung der Wurzelgrößen hebt, das andere dadurch, daß dieſes nicht geſchieht. In einer der quadratiſchen Gleichungen nur ſind beide Wurzeln möglich, ſo wie in einer beide unmöglich. Sind alle vier Wurzeln der biquadratiſchen Gleichung unmöglich, ſo kann keine der ſechs quadratiſchen Gleichungen mögliche Wurzeln haben.

98. Exempel I. Es ſey

$$x^4 = 220x^2 - 240x - 8064 = 0,$$

ſo iſt $b = +220$; $c = -240$; $d = -8064$, und die Hülfsgleichung

$$8y^3 + 880y^2 - 64512y - 7153920 = 0,$$

oder

$$y^3 + 110y^2 - 8064y - 89420 = 0.$$

Ohne dieſe Gleichung nach den Regeln der Kunſt zu behandeln ſuche man die poſitive Wurzel durch Vergleichung je zweyer entgegengeſetzten Glieder zu entdecken. Das erſte und dritte giebt y nahe $= 90$; das zweyte und vierte ebenfalls. Verſucht man $+90$, ſo iſt dies wirklich eine Wurzel. Nun läßt ſich die Gleichung durch $y - 90$ dividiren, und der Quotient iſt eine quadratiſche Gleichung, deren Wurzeln -108 und -92 ſind. Die drey Werthe von y ſind alſo, $+90$; -92; -108. Nimmt man $y = +90$, ſo iſt $A^2 = 400$, und $A = \pm 20$. Ferner $B^2 = +36$, und $B = \mp 6$. Zu bemerken iſt, daß wegen des negativen Werthes von c die beiden, A, B, entgegengeſetzte Vorzeichen haben. Wir bekommen nun wegen der doppelten Werthe von A und B die beiden Gleichungen,

$$x^2 - 20x = -96$$
$$x^2 + 20x = -84.$$

Die Wurzeln der erſtern Gleichung ſind $+10 \pm 2$; der zweyten, -10 ± 4. Die Wurzeln der biquadratiſchen Gleichung ſind eben dieſe, nämlich $+12$; $+8$; -6; -14.

Nimmt man $y = -92$, ſo entſtehen die Gleichungen

$$x^2 - 6x = +72,$$
$$x^2 + 6x = +112,$$

deren erſtere die Wurzeln $+12$, -6; die andere die Wurzeln $+8$; -14 hat.

Exempel II. Die vorgegebene Gleichung ſey

$$x^4 = 16x + 12.$$

Hier iſt $b = 0$; $c = +16$; $d = +12$. Die Hülfsgleichung iſt

$$8y^3 + 96y - 256 = 0.$$

Dieſe Gleichung hat nur eine mögliche Wurzel $= +2$. Es iſt $A = \pm 2$; $B = \pm 4$, und die beiden quadratiſchen Gleichungen ſind,

$$\text{I. } x^2 - 2x = 2\,;\ \text{II. } x^2 + 2x = -6.$$

Die Wurzeln der erſtern ſind $1 \pm \sqrt{3}$; der zweyten, $-1 \pm \sqrt{-5}$, welche vier Wurzeln der biquadratiſchen zukommen.

Methode des Descartes.

99. Descartes hat zuerſt in ſeiner Geometrie, 3. Buch, gewieſen, wie eine biquadratiſche Gleichung in zwey quadratiſche zerfällt werden könne. Er zeigt aber nicht, wie man die Coefficienten in dieſen finde, ſondern ſetzt ſie ohne Erläuterung hin. Lambert hat in ſeinen Beyträgen zum Gebrauche der Mathematik, 2 Th. Art. VIII. dieſe Methode vorgetragen, aber den Zuſammenhang der Hülfsgleichung mit der gegebenen nicht erklärt, welches ich hier thun werde.

100. Die gegebene Gleichung ſey

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

wo A, B, C auch negativ ſeyn können, und es zum Theil oder alle ſind, wenn x einen poſitiven Werth hat. Iſt $x^4 + Ax^2 + Bx + C = (x^2 + ax + b)(x^2 - ax + c)$, ſo müſſen a, b, c mögliche Werthe erhalten. Dieſe ſollen nun aus den gegebenen Größen, A, B, C, hergeleitet werden. Das Product entwickelt iſt

$$x^4 + (b + c - a^2)\,x^2 + (ac - ab)\,x + bc.$$

Alſo iſt

$$A = b + c - a^2 \;;\; B = ac - ab\,;$$
$$C = bc.$$

Hier iſt $b + c = A + a^2$, und $c - b = \frac{B}{a}$,

alſo $2c = A + \frac{B}{a} + a^2$, und $2b = A - \frac{B}{a} + a^2$.

Nunmehr iſt 4bc, oder $4C = A^2 - \frac{B^2}{a^2} + 2Aa^2 + a^4$,

oder

$$a^6 + 2Aa^4 + (A^2 - 4C)\,a^2 - B^2 = 0.$$

Dieſes iſt eine cubiſche Gleichung für a^2. Sind alle drey Wurzeln möglich, ſo ſind ſie, wegen des Gliedes $-B^2$, entweder alle drey, (wenn A negativ und $A^2 > 4C$ iſt) oder eine poſitiv, zufolge (58.). Die Vorzeichen des zweyten und dritten Gliedes mögen auch — ſeyn. Iſt nur eine Wurzel möglich, ſo iſt dieſe poſitiv. Denn da der Werth der Gleichung für $a = 0$ iſt $-B^2$, und für ein hinlänglich großes poſitive a poſitiv wird, ſo geſchieht der Übergang von dem negativen Werthe zum poſitiven für ein poſitives aa. In beiden Fällen iſt alſo a eine mögliche Größe, daher auch b und c mögliche Werthe bekommen, und die biquadratiſche Gleichung läßt ſich in zwey quadratiſche Factoren zerfällen.

101. Die biquadratiſche Gleichung habe vier mögliche Wurzeln, p, q, r, s, poſitive oder negative, ſo hat ſie vier mögliche einfache Factoren, $x - p$; $x - q$; $x - r$; $x - s$. Je zwey von dieſen geben den einen

quadratiſchen Factor, und die beiden übrigen den andern, daher hat in dem Factor $x^2 - ax + c$ der Coefficient a einen der ſechs Werthe, $p + q$; $p + r$; $p + s$; $q + r$; $q + s$; $r + s$, und es wird für a eine Gleichung vom ſechſten Grade gefunden. Weil aber, wegen des fehlenden zweyten Gliedes in der biquadratiſchen Gleichung, $p + q + r + s = 0$ iſt, ſo ſind drey jener Werthe von a den andern gleich und entgegengeſetzt, und daher hat a drey poſitive, und drey eben ſo große negative Werthe, und aa wird durch eine cubiſche Gleichung gegeben, die in dieſem Falle drey mögliche poſitive Wurzeln, als Werthe von aa, hat.

102. Die biquadratiſche Gleichung habe zwey mögliche Wurzeln, p, q, und zwey unmögliche, r, s. Die letztern haben die Form $m + n\sqrt{-1}$ und $m - n\sqrt{-1}$, deren Summe, 2m, möglich iſt. Nun ſind für a nur zwey mögliche Werthe $p + q$ und $2m = r + s$ vorhanden, da die andern vier Werthe eine unmögliche Größe, $n\sqrt{-1}$, enthalten. Jene beiden Werthe ſind gleich und entgegengeſetzt. Die cubiſche Gleichung für aa hat in dieſem Falle nur eine mögliche poſitive Wurzel.

103. Die biquadratiſche Gleichung habe vier unmögliche Wurzeln. In dieſem Falle werden ihre Factoren $x^2 + ax + b$ und $x^2 - ax + c$ durch keinen möglichen Werth von x auf 0 gebracht, oder, die Gleichungen $x^2 + ax + b = 0$ und $x^2 - ax + c = 0$ haben unmögliche Wurzeln. Die Wurzeln jener bezeichne man durch $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, die Wurzeln dieſer durch $\gamma \pm \delta\sqrt{-1}$. Die Summe derſelben iſt $= 0$, wie die Summe von vier möglichen Wurzeln, alſo $\alpha + \gamma = 0$. Nimmt man nun je zwey zuſammen, ſo ſind die Combinationen, I. 2α; II. $(\beta + \delta)\sqrt{-1}$; III. $(\beta - \delta)\sqrt{-1}$; IV. $\delta - \beta)\sqrt{-1}$; V, $-(\beta + \delta)\sqrt{-1}$; VI. $2\gamma = 2\alpha$. Dieſes ſind die ſechs Werthe von a. Die Quadrate von I. und VI. ſind ſich gleich und poſitiv; die Quadrate von II. und V. ſind ſich gleich, aber beide negativ; ſo auch die Quadrate von III. und IV. Die cubiſche Gleichung für a^2 hat

nun drey mögliche Wurzeln, $4\alpha^2; -(\beta+\delta)^2; -(\beta-\delta)^2$. Da zwey derſelben negativ ſind, ſo hat a nur zwey mögliche, entgegengeſetzte, gleiche Werthe.

104. Iſt nun a gefunden, ſo hat man die quadratiſchen Gleichungen, $x^2+ax+b=0$, und $x^2-ax+c=0$, aufzulöſen, welche die Wurzeln der biquadratiſchen enthalten. Aus der erſten iſt

$$x=-\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2-b)},$$

aus der zweyten

$$x=+\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2-c)}.$$

Es iſt $\tfrac{1}{4}a^2-b=\frac{B}{2a}-\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{4}a^2$,

$$\tfrac{1}{4}a^2-c=-\frac{B}{2a}-\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{4}a^2.$$

Dieſe Größen müſſen möglich und poſitiv ſeyn, wenn x möglich ſeyn ſoll.

105. Exempel. Die Gleichung, $x^4-220x^2+240x+8064=0$, aufzulöſen.

Die cubiſche Gleichung iſt $a^6-440a^4+16144a^2-57600=0$. Man ſuche die Wurzeln dieſer Gleichung durch Vergleichung je zweyer entgegengeſetzter Glieder. Erſtlich ſetze man, daß $16144a^2$ etwas größer als 57600 ſey, ſo iſt a^2 etwa $+4$. Dieſen Werth verſucht, findet ſich, daß $+4$ eine Wurzel iſt. Nun läßt ſich die Gleichung durch a^2-4 dividiren, und dadurch auf eine quadratiſche herabſetzen. Die Wurzeln dieſer Gleichung ſind $+36$ und $+400$, einerley mit den beiden übrigen Wurzeln der cubiſchen Gleichung, außer der Wurzel $+4$. Nimmt man $a^2=4$, ſo iſt $b=-168$, und $c=-48$, und die beiden quadratiſchen Gleichungen ſind, $x^2+2x-168=0$; und $x^2-2x-48=0$. Die Wurzeln jener ſind $+12$ und -14; die Wurzeln dieſer $+8$ und -6. Dieſe vier Wurzeln ſind demnach die Wurzeln der vorgegebenen biquadratiſchen Gleichung.

Setzt man $aa = +36$, ſo iſt $b = -112$; $c = -72$; $x^2 + 6x - 112 = 0$; und $x^2 - 6x - 72 = 0$. Die Wurzeln der erſtern Gleichung ſind $+8$ und -14; der zweyten $+12$ und -6.

Setzt man $aa = +400$, ſo iſt $b = +84$; $c = +96$; $x^2 + 20x + 84 = 0$; und $x^2 - 20x + 96 = 0$. Jene Gleichung hat die Wurzeln -6; -14: dieſe, $+12$; $+8$.

Eulers Auflöſung biquadratiſcher Gleichungen.

106. Euler hat in einer Abhandlung: Conjectatio de formis radicum aequationum, Comm. Petrop vet. T. VI. eine Auflöſung biquadratiſcher Gleichungen gelehrt, die von dem Verfahren bey cubiſchen Gleichungen hergeleitet iſt. Sie beſteht darin, die Wurzeln aus drey Stücken, und zwar Quadratwurzeln, zuſammen zu ſetzen. In Eulers Algebra, 2 Th. 1. Abſchn. 15. Cap. iſt ſie auch vorgetragen.

107. Es ſey $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, wo x die Wurzeln der Gleichung bedeutet, und p, q, r, Größen ſind, woraus die Coefficienten zuſammengeſetzt werden ſollen, hier aber nicht Wurzeln der Gleichung, wie oben, bedeuten. Es iſt

$$x^2 = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}.$$

Man ſetze $p + q + r = f$, ſo iſt

$$x^2 - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr},$$

und quadrirt

$$x^4 - 2fx^2 + f^2 = 4pq + 4pr + 4qr$$
$$+ 8\sqrt{ppqr} + 8\sqrt{pqqr} + 8\sqrt{pqrr}.$$

Man ſetze $pq + pr + qr = g$, und $pqr = h$, ſo iſt

$$x^4 - 2fx^2 + f^2 = 4g + 8(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})\sqrt{h},$$

oder $$x^4 - 2fx^2 - 8x\sqrt{h} + f^2 - 4g = 0.$$

Wird dieſe Gleichung mit einer gegebenen biquadratiſchen Gleichung, worin der zweyte Terminus fehlt, verglichen, ſo werden f, g, h durch die Coefficienten in der-

ſelben beſtimmt; es iſt alſo noch nöthig p, q, r aus f, g, h herzuleiten. Da f die Summe derſelben, g die Summe der Binionen, und h das Product aller drey iſt, ſo ſind p, q, r die Wurzeln einer cubiſchen Gleichung, in welcher die Coefficienten f, g, h, ſind, nämlich der Gleichung,

$$y^3 - fy^2 + gy - h = 0.$$

Sind nun die Wurzeln dieſer Gleichung gefunden, ſo werden daraus die Wurzeln der biquadratiſchen hergeleitet.

108. Es ſey die gegebene biquadratiſche Gleichung

$$x^4 - a\ ^2 - bx + c = 0,$$

wo um der bequemen Vergleichung willen die Vorzeichen dieſelben mit denen in der vorher aus der angenommenen Form der Wurzel hergeleiteten Gleichung ſind. Man laſſe beide Gleichungen dieſelben ſeyn, ſo iſt I. $2f = a$, und $f = \frac{1}{2}a$. II. $8\sqrt{h} = b$, alſo $h = \frac{1}{64}b^2$. III. $f^2 - 4g = c$, alſo $g = \frac{1}{4}(f^2 - c)$, oder $g = \frac{1}{16}a^2 - \frac{1}{4}c$. Solchergeſtalt iſt die cubiſche Hülfsgleichung, $y^3 - \frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{4}(\frac{1}{4}aa - c)\,y - \frac{1}{64}b^2 = 0$, und es kommt nur darauf an, die Wurzeln derſelben zu finden.

109. Da die Wurzeln aus p, q, r ſowohl negativ als poſitiv ſeyn können, ſo laſſen ſich aus $\pm\sqrt{p}$; $\pm\sqrt{q}$; $\pm\sqrt{r}$ acht verſchiedene Summen machen, wovon aber in jedem Falle nur vier Statt finden, aus folgendem Grunde. Wenn in der biquadratiſchen Gleichung der Coefficient von x das Vorzeichen — hat, ſo iſt $\sqrt{h}$ oder $\sqrt{p}\cdot\sqrt{q}\cdot\sqrt{r}$. poſitiv, alſo ſind die vier Wurzeln der biquadratiſchen Gleichung $+\sqrt{p} \pm \sqrt{q} \pm \sqrt{r}$, und $-\sqrt{p} \pm \sqrt{q} \mp \sqrt{r}$. Hat aber derſelbe Coefficient das Vorzeichen +, ſo iſt $\sqrt{h}$ negativ, alſo ſind die vier Wurzeln $+\sqrt{p} \pm \sqrt{q} \pm \sqrt{r}$, und $-\sqrt{p} \pm \sqrt{q} \pm \sqrt{r}$.

Hat die cubiſche Gleichung drey mögliche poſitive Wurzeln, ſo hat die biquadratiſche vier mögliche Wurzeln. Sind unter den drey möglichen Wurzeln jener negative vorhanden, ſo ſind alle vier Wurzeln der biquadratiſchen Gleichung unmöglich. Hat die cubiſche Gleichung unmög=

liche Wurzeln, ſo hat die biquadratiſche zwey derglei- chen. Denn die einzige mögliche Wurzel, p, der cubi- ſchen Gleichung iſt poſitiv, wegen des Gliedes h, welches immer poſitiv ($=\frac{1}{64}b^2$) iſt, nach der ſchon in (100) ge- machten Bemerkung. Alſo iſt $\sqrt{p}$ eine mögliche Größe. Das Unmögliche in der Summe der Wurzeln aus den bei- den andern $\pm\sqrt{q}\pm\sqrt{r}$, hebt ſich, aber nicht in dem Unterſchiede derſelben, $\pm\sqrt{q}\mp\sqrt{r}$, da die Summe $q+r$, eine mögliche Größe iſt, aber nicht ihr Unterſchied. Daher hat die biquadratiſche Gleichung zwey mögliche Wurzeln.

110. Exempel. $x^4-220x^2+240x+8064=0$. Hier iſt $f=110$; $h=900$; $g=1009$. Die cubiſche Hülfsgleichung iſt

$$y^3-110y^2+1009y-900=0.$$

Dieſe hat drey poſitive Wurzeln, wenn alle möglich ſind. Sucht man die kleinſte, ſo giebt die Vergleichung der bei- den letzten Terminorum für y nahe +1. Verſucht man dieſen Werth, ſo iſt eine Wurzel = +1. Die Summe der beiden übrigen iſt = 109; ihr Product = 900. Dieſe ſind alſo $\frac{109}{2}\pm\sqrt{\frac{8281}{4}}=\frac{109}{2}\pm\frac{91}{2}$, das iſt +100 und +9. Die Wurzeln der biquadratiſchen Gleichung ſind, wegen des Vorzeichens + in dem Gliede, $+240x$,

$$+1+3-10=-6$$
$$+1-3+10=+8$$
$$-1+3+10=+12$$
$$-1-3-10=-14.$$

Warings Methode zur Auflöſung biquadratiſcher Gleichungen.

111. Waring hat in den Philoſophical Trans- actions, 1779, für die Wurzeln der Gleichungen eine Form angegeben, die er für allgemein hält. Hier folgt

die Anwendung, die er auf biquadratiſche Gleichungen macht, unabhängig von der allgemeinen Form, mit einigen Zuſätzen.

112. Die Wurzel einer ſolchen Gleichung werde aus drey Stücken zuſammengeſetzt, nämlich $x = p + q + r$; ſo iſt

$$\begin{aligned} x^4 = \; & p^4 + 4p^3 q + 4p^3 r \\ + \; & q^4 + 4q^3 p + 4q^3 r \\ + \; & r^4 + 4r^3 p + 4r^3 q \\ + \; & 6p^2q^2 + 6p^2 r^2 + 6q^2r^2 \\ + \; & 12p^2 qr + 12q^2 pr + 12r^2 pq, \end{aligned}$$

nämlich alle Combinationen mit Wiederholungen aus den drey Größen p, q, r, mit den als Factoren zugefügten Verſetzungszahlen. S. Combination (33.), und polynomiſcher Lehrſatz.

Dieſe Partialproducte theile man in drey Theile, ein Product A aus $p + q + r$ in drey eintheilige Factoren, ein Product B aus $(p + q + r)^2$ in zwey ſolche Factoren, und einen Reſt C, um x und x^2 in den Werth von x^4 zu bringen. Dieſes kann auf mehr als eine Art geſchehen. Es ſey

$$A = (4p^2 r + 4q^2 r)(p + q + r)$$
$$B = (4pq + 2r^2)(p + q + r)^2,$$

ſo iſt

$$C = p^4 + q^4 - r^4 + 4pqr^2 - 2p^2q^2,$$

oder

$$C = (p^2 + q^2)^2 - (r^2 - 2pq)^2,$$

und es iſt

$$x^4 = (4pq + 2r^2)x^2 + 4r(p^2 + q^2)x$$
$$+ (p^2 + q^2)^2 - (r^2 - 2pq)^2.$$

112. Die gegebene Gleichung ſey

$$x^4 = ax^2 + bx + c,$$

mit jener Normalgleichung identiſch, ſo iſt

$$a = 4pq + 2r^2;\quad b = 4r(p^2 + q^2);$$
$$c = (p^2 + q^2)^2 - (r^2 - 2pq)^2.$$

Hieraus ergiebt ſich ſogleich

$$c = \frac{b^2}{16r^2} - (2r^2 - \tfrac{1}{2}a)^2,$$

und daraus für r die Gleichung

$$r^6 - \tfrac{1}{2}ar^4 + (\tfrac{1}{16}a^2 + \tfrac{1}{4}c)\,r^2 - \tfrac{1}{64}b^2 = 0.$$

Die beiden andern Theile, p, q, der Wurzel x haben eine andere Relation zu den gegebenen Größen a, b, c, und müſſen daher durch eine andere Gleichung, als die für r, gefunden werden. Sie ſelbſt haben einerley Relalation gegen die Coefficienten, a, b, c, und werden daher durch einerley Gleichung gefunden. Zu jedem Werthe von r gehört ein Werth von p und von q. Bezeichnet man dieſe überhaupt durch y, ſo wird die Gleichung für y auf den zwölften Grad ſteigen müſſen, um ſowohl die ſechs Werthe von p als die von q darzuſtellen.

Iſt r gefunden, ſo werden p und q durch die Gleichungen, $pq = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}r^2$, und $p^2 + q^2 = \frac{b}{4r}$ beſtimmt. Es ſey, um abzukürzen, $2pq = \alpha$; $p^2 + q^2 = \beta$, ſo iſt

$$p + q = \pm\sqrt{(\beta + \alpha)}$$
$$p - q = \pm\sqrt{(\beta - \alpha)},$$

woraus p und q einzeln bekannt werden.

Zwey gleiche aber entgegengeſetzte Werthe von r mit dem zugehörigen Doppelwerthe von $p + q$ verbunden geben die vier Wurzeln der biquadratiſchen Gleichung.

114. Exempel. Es ſey $x^4 - 220x^2 + 240x + 8064 = 0$, ſo iſt die Gleichung für r,

$$r^6 - 110r^4 + 1009r^2 - 900 = 0.$$

Die Werthe von r ſind ± 1; ± 9; ± 100. Das erſte Paar giebt $p^2 + q^2 = \pm 60$; $2pq = +109$. Alſo iſt $p + q = \pm\sqrt{(\pm 60 + 109)}$, oder $p + q = \pm 13$ und ± 7, und die Wurzeln x ſind

$$+7+1=+8 \qquad +13-1=+12$$
$$-7+1=-6 \qquad -13-1=-14.$$

Die andern beiden Werthe von r geben dieſelben Wurzeln x.

115. Zu dieſer und zugleich zu der Euleriſchen Methode diene als Beyſpiel noch eine Gleichung mit zwey unmöglichen Wurzeln,

$$x^4+14x^2-40x-19=0.$$

Hieraus entſteht die Hülfsgleichung,

$$r^6+7r^4+17r^2-25=0.$$

Ein Paar Wurzeln dieſer Gleichung iſt ± 1. Da $a = -14$; $b = +40$, ſo iſt $2pq = -8$; $p^2 \mp q^2 = \pm\ 0$; $p+q = \pm\sqrt{(\pm 10 - 8)}$, und die vier Werthe von x ſind,

$$+\sqrt{2}+1 \quad ; \quad +3\sqrt{-2}-1$$
$$-\sqrt{2}+1 \quad ; \quad -3\sqrt{-2}-1.$$

116. Die Gleichung für r^2 iſt dieſelbe mit der nach der Euleriſchen Auflöſung gefundenen für y, wenn man x^2 für y ſetzt, und das Vorzeichen von c ändert. Denn die Wurzeln jener Gleichung ſind die Quadrate von den Theilen, in welche die Wurzeln der biquadratiſchen zerlegt ſind. Aber ſie gilt nicht für die andern beiden Theile p, q, der Wurzel x. Die Coefficienten in der biquadratiſchen Normalgleichung ſind nach der Euleriſchen Normalgleichung anders zuſammen geſetzt, als nach der Waringſchen.

117. Die Zerfällung von $x^4 = (p+q+r)^4$ läßt ſich auch folgendergeſtalt vornehmen,

$$x^4 = 6(p^2+q^2+r^2)x^2 - 8(p^3+q^3+r^3)x$$
$$-3(p^2+q^2+r^2)^2 + 6(p^4+q^4+r^4).$$

Dieſe wird aus den Formeln für die Combinationen und Summen der Potenzen von den combinirten Größen (Art. Combination, 43.) leicht hergeleitet, durch Wegſchaffung der Combinationen B und C. Die Combination D iſt hier $=0$.

118. Aufg. Es iſt gegeben die Summe von vier Größen, die in geometriſcher Progreſſion ſind, und die Summe ihrer Quadrate, die Größen zu finden.

Aufl. Es ſey das erſte Glied $= x$, der Exponent $= u$; die Summe der Glieder $= a$; die Summe der Quadrate $= b^2$, ſo iſt

$$\text{I.} \quad x\,(1 + u + u^2 + u^3) = a$$

$$\text{II.} \quad x^2\,(1 + u^2 + u^4 + u^6) = b^2.$$

Man multiplicire die erſte Gleichung durch $1 - u$, die andere durch $1 - u^2$, ſo iſt

$$\text{III.} \quad x\,(1 - u^4) = a\,(1 - u)$$

$$\text{IV.} \quad x^2\,(1 - u^8) = b^2\,(1 - u^2).$$

Durch die Diviſion wird

$$\text{V.} \quad x\,(1 + u^4) = \frac{b^2}{a}\,(1 + u)$$

$$\text{VI.} \quad \frac{1 + u^4}{1 - u^4} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1 + u}{1 - u}.$$

$$\text{VII.} \quad \frac{1 + u^4}{1 + 2u + 2u^2 + 2u^3 + u^4} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\text{VIII.} \quad \frac{1 + u^4}{2u + 2u^2 + 2u^3} = \frac{b^2}{a^2 - b^2}.$$

Man ſetze $\frac{2b^2}{a^2 - b^2} = c$, ſo iſt

$$\text{IX.} \quad u^4 - cu^3 - cu^2 - cu + 1 = 0.$$

Dieſe Gleichung aufzulöſen iſt die Zerfällung derſelben in zwey Factoren der bequemſte Weg. Man ſetze

$$u^4 - cu^3 - cu^2 - cu + 1 =$$
$$(u^2 - mu + 1)\,(u^2 + nu + 1),$$

ſo iſt $m - n = c$, und $mn = c + 2$.

Alſo iſt (34.)

$$m = \tfrac{1}{2}c + \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + c + 2)}$$
$$n = -\tfrac{1}{2}c + \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + c + 2)}.$$

Die biquadratiſche Gleichung wird $= 0$, wenn der eine oder der andere ihrer beiden Factoren $= 0$ iſt. Setzt man $u^2 - mu + 1 = 0$, ſo iſt $u = \frac{1}{2}m \mp \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - 1)}$. Wird $u^2 + nu + 1 = 0$ geſetzt, ſo iſt $u = -\frac{1}{2}n \pm \sqrt{(\frac{1}{4}n^2 - 1)}$ Dieſe ſind die vier Wurzeln der Gleichung für u. Sollen ſie alle vier möglich ſeyn, ſo muß ſowohl m^2 als n^2 größer als 4 ſeyn.

Es iſt aber $n^2 = \frac{1}{2}c^2 + c + 2 - c\sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + c + 2)}$, alſo $n^2 - 4 = c(\frac{1}{2}c + 1) - 2 - c\sqrt{((\frac{1}{2}c + 1)^2 + 1)}$. Dieſes iſt offenbar eine negative Größe, da die Wurzelgröſſe größer als $\frac{1}{2}c + 1$ iſt.

Die Gleichung für u hat alſo immer wenigſtens zwey unmögliche Wurzeln. Die möglichen, wenn ſolche vorhanden ſind, ſind in dem Factor $u^2 - mu + 1$, wenn derſelbe $= 0$ geſetzt wird, enthalten.

Das Product der beiden möglichen Wurzeln, $\frac{1}{2}m + \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - 1)}$ und $\frac{1}{2}m - \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - 1)}$ iſt $= +1$, eben ſo wie das Product der beiden unmöglichen Wurzeln; das Product aller iſt $= +1$, gleich dem gegebenen Gliede der Gleichung. Iſt die eine mögliche Wurzel $= f$, ſo iſt die andere $= \frac{1}{f}$; eben ſo mit den unmöglichen. Die eine iſt das reciproke der andern. Daher heißt die Gleichung eine reciproke. Setzt man in derſelben $\frac{1}{z}$ ſtatt u, und multiplicirt alle Glieder mit z, ſo erhält man dieſelbe Gleichung wie für u.

Die Duplicität und Reciprocität der möglichen Wurzel entſteht daher, daß man in einer geometriſchen Reihe den Exponenten e umkehren muß, $\frac{1}{e}$ ſtatt e nehmen, wenn die Glieder in entgegengeſetzter Folge genommen werden.

Nachdem u gefunden iſt, wird x mittelſt der Gleichung I. bekannt, oder auch durch die aus I. und IX. hergeleitete Gleichung,

$$(2 + c)x = (1 + c)a - au.$$

Es iſt nämlich

$$x(u^4 + u^3 + u^2 + u) = au,$$

und

$$x(u^4 - cu^3 - cu^2 - cu + 1) = 0,$$

alſo

$$(1 + c)(u^3 + u^2 + u)x - x = au.$$

Die Gleichung I. durch $1 + c$ multiplicirt iſt

$$(1 + c)(u^3 + u^2 + u)x + (1 + c)x = (1 + c)a,$$

folglich iſt

$$(1 + c)x + x = (1 + c)a - au,$$

oder

$$\frac{2aa}{aa - bb}x = \frac{aa + bb}{aa - bb}a - au.$$

119. Aufg. Es iſt gegeben die Summe von fünf Größen, die in geometriſcher Progreſſion ſind, und die Summe ihrer Quadrate, die Größen zu finden.

Aufl. Es ſey das erſte Glied $= x$, der Exponent $= u$, die Summe der Glieder $= a$, die Summe ihrer Quadrate $= b^2$, ſo iſt

$$\text{I. } x(1 + u + u^2 + u^3 + u^4) = a$$

$$\text{II. } x^2(1 + u^2 + u^4 + u^6 + u^8) = b^2$$

Auf gleiche Art wie in (118.) wird erhalten

$$\frac{1 + u^5}{1 - u^5} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1 + u}{1 - u}.$$

Man dividire die Zähler durch $1 + u$, die Nenner durch $1 - u$, ſo entſteht

$$\frac{1 - u + u^2 - u^3 + u^4}{1 + u + u^2 + u^3 + u^4} = \frac{bb}{aa}.$$

Hieraus iſt

$$\frac{1 + u^2 + u^4}{u + u^3} = \frac{aa + bb}{aa - bb}.$$

Es ſey $\frac{aa + bb}{aa - bb} = c$, ſo iſt

$$u^4 - cu^3 + u^2 - cu + 1 = 0.$$

Zerlegt man dieſe Gleichung in die Factoren $(u^2 - mu + 1)$ $(u^2 + nu + 1)$, ſo iſt $m - n = c$; $mn = 1$, alſo

$$m = \tfrac{1}{2}c + \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + 1)}$$
$$n = -\tfrac{1}{2}c + \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + 1)},$$

und die vier Wurzeln ſind

$$u = \tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}mm - 1)}$$
$$u = -\tfrac{1}{2}n \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}nn - 1)}.$$

Da $nn = \tfrac{1}{2}cc + 1 - c\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + 1)}$,
alſo $nn - 4 = \tfrac{1}{2}cc - 1 - c\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + 1)}$,
ſo iſt das zweyte Paar Wurzeln unmöglich.

120. Nach dieſer Methode kann man die Aufgaben in (118. 119.) für jede Anzahl von Größen auflöſen. Es ſey allgemein

$$\text{I.}\quad x(1 + u + u^2 \ldots + u^{r-1}) = a$$
$$\text{II.}\quad x^2(1 + u^2 + u^4 \ldots + u^{2r-2}) = b^2$$

und für ein gerades r, $\frac{2bb}{aa - bb} = c$,

ſo iſt

$$u^r - cu^{r-1} - cu^{r-2} \ldots - cu^2 - cu + 1 = 0.$$

Für ein ungerades r ſey $\frac{aa + bb}{aa - bb} = c$,

ſo iſt

$$u^{r-1} - cu^{r-2} + u^{r-3} \ldots - cu^3 + u^2 - cu + 1 = 0.$$

121. Von den beiden Aufgaben in (118, 119.) ſind in den Anfangsgründen der Algebra von Saunderſon, am Ende des erſten Theils andere Auflöſungen anzutreffen, die aber daſelbſt (pag. 260 — 263 der franzöſiſchen Überſetzung) vier Seiten groß Quart einnehmen. Zur Erläuterung der Theorie der Gleichungen und zur Übung im Rechnen ſind dieſe Aufgaben nützlich.

122. Man ſieht aus der hier geführten Rechnung ſehr gut ein, wie die Irrationalität der Coefficien-

ten eine Urſache iſt, daß die Gleichung auf einen Grad ſteigt, der höher iſt, als die Anzahl der geſuchten Größen, wenn die Irrationalität gehoben wird. In beiden Aufgaben läßt die Natur derſelben nur zwey mögliche Werthe der geſuchten Größe zu, aber die Gleichung für dieſe beiden Werthe hat irrationale Coefficienten. Wird ſie mit einem gewiſſen Factor multiplicirt, ſo erhält man zwar rationale Coefficienten, aber zugleich unmögliche Wurzeln.

V. Von den höhern Gleichungen.

123. Die frühzeitige Entdeckung der Methoden zur Auflöſung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade ließ hoffen, daß man mit der Zeit auch Mittel zur Auflöſung höherer Gleichungen finden würde. Allein in einem Zeitraume von mehr als zweyhundert Jahren iſt alle Bemühung hierin vergeblich geweſen. Man hat die Eigenſchaften der Gleichungen vollſtändiger, allgemeiner und beſtimmter kennen gelernt, iſt aber dadurch nicht zur Auflöſung der Gleichungen in allgemeinen endlichen Ausdrücken gelangt. Die Entwickelung der Wurzeln durch unendliche Reihen, oder durch Kettenbrüche, welche die Analyſis lehrt, die Anwendung der rücklaufenden Reihen, die Hülfsmittel, welche die Differentialrechnung an die Hand giebt, ſind in manchen Fällen brauchbar, aber nicht zur Entdeckung aller Wurzeln einer Gleichung in allen Fällen geeignet. Zur Auflöſung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade ſind nach den Methoden der italieniſchen Algebraiſten im 16ten Jahrhundert noch andere gefunden; allein dieſe ſcheinen auf höhere Gleichungen nicht anwendbar zu ſeyn, ſo daß die Gleichungen vom vierten Grade der allgemeinen Auflöſung die Gränze ſetzen. Sind die Coefficienten in Zahlen gegeben, ſo kann es mühſam ſeyn, die möglichen Wurzeln einer Gleichung alle zu finden, es iſt aber doch immer möglich.

124. Eigentlich ſind es nur die Gleichungen vom erſten und zweyten Grade, von welchen die Wurzeln

unmittelbar durch die gegebenen Größen vollſtändig ausgedruckt werden. Bey den cubiſchen Gleichungen iſt dieſes nur in dem Falle einer einzigen möglichen Wurzel thunlich. Bey drey möglichen Wurzeln iſt die Formel, welche ſie darſtellt, ſcheinbar unmöglich. (76.). Formeln für jede derſelben ſetzen eine cubiſche Gleichung voraus, die ebenfalls drey mögliche Wurzeln hat (77.). Bey den Gleichungen vom vierten Grade werden die Wurzeln nur mittelbar durch die Wurzeln einer Gleichung vom dritten Grade gegeben.

125. Damit man das bisherige Verfahren zur Auflöſung der Gleichungen im allgemeinen überſehe, und die Schwierigkeiten bey der Anwendung auf höhere Gleichungen dadurch begreife, wird es gut ſeyn, die Methoden in der Kürze darzuſtellen.

Es kommt darauf an, mit der geſuchten Größe, x, eine andere, gleichfalls unbekannte, y, in Verbindung zu bringen, aus der gegebenen Gleichung und der angenommenen zwiſchen x und y die erſtere wegzuſchaffen, und eine Gleichung für y zu erhalten, die ſich auflöſen laſſe, worauf man aus der Gleichung zwiſchen x und y die Werthe von x herleitet. Die Gleichung für y nenne man die Hülfsgleichung, die zwiſchen x und y die vermittelnde Gleichung. Jene nennt man auch die reducirte Gleichung, und dieſe die Hülfsgleichung.

126. Eine Gleichung vom zweyten Grade, $xx - ax + b = 0$, aufzulöſen, gebraucht man zwar nicht nothwendig eine Hülfsgleichung, allein man kann eine ſolche in gewiſſen Fällen mit Vortheil anwenden. Nämlich es ſey

$$x = y + \tfrac{1}{2} a,$$

ſo iſt

$$yy + b - \tfrac{1}{4} aa = 0$$

$$y = \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} aa - b)},$$

wodurch x gefunden wird.

127. Die cubiſche Gleichung, $x^3 + bx - c = 0$, aufzulöſen, ſetze man $x = y - \frac{b}{3y}$, ſo iſt

$$y^3 - c - \frac{b^3}{27y^3} = 0,$$

oder $y^6 - cy^3 - \frac{1}{27}b^3 = 0$, eine quadratiſche für y^3. Daraus wird erhalten

$$y^3 = \tfrac{1}{2}c \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{27}b^3)}.$$

Man nehme erſtlich das obere Vorzeichen, ſo iſt

$$\frac{1}{y^3} = \frac{27}{b^3}\left(\sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{27}b^3)} - \tfrac{1}{2}c\right),$$

weil überhaupt $\frac{1}{m+n} = \frac{m-n}{mm-nn}$ iſt. Alſo iſt

$$x = \sqrt[3]{\left(\sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{27}b^3)} + \tfrac{1}{2}c\right)}$$
$$- \sqrt[3]{\left(\sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{27}b^3)} - \tfrac{1}{2}c\right)}.$$

Nimmt man das andere Vorzeichen vor der Wurzelgröße, ſo erhält man denſelben Werth von x, (ſ. 72.).

Vieta hat auf dieſe Art die cubiſchen Gleichungen aufgelöſet, de emendatione aequationum, Cap. VII.

128. Zu der Aufſöſung biquadratiſcher Gleichungen, nach Ferrari's Methode (96.), wird zuerſt die Hülfsgleichung für die eingeführte Größe y gefunden, und darauf die vermittelnde zwiſchen x und y. Dieſes rührt daher, weil die Größe y ſo beſtimmt werden muß, daß dadurch der eine Theil der vorgegebenen Gleichung ein vollſtändiges Quadrat werde, wie es der andere Theil durch den Zuſatz von $2x^2y + y^2$ geworden iſt. Die vorgegebene Gleichung ſey

$$x^4 = bx^2 + cx + d,$$

ſo iſt die Hülfsgleichung

$$8y^3 + 4by^2 + 8dy + 4bd - c^2 = 0,$$

und die vermittelnde Gleichung iſt gedoppelt,

$$x^2 + y = \pm x \sqrt{(b + 2y)} \pm \sqrt{(d + y^2)},$$

wo die gleichnamigen Vorzeichen gebraucht werden, wenn c poſitiv iſt, die ungleichnamigen in dem entgegengeſetzten Falle. Wenn die beiden Theile der vermittelnden Gleichung quadrirt werden, ſo ergiebt ſich durch Verbindung mit der Hülfsgleichung die Gleichung für x.

129. Wird die biquadratiſche Gleichung $x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0$ in zwey Factoren zerlegt, nach (100.), ſo führt dieſes auf die Hülfsgleichung,

$$y^6 + 2Ay^4 + (A^2 - 4C)y^2 - B^2 = 0,$$

und die vermittelnden Gleichungen ſind,

$$x^2 \pm xy + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}A \mp \frac{B}{2y} = 0.$$

130. Nach der Euleriſchen Auflöſungsart (106, ff.) iſt für die Gleichung,

$$x^4 - ax^2 - bx + c = 0,$$

die vermittelnde Gleichung,

$$x = \sqrt{y'} + \sqrt{y''} + \sqrt{y'''},$$

und die drey Größen, y', y'', y''', ſind die Wurzeln der cubiſchen Hülfsgleichung,

$$y^3 - \tfrac{1}{2}ay^2 + \tfrac{1}{16}(a^2 - 4c)y - \tfrac{1}{64}b^2 = 0.$$

Dieſe Gleichung verwandelt ſich in die vorhergehende (129.), wenn für y geſetzt wird $\frac{1}{4}y^2$, und die Coefficienten gehörig vertauſcht werden, a mit $-$A; b mit $-$B und c mit C.

130. Man nehme zur Hülfsgleichung die quadratiſche, $y^2 - my + n = 0$ und zur vermittelnden die quadratiſche, $x^2 - pxy + q = 0$, ſetze aus dieſer in jene den Werth von y, ſo erhält man die biquadratiſche,

$$x^4 - mpx^3 + (np^2 + 2q)x^2 - mpqx + q^2 = 0.$$

Dieſe Gleichung iſt keine allgemeine, weil von den Coefficienten des zweyten, vierten und fünften Gliedes einer durch die beiden andern beſtimmt wird.

Wenn $q = 1$ iſt, ſo iſt die Gleichung eine reciproke, dergleichen in (118. 119.) vorgekommen ſind.

131. Die Auflöſung höherer Gleichungen wird, wie man aus dem Verfahren für die niedrigern bis zur vierten ſchließen mag, auf die Erfindung zweyer Gleichungen, einer zwiſchen der geſuchten x und der neben eingeführten y, und einer Gleichung für y allein ankommen. Die Schwierigkeit iſt nur eine Hülfsgleichung zu erhalten, die niedriger iſt als die vorgegebene, oder die, wenn ſie auf einen höhern Grad ſteigt, eine niedrigere Gleichung in Rückſicht einer Potenz der unbekannten Größe ſey. Die vermittelnde Gleichung, ſie mag nun einfach, oder durch die Veränderung der Vorzeichen vielfach ſeyn, muß durch die verſchiedenen Werthe von y alle Werthe der Wurzeln x geben. Die Menge der Combinationen, die hier bey höhern Gleichungen möglich ſind, mag auch dieſe Gleichung auf einen hohen Grad bringen.

132. Tſchirnhauſen hat in den Actis Erud. für 1683 eine Methode angegeben, wodurch aus der Hülfsgleichung ſo viele Glieder weggeſchafft werden können, als man will, ſo daß ſie eine quadratiſche werde, oder einer ſolchen gleichgültig ſey, oder gar nur eine zweygliedrige werde. Allein dazu wird oft die Auflöſung von Gleichungen eines höhern Grades, als die gegebene iſt, erfordert. Daher iſt die Methode für Gleichungen über den vierten Grad nicht brauchbar, und ſelbſt für die Gleichungen vom dritten und vierten Grade iſt ſie viel beſchwerlicher als die andern Auflöſungsarten.

133. Man ſetze nämlich in einer für x gegebenen Gleichung $x = m + y$, wo m eine noch unbeſtimmte Größe iſt, ſo erhält man eine transformirte Gleichung für y, in welcher man m ſo beſtimmen kann, daß einer der Coefficienten Null werde. Setzt man $x^2 = mx + n + y$, ſo kann man durch gehörige Beſtimmung von m und n zwey Coefficienten auf Null bringen, oder zwey Glieder wegſchaffen. Setzt man $x^3 = mx^2 + nx + p + y$, ſo laſſen ſich m, n, p ſo annehmen, daß drey Glieder der

transformirten Gleichung wegfallen. Auf dieſe Art könnte man die Hülfsgleichung für y zu einer zweygliedrigen machen, wenn nicht die Beſtimmung der Coefficienten in der Gleichung zwiſchen x und y zu große Schwierigkeiten entgegenſetzte. Die Gleichung für y ſteigt auf eben den Grad, von welchem die für x gegebene iſt. Denn in der vermittelnden Gleichung kann für x jede der Wurzeln der gegebenen Gleichung genommen werden, daher y eben ſo viele Werthe hat. Durch die Transformation gewinnt man alſo nichts, wenn nicht zugleich die Auflöſung durch die Wegſchaffung mehrerer Glieder erleichtert wird.

134. Es ſey z. B. die gegebene Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

die vermittelnde,

$$x^2 = mx + n + y.$$

Durch die Elimination von x gelangt man zu einer Gleichung für y von der Form,

$$y^3 + Py^2 + Qy + R = 0.$$

In dieſer enthält der Coefficient P die erſten Potenzen von m und n; Q die zweyten und erſten nebſt dem Producte mn; R die dritten, zweyten und erſten Potenzen nebſt den Producten m^2n, mn^2 und mn, wozu in allen dreyen noch gegebene Coefficienten a, b, c, kommen. Sollen nun P und Q jedes $= 0$ ſeyn, damit $y^3 = -R$, oder $y = \sqrt[3]{-R}$ werde, ſo hat man, um m und n zu finden, eine Gleichung vom erſten und eine vom zweyten Grade aufzulöſen Sind dieſe beſtimmt, ſo iſt dadurch R bekannt, alſo y, und x wird durch die quadratiſche Gleichung, $x^2 = mx + n + y$, gefunden.

135. Man ſieht, daß dieſe Auflöſung einer cubiſchen Gleichung viel beſchwerlicher iſt, als die gewöhnliche. Die Auflöſung einer biquadratiſchen iſt noch viel mühſamer. La Grange, der über dieſe Methode ſehr tiefſinnige und belehrende Unterſuchungen in den Mémoires de l'Acad. de Berlin, 1770 et 1771. (überſetzt in Michelſens Theorie der Gleichungen) angeſtellt hat, ſagt, daß

die Rechnungen, welche nach derſelben bey Gleichungen vom fünften Grade und höhern erfordert werden, ſo lang und verwickelt ſeyn würden, daß der unerſchrockenſte Rechner davon ablaſſen müßte.

Die Endgleichung zur Beſtimmung der Coefficienten m, n, etc. in der vermittelnden Gleichung kann ſehr hoch ſteigen. Wenn die Hülfsgleichung für y vom μten Grade iſt, und alle Zwiſchenglieder weggeſchafft werden ſollen, ſo kann jene Endgleichung den Grad $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (\mu - 1)$ erreichen.

136. Man könnte auch in der vermittelnden Gleichung $y = 0$ nehmen. Vereinigt man nun dieſe und die gegebene Gleichung zu einer einzigen, durch Wegſchaffung von x, ſo kann man in dieſer Gleichung zwiſchen den gegebenen Coefficienten, a, b, c, etc. und den unbeſtimmten m, n, etc. von den letztern alle bis auf einen ſo beſtimmen, wie es jedesmahl am vortheilhafteſten iſt, und dadurch in einzelnen Fällen zu einer Gleichung für x gelangen, die ſich bequemer auflöſen läßt, als die gegebene. Man muß aber wohl bemerken, daß dieſe ſubſtituirte Gleichung im allgemeinen nur eine Wurzel mit der gegebenen gemein hat.

137. Euler und Bezout haben faſt zu gleicher Zeit, jener in den neuen Petersburger Commentarien, T. IX. (für 1762 und 1763) dieſer in den Pariſer Mémoiren für 1765 allgemeine Auflöſungsarten vorgetragen, die im weſentlichen einerley ſind. (Michelſens Ueberſetzung, S. 365. ff.) Das Verfahren beſteht darin, daß man die vermittelnde Gleichung mit der Hülfsgleichung annimmt, und daraus die Gleichung herleitet, die mit der gegebenen identiſch geſetzt wird. Z. B. es ſey

$$x = a + by + cy^2, \text{ und}$$
$$y^3 = h,$$

ſo wird hieraus durch ſchickliche Subſtitution der Hülfsgröße y eine Gleichung für x gefunden. Dieſe iſt

$$x^3 - 3ax^2 + 3(a^2 - bch)x$$
$$- a^3 + 3abch - b^3h - c^3h^2 = 0.$$

Die gegebene Gleichung ſey

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0,$$

ſo erhält man durch die Vergleichung der Coefficienten in den beiden identiſchen Gleichungen für x drey Gleichungen zur Beſtimmung der vier Größen, a, b, c, h, unter welchen alſo eine willkührlich iſt. Nimmt man c beliebig an, ſo wird b^2 durch eine quadratiſche Gleichung gegeben, ſo daß b zwey Paare gleicher und entgegengeſetzter Werthe hat. Daher erhält auch h vier Werthe von dieſer Beſchaffenheit. Für jeden Werth von h hat y drey Werthe, weil neben der möglichen Wurzel aus einer möglichen Größe noch zwey unmögliche Statt haben, und eine unmögliche Größe drey Wurzeln von dieſer Beſchaffenheit hat. Die Größe x kann aber nur drey Werthe erhalten. Man ſieht, daß auch dieſe Methode beſchwerlicher iſt, als die gemeine. Sie giebt inzwiſchen Anlaß zu guten algebraiſchen Bemerkungen.

138. Für höhere Gleichungen wird die Rechnung auf dieſem Wege ſo beſchwerlich, daß ſie ſo gut wie unausführbar iſt. Euler und Bezout haben für die Gleichung vom fünften Grade,

$$x^5 * + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0,$$

die vermittelnde Gleichung

$$x = by + cy^2 + dy^3 + ey^4,$$

und die Hülfsgleichung

$$y^5 = h,$$

angenommen, und daraus durch Elimination von y eine Gleichung für x gefunden, deren Vergleichung mit der gegebenen zwar die nöthigen Gleichungen zur Beſtimmung von vier der unbekannten, b, c, d, e, h, giebt, woraus ſie aber dieſe zu ſcheiden, und jede, außer der willkührlichen, beſonders darzuſtellen, wegen der ungeheuren Rechnung, die es gekoſtet haben würde, nicht unternommen haben.

139. Die Zuſammenſetzung der Wurzeln einer Gleichung aus Wurzelgrößen, wie bey der Auflöſung cubiſcher Gleichungen, und nach der Euleriſchen Methode

für biquadratiſche (106.) wird zu keiner Beſtimmung derſelben verhelfen können. Euler hat es einmahl als eine analogiſche Muthmaßung vorgetragen, daß die Wurzeln der Gleichungen allgemein eine ſolche Form haben möchten. De formis radicum aequationum cujusque ordinis conjectatio. Comm. vet. Acad. Petrop. T. VI. Wenn $x = p + q$, ſo wird $p^n + q^n$ durch eine Gleichung vom nten Grade für x, in welcher die Coefficienten Functionen von n ſind, und die Potenzen von pq der Folge nach enthalten, gegeben. Setzt man $\sqrt[n]{p}$ für p, und $\sqrt[n]{q}$ für q, ſo hat die Wurzel die Form $\sqrt[n]{p} + \sqrt[n]{q}$, wie in den Beyſpielen (52, 53.)

140. Eine ganz ähnliche Form für die Wurzeln einer Gleichung hat Waring in den Philoſophical Tranſactions, 1779, angegeben. Die Gleichung ſey

$$x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} + dx^{n-4} - \text{etc.} = 0.$$

Man ſetze

$$x = py^{\frac{1}{n}} + qy^{\frac{2}{n}} + ry^{\frac{3}{n}} \ldots\ldots + vy^{\frac{n-1}{n}},$$

und bilde hieraus die Potenz x^n. In derſelben ſchaffe man die Potenzen von y mit gebrochnen Exponenten durch Subſtitution von x, x^2, x^3, etc. heraus, ſo erhält man eine Reihe für x mit ganzen Exponenten, die man mit der gegebenen zu vergleichen hat, um die Werthe von p, q, r, etc. nebſt y zu beſtimmen. Setzt man $y = 1$, ſo iſt $x = p + q + r + s +$ etc. welches von Eulers Annahme nur darin verſchieden iſt, daß x hier aus den formloſen Größen p, q, r, etc. zuſammengeſetzt wird, dort aber aus den nten Wurzeln ſolcher Größen. Bey einer Gleichung vom vierten Grade wird q^2 durch eine Gleichung vom dritten gefunden, $y = 1$ geſetzt, dieſelbe, welche in (112.) für den durch r bezeichneten Theil gefunden iſt.

141. Die Zerfällung einer Gleichung, die über den vierten Grad hinausgeht, in zwey Factoren, wie der biquadratiſchen, iſt nicht anwendbar, weil man dabey auf

Gleichungen von einem nach höhern Grade geräth. Wenn man z. B. eine Gleichung vom fünften Grade in eine Gleichung vom dritten, und eine vom zweyten Grade zerlegen wollte, ſo haben die Coefficienten in beiden Gleichungen zehnerley Werthe, weil die Gleichung vom fünften Grade fünf Wurzeln hat, woraus ſich zu der cubiſchen Gleichung drey Wurzeln, und zu der quadratiſchen zwey Wurzeln auf zehnerley Art nehmen laſſen. Die Coefficienten werden daher durch Gleichungen vom zehnten Grade gefunden.

142. In beſondern Fällen mögen ſich Hülfsmittel anbieten, welche die Rechnung im Allgemeinen nicht geben kann. Wenn eine Gleichung nicht unmittelbar gegeben, ſondern aus den Bedingungen einer Aufgabe gefunden wird, ſo iſt man von der Beſchaffenheit der unbekannten Größe ſchon vorläufig unterrichtet. Man kann wiſſen, wie viel mögliche Werthe ſie überhaupt haben kann; ſteigt die Gleichung auf einen höhern Grad, als ſie nach dieſer Anzahl von möglichen Werthen ſteigen ſollte, ſo wird man aus dem Gange der Rechnung beurtheilen können, woher dieſes entſteht, ob aus der Wegſchaffung der Irrationalität der unbekannten Größe oder der Coefficienten. Man wird ſuchen, ob die Gleichung nicht etwa die Antwort auf einen beſondern Fall für die geſuchte Größe enthalte, um alsdann die Zerfällung in Factoren, deren einer den beſondern Fall angiebt, zu unternehmen. Man wird, geleitet durch eine deutliche Einſicht in die Beſchaffenheit der Unterſuchung, vermittelnde Gleichungen entdecken können, die zu einer leichtern Hülfsgleichung führen.

143. Das Unvermögen der Algebra bey den allgemeinen Gleichungen vom fünften Grade an hindert nicht, jede in Zahlen gegebene Gleichung aufzulöſen, und die Wurzeln alle, ſo genau als es erfordert wird, zu finden, wozu mehr als ein Weg vorhanden iſt, ſ. unten IX.

VI. Allgemeine Eigenſchaften der Gleichungen.

144. Es ſey die Summe von m Größen, $p + q + r + s +$ etc. $= a$; die Summe aller Producte von je zweyen $= b$; die Summe der Producte von je dreyen $= c$; die Summe der Producte von je vieren $= d$; von je fünfen $= e$; u. ſ. f. Das Product von allen $= k$, ſo iſt, wenn x irgend eine dieſer Größen bedeutet,

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} - ex^{m-5} \ldots\ldots \mp k = 0.$$

Bew. Die Summe der Unionen (der einzelnen) ohne eine derſelben, wie p, ſey $= \alpha$; die Summe der Binionen, in welchen kein p iſt, ſey $= \beta$; die Summe der Ternionen, die kein p enthalten, $= \gamma$; der Quaternionen ohne $p = \delta$, u. ſ. w. iſt

$$1)\ p + \alpha = a; \qquad 2)\ p\alpha + \beta = b;$$
$$3)\ p\beta + \gamma = c; \qquad 4)\ p\gamma + \delta = d;$$
$$5)\ p\delta + \varepsilon = e; \qquad 6)\ p\varepsilon + \zeta = f,$$
$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$
$$p\vartheta + \iota = i \qquad p\iota = k.$$

Dieſe Gleichungen multiplicire man folgeweiſe durch p^{m-1}; p^{m-2}; p^{m-3}; etc. ſo iſt

$$1)\ p^m + p^{m-1}\alpha = ap^{m-1}$$
$$2)\ p^{m-1}\alpha + p^{m-2}\beta = bp^{m-2}$$
$$3)\ p^{m-2}\beta + p^{m-3}\gamma = cp^{m-3}$$
$$4)\ p^{m-3}\gamma + p^{m-4}\delta = dp^{m-4}$$
$$5)\ p^{m-4}\delta + p^{m-5}\varepsilon = ep^{m-5}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p^2\vartheta + p\iota = ip$$
$$p\iota = k$$

Man addire die Gleichungen, deren Stellenzahl ungerade iſt, und ſubtrahire davon die Gleichungen von einer geraden Stellenzahl, ſo iſt

$$p^m = ap^{m-1} - bp^{m-2} + cp^{m-3} - dp^{m-4} + ep^{m-5} \ldots \pm ip \mp k.$$

Eine völlig ähnliche Gleichung wird für jede der andern Größen, q, r, s, etc gefunden. Bezeichnet man ſie jede mit dem gemeinſchaftlichen Zeichen x, und bringt alle Glieder auf dieſelbe Seite, ſo iſt

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} - ex^{m-5} + \ldots \mp ip \pm k = 0.$$

Die obern Vorzeichen der letzten Glieder gelten für ein gerades m, die untern für ein ungerades, wenn nämlich alle Größen, p, q, r, etc. poſitiv ſind.

145. Wenn eine oder mehrere der Größen, p, q, r, etc. ihr Vorzeichen ändern oder negativ werden, ſo wird angenommen, daß dieſes in allen Combinationen, worin ſie vorkommen, geſchieht, daher ändert jede Combination, worin eine ungerade Anzahl negativer Factoren (oder ein einzelner) enthalten iſt, das Vorzeichen + in —; da eine Combination, worin eine gerade Anzahl ſolcher Factoren ſich findet, ihr Vorzeichen behält. Iſt in der Summe der Combinationen einer Art die Summe der poſitiven Theile größer als die Summe der negativen, ſo bleibt das Vorzeichen des Aggregats oder des Coefficienten in der Gleichung, wie in der Normalgleichung (144); iſt aber jene Summe kleiner als die letztere, ſo wird das Vorzeichen das entgegengeſetzte. Alles dieſes iſt aus der Buchſtabenrechnung und der Lehre von entgegengeſetzten Größen klar, und die Entwickelungen der verſchiedenen Fälle an den Gleichungen bis zum vierten Grade geben darüber die völligſte Erläuterung.

146. Sind alle m Größen, p, q, r, s, etc. möglich, ſo iſt in der Gleichung, $x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} - \text{etc.} = 0$, in welcher die

Coefficienten auch negativ ſeyn mögen, die Anzahl der Abwechslungen zweyer nächſten Vorzeichen (+ — oder — +) ſo groß als die Anzahl der poſitiven Wurzeln, und die Anzahl der Folgen gleicher Vorzeichen (+ + oder — —) ſo groß als die Anzahl der negativen Wurzeln.

Bew. Der für die Gleichungen vom zweyten, dritten und vierten Grade gebrauchte Beweis dieſer Eigenſchaft der Gleichungen würde ſchon für Gleichungen vom fünften Grade viel zu weitläufig und beſchwerlich fallen. Der folgende Beweis für Gleichungen vom fünften Grade iſt ſo beſchaffen, daß er bey allen höhern angewandt werden kann.

Es ſeyn p, q, r, s, t fünf mögliche Größen; die Summen ihrer verſchiedenen Combinationen ſeyn a, b, c, d, e, wie vorher erklärt iſt, ſo iſt

A) $x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e = 0.$

Ferner bedeuten für vier jener Größen, als q, r, s, t, die Symbole, α, β, γ, δ, eben ſolche Summen, ſo iſt die Gleichung für jede der vier Größen,

B) $x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + \delta = 0.$

Weil $a = p + \alpha$; $b = p\alpha + \beta$; $c = p\beta + \gamma$; $d = p\gamma + \delta$; $e = p\delta$ iſt, ſo iſt die Gleichung A) zuſammengeſetzt aus den beiden Theilen,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{C)} & x^5 - \alpha x^4 + \beta x^3 - \gamma x^2 + \delta x \\ \text{D)} & \quad - px^4 + p\alpha x^3 - p\beta x^2 + p\gamma x - p\delta \end{array}\right\} = 0$$

und es entſteht A) aus B) durch die Multiplication mit $x - p$.

Wenn eine oder mehrere der q, r, s, t negativ ſind, ſo werden dadurch einer oder mehrere der Coefficienten, α, β, γ, δ, negativ, und ändern ihre Vorzeichen. Iſt p poſitiv, ſo ſind die Vorzeichen der Reihe D, allemahl denen in der Reihe C bey der nächſt höhern Potenz von x entgegengeſetzt. Iſt aber p negativ, ſo ſind die Vorzeichen in der Reihe D einerley mit denen in der Reihe

C bey der nächſt höhern Potenz von x. In beiden Fällen iſt die Anzahl der Abwechslungen und der Folgen der Vorzeichen in D dieſelbe wie in C oder in B, in dem erſten Falle nur mit durchgängiger Vertauſchung von + und −.

Die Vorzeichen in der Reihe A werden durch die Vorzeichen in den beiden Reihen C und D, auf die bekannte Art (Buchſtabenrechuung 10.) beſtimmt. Sind die Vorzeichen zu einer Potenz in beiden Reihen C, D, einerley, ſo hat das Glied mit dieſer Potenz in A daſſelbe Vorzeichen wie das gleichſtellige in B; ſind ſie aber verſchieden, ſo kann dadurch eine Abänderung in der Combination der Vorzeichen in der Reihe A gegen die in B entſtehen.

Es ſey zuerſt p poſitiv, oder A) entſtehe aus B) durch die Multiplication mit x − p.

Man nehme irgend drey auf einander folgende Glieder in B oder in C, und die daraus entſpringenden in D, ſo ſind ihre Vorzeichen in einer der folgenden acht Combinationen enthalten.

I.	II.	III.	IV.
+ + +	+ + −	+ − +	+ − −
− − −	− − +	− + −	− + +
V.	**VI.**	**VII.**	**VIII.**
− + +	− + −	− − +	− − −
+ − −	+ − +	+ + −	+ + +

Der Übergang von dem Vorzeichen in der Reihe C zu dem in der Reihe D oder umgekehrt, geſchehe bey dem mittlern Gliede jeder derſelben, ſo findet derſelbe aus C in D nur Statt in den Combinationen I. II. VII. VIII. Dabey wird immer eine Folge in eine Abwechslung verwandelt. Ein Übergang aus D in C geſchieht nur in den Combinationen I. IV. V. VIII. dabey wird entweder eine Folge in eine Abwechslung, oder eine Abwechslung

in eine Folge verwandelt. Nun iſt die Anzahl der Übergänge aus C in D nothwendig um Eins größer als die Anzahl der Rückgänge aus D in C, weil das letzte Glied in D kein zugehöriges in C hat. Folglich iſt die Anzahl der Verwandlungen einer Folge in eine Abwechslung nothwendig größer als die Anzahl der entgegengeſetzten Verwandlungen, ſelbſt wenn jeder Rückgang die Vertauſchung einer Abwechslung in eine Folge mit ſich brächte. Die Gleichung A enthält alſo wenigſtens eine Abwechslung der Vorzeichen mehr als die Gleichung B. Sie kann auch die Abwechslungen in einer noch größern Anzahl enthalten, wenn die Rückgänge in den Fällen I. und VIII. geſchehen.

Es ſey zweytens p eine negative Größe, ſo entſteht, wenn p die abſolute Quantität derſelben bedeutet, die Gleichung A aus B durch die Multiplication mit $x + p$, oder wird zuſammengeſetzt aus

$$\left.\begin{array}{ll} C) & x^5 - \alpha x^4 + \beta x^3 - \gamma x^2 + \delta x \\ D) & \quad + p x^4 - p\alpha x^3 + p\beta x^2 - p\gamma x + p\delta \end{array}\right\} = 0.$$

Man nehme wiederum drey auf einander folgende Glieder in B oder in C, und die daraus entſpringenden in D, ſo ſind die verſchiedenen Combinationen der Vorzeichen,

I.	II.	III.	IV.
+ + +	+ + −	+ − +	+ − −
+ + +	+ + −	+ − +	+ − −

V.	VI.	VII.	VIII.
− + +	− + −	− − +	− − −
− + +	− + −	− − +	− − −

Ein Übergang aus C in D kann in dem mittlern Gliede der obern Reihe nur in den Fällen III. IV. V. VI. erfolgen. Dabey wird immer eine Abwechslung in eine Folge verwandelt. Ein Rückgang aus D in C bey dem mittlern Gliede der untern Reihe geſchieht nur in

II. III. VI. VII. Dabey wird entweder eine Folge in eine Abwechslung oder eine Abwechslung in eine Folge verwandelt. Da die Anzahl der Rückgänge um Eins geringer iſt, als die der Übergänge aus C in D, ſo entſteht dadurch in A wenigſtens eine Folge der Vorzeichen mehr als in B.

Es ſey unter den 5 Größen, p, q, r, s, t, die Anzahl der poſitiven = n, alſo der negativen 5 — n. Man nehme p für eine der poſitiven Wurzeln, ſo hat die Gleichung B (n — 1) poſitive Wurzeln und (5 — n) negative Wurzen. Sie hat (n — 1) Abwechslungen der Vorzeichen und (5 — n) Folgen (88.). Die Gleichung A hat daher entweder (n — 1 + 1) Abwechslungen oder mehr. Die überſchießende Anzahl derſelben über n ſey = u, ſo daß die Anzahl der Abwechslungen N = n + u iſt. Ferner nehme man p für eine der negativen Wurzeln, ſo hat die Gleichung B (die nun eine andere als bey der erſten Annahme für p iſt) n poſitive Wurzeln, und (4 — n) negative; alſo n Abwechslungen, und (4 — n) Folgen der Vorzeichen. Die Gleichung A hat daher entweder (4 — n + 1) Folgen oder noch mehr. Die Anzahl ſey N' = 5 — n + v. Es iſt aber N + N' = 5, alſo 5 = n + u + 5 — n + v, folglich u + v = o. Da u und v beide additiv oder gleichnamig ſeyn müßten, ſo findet kein anderer Werth für u und v Statt, als o, und es iſt N = n; N' = 5 — n, oder, in einer Gleichung vom fünften Grade iſt die Anzahl der Abwechslungen der Vorzeichen gleich der Anzahl der poſitiven Wurzeln; die Anzahl der Folgen gleich der Anzahl der negativen Wurzeln.

Hieraus läßt ſich nun der Satz leicht allgemein erweiſen. Gilt er nämlich für eine Gleichung vom mten Grade, ſo gilt er auch für eine Gleichung vom (m + 1)ten Grade, daher auch für eine vom (m + 2)ten, u. ſ. f. Man braucht nur in dem geführten Beweiſe m ſtatt der beſtimmten Zahl 5 zu ſetzen.

147. Wenn bey der Multiplication einer Gleichung durch $x - p$ die Anzahl der Abwechslungen der Vorzeichen, oder bey der Multiplication durch $x + p$ die Anzahl der Folgen nicht um Eins größer wird als ſie in der multiplicirten Gleichung iſt, ſo zeigt dieſer Widerſpruch gegen den erwieſenen Satz unmögliche Werthe der Wurzeln an. Es ſey die Gleichung, $x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 10x - 50 = 0$. Multiplicirt man dieſe durch $x + 1$, daher die Wurzel -1 hinzu kommt, ſo iſt das Product $x^5 - 7x^4 - x^3 - 3x^2 - 60x - 50 = 0$; dieſe hat zwey Folgen mehr als jene Gleichung, die daher unmögliche Wurzeln enthält. Auch iſt ſie das Product aus $x^2 - 6x - 10$ in $x^2 - 2x + 5$, welcher letztere Factor nicht null werden kann.

148. Wenn ein Glied in der Gleichung fehlt, ſo kann man für daſſelbe ± 0 ſetzen. Haben die beiden nächſten Glieder, das vorhergehende und das folgende, entgegengeſetzte Vorzeichen, ſo darf man daher auf eine poſitive und eine negative Wurzel ſchließen, wenn ſonſt keine Widerſprüche gegen die Möglichkeit in den Coefficienten und ihren Vorzeichen liegen. Haben die beiden nächſten Glieder aber einerley Vorzeichen, ſo ſind wegen des fehlenden Gliedes zwey Wurzeln unmöglich. Denn bey dem Gebrauche des einen Vorzeichens vor 0 werden zwey poſitive, bey dem Gebrauche des andern zwey negative angezeigt. Bey den cubiſchen Gleichungen haben wir z. B. geſehen, daß die Gleichung $x^3 + bx \pm c = 0$ zwey unmögliche Wurzeln hat.

149. Wegen der unmöglichen Wurzeln, die eine Gleichung haben kann, iſt der Satz auf dieſen Fall ſo einzuſchränken, daß eine Gleichung nicht mehr poſitive Wurzeln als Abwechslungen der Vorzeichen, und nicht mehr negative Wurzeln als Folgen gleicher haben könne. Es wird unten gezeigt, daß die Form der unmöglichen Wurzeln iſt $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, ſo daß das Product $x - (\alpha + \beta\sqrt{-1})$ in $x - (\alpha - \beta\sqrt{-1})$ iſt $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$. Das Product aller unzerleg-

baren Doppelfactoren in einer Gleichung nenne man P, das Product der einfachen von der Form x — p nenne man Q. Wird das Product P mit einem Factor x — p multiplicirt, wo p poſitiv iſt, ſo kommt zu der Combination der Vorzeichen in P wenigſtens eine Abwechslung hinzu; wird P durch x + p multiplicirt, ſo kommt wenigſtens eine Folge gleicher Vorzeichen hinzu. Durch die Multiplication mit allen Factoren von der Form x — p in Q kommen alſo zu der Combination der Vorzeichen in P wenigſtens ſo viele Abwechslungen als poſitive Wurzeln vorhanden ſind, hinzu, und durch die Multiplication mit Factoren von der Form x + q wenigſtens ſo viele Folgen gleicher Vorzeichen als negative Wurzeln da ſind. Die Anzahl der Abwechslungen kann daher wohl größer als die Anzahl der poſitiven Wurzeln ſeyn, aber nicht kleiner, ſo wie die Anzahl der Folgen wohl größer als die Anzahl der negativen Wurzeln ſeyn kann, aber nicht kleiner.

Daher hat eine Gleichung, in welcher nur eine Abwechslung der Vorzeichen iſt, nur eine mögliche poſitive Wurzel; hat ſie nur eine Folge gleicher Vorzeichen, ſo hat ſie nur eine negative Wurzel.

150. Der Satz (146) wird oft Harriots Lehrſatz genannt, aber mit Unrecht, ſ. Algebra, Th. I. S. 50. Man hat ihn lange Zeit ohne andern Beweis als durch Induction aufgeſtellt. Saunderſon ſagt in ſeiner Algebra §. 434, daß er in keinem Lehrbuche von dieſer Wiſſenſchaft einen Beweis dieſes Satzes angetroffen habe, ob er gleich faſt in allen vorkomme. Er ſetzt hinzu, daß man wegen der ungeheuren Menge von Fällen, die man durchgehen müßte, ſchwerlich es verſuchen möchte einen allgemeinen Beweis zu finden. Stübner hat zuerſt in einer Diſputation, Leipzig 1720, den Satz bewieſen, aber auf einem zu beſchwerlichen Wege. Der Abbé de Gua hat einen gedoppelten Beweis des Satzes gegeben, in den Mém. de l'Acad. des Scienc. 1741. Segner hat in den Mém. de l'Acad. de Berlin 1756,

und in ſeinen Elem. Anal. Finit. §. 506 — 519 einen Beweis mitgetheilt, der nach Käſtners Urtheil aber in große Weitläufigkeit zu führen ſcheint, wenn man alles darin genau auseinander ſetzen wollte. Schon in einer akademiſchen Schrift zu Jena 1718 legte er den nachher weiter ausgeführten Beweis vor. Von Äpinus iſt ein Beweis in den Mém. de l'Ac. de Berlin 1758 anzutreffen. Käſtner beweiſet den Satz durch die Differentialrechnung, mehr ſcharfſinnig als methodiſch, in einer akademiſchen Schrift 1745, hernach in ſeiner Analyſis des Unendlichen §. 186. Man ſehe auch Tempelhoffs Anal. endl. Größen §. 550 ff. Karſten Matheſis theoretica, §. 86 — 92. Der Beweis, den ich hier geführt habe, hat einiges mit dem Segneriſchen gemein, iſt aber kürzer und einleuchtender, beſonders durch die Verbindung mit dem für Gleichungen vom vierten Grade ſchon geführten Beweiſe.

151. Die Gleichung $x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} \ldots \mp ix \pm k = 0$, hat m Wurzeln, deren Summe $= a$, Summe der Producte nach Binionen $= b$; nach Ternionen $= c$; nach Quaternionen $= d$; u. ſ. f. Summe von je $(m - 1)$ derſelben $= i$; Product aller $= k$ iſt, die obern Zeichen gebraucht für ein gerades m, die untern für ein ungerades. Nur müſſen, wenn die Wurzeln alle mögliche Größen ſeyn ſollen, alle Bedingungen erfüllt werden, die in der Form der Coefficienten verſteckt liegen.

Bew. Denn es werden hier durch die m Coefficienten von dem zweyten Terminus an m Beſtimmungen für eben ſo viele Größen, p, q, r, s, etc. gegeben. Setzt man nämlich ihre Summe $= a$; die Summe der Producte von je zweyen $= b$, u ſ. f. wie in (144), ſo erhält man die vorgegebene Gleichung, und es iſt jede der p, q, r, etc. eine der durch x bezeichneten Größen, die der Gleichung ein Genüge thut, das iſt, eine Wurzel derſelben. Nur muß dabey noch unterſucht werden, ob die m Coefficienten alle Bedingungen für die geſuchten Größen

enthalten, oder ob nicht noch in der Form der Coefficienten Bedingungen verſteckt liegen.

152. Es iſt nämlich, wenn das Aggregat von m möglichen Größen mit einerley oder verſchiedenen Vorzeichen gegeben wird, nicht mehr ganz willkührlich, wie man das Aggregat der Producte nach den Combinationen je zweyer oder mehrerer aus ihnen allen annehmen wolle. So iſt, wenn a das Aggregat der Größen ſelbſt, und b das Aggregat der Producte je zweyer iſt, allemahl $aa > 2b$, da die Summe der Quadrate $= aa - 2b$ iſt, alſo allemahl eine poſitive Größe bleibt. (Combination, 43. 44. und combinatoriſche Analyſis, 53.). Iſt b negativ, ſo iſt die Quantität davon ganz willkührlich, aber nicht, wenn b poſitiv iſt.

Iſt c das Aggregat aller Producte nach Ternionen, und d das aller Quaternionen, ſo iſt die Summe der Biquadrate $= a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2 - 4d$, (comb. Anal. 53.), alſo $a^4 + 2b^2 > 4a^2b - 4ac + 4d$. Die Formeln für die Summen der geraden Potenzen combinirter Größen a. a. O. geben noch mehr ſolche Bedingungen.

Aus den Formeln für die Summen der Quadrate von den Combinationen (Combination 48.) folgen auch Bedingungen für die Relationen derſelben.

Es iſt $bb > 2ac - 2d$

$cc > 2bd - 2ae + 2f$

$dd > 2ce - 2bf + 2ag - 2h$

u. ſ. f.

wo die kleinen Buchſtaben ſtatt der großen a. a. O. geſetzt ſind.

153. Wenn die in jenen Formeln enthaltenen Bedingungen durch die Coefficienten einer Gleichung nicht erfüllt werden, ſo ſind nothwendig unmögliche Wurzeln vorhanden; allein umgekehrt folgt nicht, daß alle Wurzeln möglich ſind, wenn den Bedingungen Genüge geſchieht. Z. B. in der Gleichung $x^4 - 8x^3 + 7x^2$

$- 10x - 50 = 0$, die zwey unmögliche Wurzeln hat (147), iſt $a = + 8$; $b = + 7$; $c = + 10$; $d = - 50$. Hier iſt $aa > 2b$; auch iſt $a^4 + 2b^2 > 4a^2b - 4ac + 4d$; aber es iſt nicht $bb > 2ac - 2d$, da $bb = + 49$; $2ac - 2d = 160 + 100$ iſt.

154. Wenn die Gleichung in (151.) lauter mögliche Wurzeln hat, ſo iſt

$$(m - 1)\,aa > 2mb;$$
$$2\,(m - 2)\,bb > 3\,(m - 1)\,ac;$$
$$3\,(m - 3)\,cc > 4\,(m - 2)\,bd;$$
$$4\,(m - 4)\,dd > 5\,(m - 3)\,ce;$$
$$5\,(m - 5)\,ee > 6\,(m - 4)\,df;$$

etc.

Der Beweis durch Anwendung der Differentialrechnung iſt in Eulers Differentialrechnung, Th. II. Kap. 13 anzutreffen. Daſelbſt und in dem vorhergehenden Kapitel iſt die Lehre von der Entdeckung unmöglicher Wurzeln umſtändlich vorgetragen. Man ſehe auch noch ſeine Abhandlung: Nova criteria radices aequationum imaginarias dignoſcendi. Comm. novi Ac. Retrop. T. XIII. Newtons Regel dazu, in der Arithm. univerſali, pag. 184. gründet ſich auf die hier zuletzt angeführten Bedingungsformeln. Den Beweis der Newtoniſchen Regel hat Campbell in den Philoſ. Trans. nr. 404. geführt, woraus er Newtons Arithm. univ. von dem Herausgeber s'Graveſand angehängt iſt. Er hat noch eine künſtliche Regel beygefügt, wodurch man finden kann, wie viele unmögliche wenigſtens Wurzeln in einer Gleichung enthalten ſind. S. Algebra, Th. I. S. 62.

155. Die Betrachtung quadratiſcher Gleichungen hat gezeigt, daß in dem Falle eines Widerſpruches gegen die Bedingungen über die Relationen der Coefficienten dennoch eine Form der Wurzeln ſich ergiebt, durch welche ſie in Verbindung mit einander eben ſo die Coeffi-

cienten hervorbringen, wie es bey möglichen Wurzeln geſchieht. Bey cubiſchen und biquadratiſchen Gleichungen entſtehen aus der Verbindung unmöglicher Wurzeln mit möglichen die Coefficienten eben ſo, wie ſie aus möglichen zuſammengeſetzt werden. Dieſe Form iſt $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$. Die unmöglichen Wurzeln ſind in den bisher betrachteten Gleichungen paarweiſe vorhanden. Dadurch wird ihre Summe etwas mögliches, ſo auch das Product $\alpha^2 + \beta^2$, und die Summe der Producte aus jeder in die übrigen möglichen Wurzeln.

156. Solchergeſtallt erhellt, wie unter der Bedingung, daß die unmöglichen Wurzeln paarweiſe, von der Form $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta \sqrt{-1}$ genommen werden, aus den Combinationen derſelben ſowohl unter einander als mit möglichen Größen eben eine ſolche Gleichung entſteht, als für den Fall, da alle combinirten Größen möglich ſind. Inzwiſchen darf man doch fragen, ob jede gegebene Gleichung entweder auf die eine oder die andere Art hervorgebracht werde, und ob nicht auch in gewiſſen Fällen ſelbſt die Form, $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, unbrauchbar ſeyn könne.

157. Dieſen Zweifel zu heben, bemerke man, daß bey der Aufnahme unmöglicher Größen von der Form, $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, die Zuſammenſetzungen der Combinationen nicht mehr den Bedingungen unterworfen bleiben, welche bey möglichen Größen die relative Quantität derſelben einſchränken, und ihr gewiſſe Gränzen anweiſen. Dieſe Bedingungen ſind als Gleichungen neben denjenigen anzuſehen, welche die Coefficienten, als Summen von Combinationen der Wurzeln, geben. Werden jene Bedingungen bey Seite geſetzt, ſo erhält man aus einer Gleichung vom mten Grade aus den m Coefficienten (den von der höchſten Potenz der Einheit gleich genommen) eben ſo viele unbedingte Gleichungen, wodurch m Wurzeln der Gleichung, nicht mehr und nicht weniger, beſtimmt ſind, unter welchen aber Paare von der Form $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, vorhanden ſeyn können. Bey der Multiplication erdich-

teter oder eingebildeter Größen, $\beta\sqrt{-1}$, werden die Regeln für die Vorzeichen der Producte möglicher Größen ungeändert, daher auch die einfach geraden Potenzen einer ſolchen Größe das Vorzeichen — erhalten. Bey dieſen Annahmen ſteht nichts im Wege, den Satz (151.) als allgemein aufzuſtellen.

Die Anwendung dieſer Bemerkungen auf Gleichungen vom zweyten, dritten und vierten Grade wird ſie hinlanglich erläutern und beſtätigen.

158. Die beiden möglichen Wurzeln der quadratiſchen Gleichung, $x^2 - ax + b = 0$, ſeyn $\alpha + \beta = p$, und $\alpha - \beta = q$, ſo iſt $a = 2\alpha$; $b = \alpha^2 - \beta^2$. Alſo iſt $4b < a^2$, und $2b < p^2 + q^2$. Setzt man $\beta\sqrt{-1}$ ſtatt β, alſo $-\beta^2$ ſtatt $+\beta^2$, oder β^2 ſtatt $-\beta^2$, ſo iſt $4b > a^2$, und $2b > p^2 + q^2$.

159. Die drey möglichen Wurzeln der cubiſchen Gleichung, $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, ſeyn $\alpha + \beta = p$; $\alpha - \beta = q$, und r, ſo iſt $a = 2\alpha + r$; $b = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha r$; $c = (\alpha^2 - \beta^2) r$. Hieraus iſt

$$a^2 - 2b = 2\alpha^2 + 2\beta^2 + r^2,$$
$$a^2 - 3b = (\alpha - r)^2 + 3\beta^2,$$
$$b^2 - 3ac = (\alpha^2 - \beta^2 - \alpha r)^2 + 3r^2\beta^2.$$

Sind alle drey Wurzeln möglich, ſo iſt nicht allein nothwendig $aa > 2b$, ſondern auch $aa > 3b$, und dann auch $bb > 3ac$. Setzt man $\beta\sqrt{-1}$ für β, wodurch $-\beta^2$ ſtatt $+\beta^2$ zu ſtehen kommt, ſo kann von jenen Sätzen das Gegentheil Statt haben. Findet ſich dieſes Gegentheil, ſo ſind zwey Wurzeln unmöglich.

160. Die Gleichung, $x^3 + bx - c = 0$, hat nothwendig unmögliche Wurzeln, wenn b poſitiv iſt, da alsdann eine Summe von Quadraten negativ iſt. Aber die Gleichung, $x^3 - bx - c = 0$, giebt, $2\alpha + r = 0$; daher $b = 3\alpha^2 + \beta^2$; $c = 2\alpha(\beta^2 - \alpha^2)$. Hieraus iſt

$$4b^3 - 27c^2 = 4\beta^2 (9\alpha^2 - \beta^2)^2.$$

In dem Falle dreyer möglichen Wurzeln iſt nothwendig $4b^3 > 27c^2$, ſo wie in dem Falle, da zwey Wurzeln unmöglich ſind, $4b^3 < 27c^2$ iſt. Daher auch umgekehrt ſind alle drey Wurzeln möglich, wenn $4b^3 > 27c^2$ iſt; und zwey unmöglich, wenn $4b^3 < 27c^2$ iſt. Dieſes rührt daher, daß β^2 ein Factor der Bedingungsformel iſt.

161. Die biquadratiſche Gleichung $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$, habe die möglichen Wurzeln, $\alpha + \beta = p$; $\alpha - \beta = q$; $\gamma + \delta = r$; $\gamma - \delta = s$, ſo iſt

$$\text{I. } a = 2\alpha + 2\gamma$$

$$\text{II. } b = 4\alpha\gamma + \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2$$

$$\text{III. } c = 2(\alpha^2 - \beta^2)\gamma + 2(\gamma^2 - \delta^2)\alpha$$

$$\text{IV. } d = (\alpha^2 - \beta^2)(\gamma^2 - \delta^2).$$

Die Summe der Quadrate der Wurzeln, oder $aa - 2b$, iſt $2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 + 2\delta^2$, eine nothwendig poſitive Größe. Auch iſt $3aa - 8b$ poſitiv. Denn $3aa = 12(\alpha^2 + 2\alpha\gamma + \gamma^2$, alſo $3aa - 8b = 4\alpha^2 - 8\alpha\gamma + 4\gamma^2 + 8\beta^2 + 8\delta^2 = 4(\alpha - \gamma)^2 + 8\beta^2 + 8\delta^2$. Nimmt man $\beta\sqrt{-1}$ ſtatt β, oder $\delta\sqrt{-1}$ ſtatt δ, oder beides, ſo können beide Formeln negativ werden.

162. Man ſieht hieraus, warum die Erfüllung der Bedingung wegen des poſitiven Werthes einer Formel nicht nothwendig mögliche Wurzeln anzeigt. Denn das Quadrat der unmöglichen Größe kann klein genug ſeyn, um eine Formel poſitiv zu laſſen.

163. Der Beweis des Satzes, daß die Wurzeln einer jeden Gleichung, in welcher die Exponenten der unbekannten Größe alle ganze Zahlen ſind, entweder mögliche Größen, oder unmögliche von der Form, $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, ſind, iſt auf mehrere Arten verſucht worden. Zuerſt von d'Alembert in den Mém. de l'Acad. de Berlin, 1746, deſſen Beweis auch in dem Traité du Calcul

intégral par Bougainville, T. I. p. 47. angetroffen wird. Ein Nachtrag, worin d'A. auf eine ihm gemachte Bedenklichkeit antwortet, ſteht in ſeinen Opuſcules mathém. T. IV. Mem. XXVIII. Euler hat zweyerley Methoden den Satz zu erweiſen angegeben, in den Mém. de l'Acad. de Berlin, 1749. Foncenex, der bey dem erſten Euleriſchen Beweiſe einen Anſtoß fand, hat in den Miſcellaneis philoſophico-mathematicis ſocietatis Taurinenſis, T. I. (Taurini 1759.) ſelbſt einen Beweis zu geben geſucht. Nachher hat la Grange hierüber Unterſuchungen angeſtellt, in dem Nouveaux Mém. de l'Acad. de Berlin, 1772, worin er insbeſondere zwey Mängel des erſten Euleriſchen Beweiſes hebt. In den Actis Acad. Petrop. für 1781 iſt ein Beweis von Fuß enthalten. La Place hat in dem Journal de l'école normale einen Beweis mitgetheilt, den la Croix in ſeinem Traité du calcul diff. et int. T. I. nr. 162. 163. eingerückt hat. La Grange, der in ſeiner Schrift über die Aufléſung numeriſcher Gleichungen S. 181 ff. einen Abriß der vornehmſten Beweisarten unſers Satzes giebt, ſagt von dem letzten Beweiſe, dem von la Place, daß er bloß als Beweis betrachtet vollkommen genüge, aber daß es ſo gut als unmöglich ſey, nach der dabey angewandten Analyſis eine Gleichung in mögliche Factoren von zwey Dimenſionen zu zerlegen. Gauß hat in einer kleinen Schrift: Demonſtratio nova theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel ſecundi gradus reſolvi poſſe, Helmſtadii 1799, 4. die mehreſten der vorher angezeigten Beweiſe mit Scharfſinn geprüft, und giebt am Ende einen neuen Beweis, der aber auf trigonometriſchen Hülfsſätzen beruht, alſo nicht rein algebraiſch iſt. Alle die hier angeführten Beweiſe ſind ſchwer zu faſſen, wenn man auch ſchon einige Übung in analytiſchen Unterſuchungen hat. Die vorher (157.) gemachte Bemerkung erklärt den Urſprung und die Form der unmöglichen Wurzeln unmittelbar aus der Natur der Combinationen der Wurzeln. Die Vorzeichen

der Producte und Potenzen den Regeln, die bey möglichen Größen gelten, zuwider ſetzen, heißt unmögliche Größen einführen.

164. Die unmöglichen Wurzeln können auch andere Formen zu haben ſcheinen, als die, $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, aber dergleichen laſſen ſich immer auf dieſe bringen. D'Alembert hat dieſes an einigen Beyſpielen gezeigt, ſur la cauſe des vents, pag. 102. Man ſehe auch la Grange a. a. O. S. 182. und la Croix a. a. O. nr. 164 — 188. Davon noch in dem Artikel, unmögliche Größen.

165. Die Gleichung, $x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} - \text{etc.} = 0$, habe lauter mögliche Wurzeln, p, q, r, s, etc. an der Zahl m. Für x werde irgend ein Werth, poſitiver oder negativer, geſetzt, und der Werth des Aggregats aller Glieder, oder der Werth der Gleichung ſey $= y$, ſo iſt

$$(x-p)(x-q)(x-r)(x-s) \text{ etc.} = y.$$

Bew. Es ſey nach Abſonderung einer der Wurzeln, als p, das Aggregat der übrigen $= \alpha$; das Aggregat ihrer Binionen $= \beta$; ihrer Ternionen $= \gamma$; ihrer Quaternionen $= \delta$; u. ſ. f. und $x^{m-1} - \alpha x^{m-2} + \beta x^{m-3} - \gamma x^{m-4} + \delta x^{m-5} - \text{etc.} = z$. Dieſe Function von x werde multiplicirt durch $x - p$, ſo iſt

$$\begin{aligned} x^m - \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} + \delta x^{m-4} - \text{etc.} \\ - p\,.\,. \quad + \alpha p\,.\,. \quad - \beta p\,.\,. + \gamma p\,.\,. - \text{etc.} \end{aligned}$$

$= (x-p)\,z.$

Nun iſt $\alpha + p$ das Aggregat aller Wurzeln der vorgegebenen Gleichung; $\beta + \alpha p$ das Aggregat ihrer Binionen; $\gamma + \beta p$ ihrer Ternionen; $\delta + \gamma p$ ihrer Quaternionen, u. ſ. f. wie in dem Beweiſe (144.). Da nun a, b, c, d, etc. eben dieſe Aggregate ſind, ſo iſt $y = (x-p)\,z$. Nimmt man ſtatt p eine der andern Wurzeln, q, r, s, etc. ſo ergiebt ſich auf gleiche Art, daß die Function y auch die Factoren, $(x-q)$, $(x-r)$, $(x-r)$, u. ſ. f. enthält. Die Anzahl aller dieſer Facto-

ren nebſt dem zuerſt genommenen, $x - p$, iſt $= m$, und die höchſte Potenz von x in dem Producte iſt x^m. Folglich enthält y nicht mehr Factoren als die m Factoren von der Form $x - p$.

166. Die Gleichung, $x^m - a x^{m-1} + b x^{m-2} - c x^{m-3} + \text{etc}, = 0$, habe zwey unmögliche Wurzeln, $p = A + B\sqrt{-1}$; $q = A - B\sqrt{-1}$, die übrigen möglichen ſeyn r, s, t, etc. Für irgend einen Werth von x ſey der Werth der Gleichung $= y$, es iſt

$$(x^2 - (p+q)x + pq)(x-r)(x-s)(x-t)\text{etc.} = y.$$

Bew. Man ſetze das Aggregat der möglichen Wurzeln $= \alpha$; ihrer Binionen $= \beta$; ihrer Ternionen $= \gamma$, u. ſ. f. daraus formire man die Function,

$$x^{m-2} - \alpha x^{m-3} + \beta x^{m-4} - \gamma x^{m-5} + \delta x^{m-6} + \text{etc.} = z.$$

Dieſe werde mit $x^2 - (p+q)x + pq$ multiplicirt, ſo iſt

$$\begin{array}{llllll} x^m & -\alpha x^{m-1} & +\beta x^{m-2} & -\gamma x^{m-3} & +\delta x^{m-4} & -\text{etc.} \\ & -p\,.\,. & +\alpha p\,.\,. & -\beta p\,.\,. & +\gamma p\,. & . \\ & -q\,.\,. & +\alpha q\,.\,. & -\beta q\,.\,. & +\gamma q\,. & . \\ & & +pq\,.\,. & -\alpha pq\,.\,. & +\beta pq\,. & . \end{array}$$

$$= (x^2 - (p+q)x + pq)\,z.$$

Die Coefficienten ſind mögliche Größen, weil $p + q = 2A$; $pq = A^2 + B^2$ iſt. Sie ſind die Aggregate der Unionen, Binionen, Ternionen, Quaternionen, u. f. von den Wurzeln, p, q, r, s, etc. wie es a, b, c, d, etc. ſind (151.). Alſo iſt $y = (x^2 - (p+q)x + pq)(x-r)(x-s)$ etc.

167. Die Gleichung, $x^{m-2} - \alpha x^{m-3} + \beta x^{m-4} - \text{etc.} = 0$, habe zwey unmögliche Wurzeln r, s, ſo hat ſie den Factor, $(x^2 - (r+s)x + rs)$, und die Gleichung, $y = 0$, hat zwey ſolche quadratiſche mögliche Factoren. Auf dieſe Art erhellt, daß die Gleichung, $y = 0$, ſo viele mögliche quadratiſche Factoren

enthält, als Paare unmöglicher Wurzeln in ihr vorhanden ſind.

Daher gilt der Satz (165.) auch für den Fall, da eine Gleichung unmögliche Wurzeln hat.

168. Exempel. Es ſey $x^5 - 7x^4 + 5x^3 + 95x^2 - 326x + 312 = 0$. Die Wurzeln dieſer Gleichung ſind, $+2$, $+3$, -4, $+3 \pm 2\sqrt{-1}$. Daher iſt der Werth der Gleichung $= (x-2)(x-3)(x+4)(x^2 - 6x + 13)$. Der Werth der Gleichung ſo wie des Products für $x = +5$ iſt $= +432$, für $x = +1$ iſt der Werth beider $= +80$; für $x = -2$ iſt der Werth $= +1160$; für $x = -5$ iſt der Werth $= -3808$.

169. Iſt für eine Gleichung eine mögliche Wurzel, p, oder ein Paar unmöglicher Wurzeln, $A \pm B\sqrt{-1}$, gefunden, ſo läßt ſich die Gleichung durch die Diviſion mit $x - p$, oder mit $x^2 - 2Ax + A^2 + B^2$, um einen Grad, oder um zwey Grade erniedrigen.

170. Exempel. Es ſey $x^4 - ax^3 - bx^2 + ax - (1-b) = 0$. Dieſe Gleichung hat die beiden Wurzeln, ± 1, und läßt ſich daher durch $x - 1$ und $x + 1$, oder durch $x^2 - 1$ dividiren. Der Quotient iſt $x^2 - ax + (1-b) = 0$. Jene beiden Wurzeln laſſen ſich gar nicht als Antworten auf die Frage, deren Beantwortung in der Gleichung enthalten iſt, anſehen. Denn die Wurzeln, welche dieſe Antworten ſind, müſſen von den geſammten Coefficienten, als den durch die Frage gegebenen Größen, abhangen. Dieſe echten Wurzeln ſind $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b + 1.)}$

Die Frage von der Zeit des Jahrs oder dem Orte der Sonne, bey welchen die Dämmerung am kleinſten iſt, führt auf dieſe Gleichung. Die geſuchten Wurzeln ſind Sinus der Declination der Sonne. (Käſtners aſtronom. Abh. I. S. 434. Fuß im aſtron. Jahrb. 1787. S. 233.). Wenn die Frage auch allgemeiner

abgefaßt würde, ſo ſind die Wurzeln ± 1 doch unbrauchbar, weil die Frage für einen Stern in dem einen oder dem andern Weltpole nicht gethan werden kann; es würde daraus folgen, daß ein Coſinus unendlich groß ſey. Nur für die Gleichung in abſtracto können ſie als Wurzeln gelten.

171. Man unterſcheide die weſentlichen (echten) und fremden (zufälligen) Wurzeln einer Gleichung. Jene ſind die, welche von allen Coefficienten, oder von allen Größen, woraus dieſe zuſammengeſetzt ſind, abhangen; die fremden hängen nur von einigen dieſer Größen ab. Joh. Bernoulli nennt dergleichen Wurzeln radices peregrinas, die weſentlichen genuinas. Opp. T. IV. p. 42. Die fremden Wurzeln gelten alſo für einen beſondern Fall der Frage, oder die Gleichung hat durch Multiplicationen bey der Wegſchaffung der Irrationalität, oder bey der Elimination der andern geſuchten Größen einen höhern Grad erhalten, als ſie nach der Anzahl der möglichen Werthe für die unbekannte Größe haben ſollte. In dem Falle, daß man auf eine Gleichung mit fremden Wurzeln geräth, wird man ſich nach einer ſolchen Aufföſung umzuſehen haben, welche dieſe erſpart. Bey der Frage von der kürzeſten Dämmerung iſt eine ſolche Auflöſung möglich. Noch zwey Beyſpiele, wo durch Quadrirung zufällige oder fremde Wurzeln in die Gleichung gekommen ſind, ſehe man in dem Artikel, Anwendung der Analyſis auf die Geometrie, 12; 14.

172. Eine Gleichung kann mögliche Wurzeln enthalten, welche in einem beſondern Falle nicht anwendbar ſind, weil dieſer noch eine Bedingung enthält, die durch dieſe Wurzeln nicht erfüllt wird. Z. B. man ſuche aus dem Umfange und dem Inhalte eines gleichſchenklichten Dreyecks das Dreyeck zu beſtimmen, ſo kommt man auf eine cubiſche Gleichung für die Schenkel des Dreyecks, wiewohl es nur zwey Dreyecke von der gegebenen Beſchaffenheit giebt. Denn die eine Wurzel iſt größer als der halbe Umfang, welches nicht möglich iſt.

173. Wenn der Werth einer Gleichung für einen Werth von x poſitiv, und für einen andern negativ iſt, ſo liegt zwiſchen dieſen beiden Werthen von x eine mögliche Wurzel, oder auch eine ungerade Anzahl von Wurzeln. Sind zwey Werthe der Gleichung gleichnamig, ſo liegt zwiſchen den zugehörigen Werthen von x entweder gar keine oder eine gerade Anzahl von Wurzeln.

Bew. Der Werth der Gleichung iſt, wenn p, q, r, s, etc. die Wurzeln, ſowohl die möglichen, als die unmöglichen, bedeuten, =

$$(x - p)\ (x - q)\ (x - r)\ (x - s), \text{ etc.}$$

in welchem Product je zwey zuſammengehörige unmögliche Factoren ein mögliches Product geben (166.). Jeder mögliche Factor kann poſitiv, oder negativ, oder null ſeyn; die unmöglichen ſind keins von dieſen. Das Product zweyer zuſammengehörigen, $x - A - B\sqrt{-1}$ und $x - A + B\sqrt{-1}$, nämlich $x^2 - 2Ax + A^2 + B^2$, wird für keinen Werth von x null, weil ſonſt daſſelbe zwey mögliche Factoren hätte, und iſt immer poſitiv Man gedenke ſich die möglichen Factoren nach der Größe der dazu gehörigen Wurzeln geordnet, ſo daß p die größte poſitive Wurzel, q die nächſt folgende kleinere, u. ſ. f. bedeute. Unter den negativen Wurzeln ſehe man die abſolut kleinere, als eine relativ größere an. Es erhalte x erſtlich einen poſitiven Werth, der größer als die größte poſitive Wurzel iſt, ſo iſt der Werth der Gleichung poſitiv. Von dieſem Werthe an gedenke man ſich eine ſtetige Reihe von poſitiven Werthen für x bis zu o, und ferner eine ſolche Reihe von negativen bis über die kleinſte (abſolut größte) negative hinaus, und nehme alle mögliche Wurzeln unter einander ungleich an. Jedem Werthe von x iſt ein Werth der Gleichung, der y heiße, zugeordnet. So oft der Werth von x eine Wurzel der Gleichung iſt, iſt der zugehörige Factor der Gleichung = o, alſo auch y = o, und es geſchieht für die Werthe von y ein Übergang ins Entgegengeſetzte. Nämlich, wenn x größer als p iſt, ſo ſind alle Factoren der

Gleichung poſitiv, und y iſt es auch. Für alle Werthe von x zwiſchen p und q iſt ein Factor negativ, alſo ſind alle zugehörigen Werthe von y negativ. Für alle Werthe von x zwiſchen q und r ſind zwey Factoren negativ, aber dadurch ſind die Werthe von y poſitiv. Die Werthe von x zwiſchen r und s machen drey Factoren der Gleichung negativ, und dadurch wird y wieder negativ. Solchergeſtalt geſchieht in der Reihe der Werthe von y ein Übergang vom poſitiven zum negativen, oder vom negativen zum poſitiven, wenn $y = 0$ wird, indem x eine Wurzel der Gleichung iſt. Dieſes ereignet ſich auch in der Reihe der y, die zu negativen Werthen von x gehören. Die negativen Wurzeln der Gleichung ſeyn $-p'$, $-q'$, $-r'$, etc. nach der Folge ihrer abſoluten Quantität von der kleinſten an, ſo entſtehen daraus die Factoren, $x + p'$; $x + q'$; $x + r'$, etc. Jeder dieſer iſt poſitiv, wenn der abſolute Werth des negativen x darin kleiner iſt als die darin enthaltene Wurzel, aber negativ in dem entgegengeſetzten Falle. Bey den Werthen von x, die eine Wurzel der Gleichung ſind, und $y = 0$ machen, geſchieht alſo ebenfalls ein Übergang der Werthe der Gleichung zum Entgegengeſetzten.

Die Gleichung habe zwey gleiche Wurzeln, q, die nächſt größere ſey p, die nächſt kleinere r, ſo entſtehen daraus die Factoren $(x - p)(x - q)(x - q)(x - r)$. Bey dem Übergange des Werthes x von q zu r (wenn x zwiſchen p und r fällt), ändert ſich das Vorzeichen von y nicht, oder es iſt kein Übergang zum Entgegengeſetzten, weil zwey Factoren zugleich negativ werden. Eben ſo bey jeder geraden Anzahl gleicher Wurzeln.

Hingegen bey einer ungeraden Anzahl gleicher Wurzeln geſchieht in den Werthen der Gleichung ein Übergang zum Entgegengeſetzten, wenn x einer ſolchen Wurzel gleich iſt.

Man mag für jede der gleichen Wurzeln auch einen Übergang zum Entgegengeſetzten ſich gedenken, nur daß bey einer geraden Anzahl alle Übergänge unmittelbar auf-

einander folgen und dadurch ſich aufheben, eben ſo wie bey einer ungeraden Anzahl alle bis auf einen.

Umgekehrt iſt aus einer entgegengeſetzten Beſchaffenheit zweyer Werthe einer Gleichung zu ſchlieſſen, daß zwiſchen den zugehörigen Werthen von x eine Wurzel oder eine ungerade Anzahl derſelben liege. Denn es kann in der Reihe der Werthe von y kein Übergang zum Entgegengeſetzten anders geſchehen, als wenn ein Factor Null wird.

Hingegen iſt eine gleichnamige Beſchaffenheit zweyer Werthe einer Gleichung nur dadurch möglich, daß entweder zwiſchen den dazu gehörigen Werthen von x keine Wurzel liegt, oder daß eine gerade Anzahl von Übergängen geſchieht, indem zwiſchen den zugehörigen Werthen von x zwey, vier, oder irgend eine gerade Anzahl Wurzeln, auch gleicher, liegt.

174. Da das Product zweyer unmöglichen Wurzeln poſitiv iſt, ſo mag man ſie in dem Producte aller Wurzeln ſo gut zu den poſitiven als zu den negativen rechnen. In einer Gleichung eines ungeraden Grades ſey das letzte Glied = + k, ſo iſt — k das Product aller Wurzeln, und die Gleichung hat eine ungerade Anzahl negativer Wurzeln, alſo wenigſtens eine ſolche. Sie mag aber gar keine poſitive haben. Iſt das letzte Glied = — k, ſo iſt + k das Product aller Wurzeln, und die Anzahl der poſitiven iſt ungerade, ſo daß es wenigſtens eine mögliche poſitive giebt, dagegen die negativen alle fehlen können.

Die Gleichung ſey von einem geraden Grade, und das letzte Glied = + k, ſo iſt eben dieſes das Product aller Wurzeln, die daher alle unmöglich ſeyn können. Iſt das letzte Glied = — k, ſo hat die Gleichung eine ungerade Anzahl ſowohl poſitiver als negativer Wurzeln, letztere wegen des Vorzeichens —, und dadurch eine ungerade Anzahl poſitiver, weil der Grad der Gleichung gerade iſt, und die unmöglichen nur paarweiſe vorhanden ſind.

175. Der Übergang von zwey möglichen, einander zunächſt liegenden Wurzeln, zu zwey unmöglichen, durch die dazu dienliche Veränderung der Coefficienten, geſchieht durch zwey einander gleiche Wurzeln. Zwiſchen zwey Wurzeln p und q liegen zwey mögliche m + n und m — n, und keine andere. Wird n = o genommen, ſo entſtehen daraus zwey gleiche, m, m, und wenn $n\sqrt{-1}$ ſtatt n geſetzt wird, die unmöglichen $m \pm n\sqrt{-1}$. Die Summe iſt für jedes Paar = 2m. Das Product jener erſtern iſt = mm — nn; das Product der gleich großen = mm, dasjenige der unmöglichen = mm + nn. Der Werth der Gleichung macht keinen Übergang zum entgegengeſetzten, wenn der zugehörige Werth von x zwiſchen p und q genommen wird, ſowohl in dem Falle zweyer gleichen Wurzeln als zweyer unmöglichen.

Dieſes und das nächſt vorhergehende kann man ſich durch eine Zeichnung der Werthe einer Gleichung als Ordinaten einer Curve zu den Werthen von x als Abſciſſen ſehr erläutern, nach der Anweiſung in dem Artikel, Anwendung der Geometrie auf die Algebra. IV.

176. Wenn für die unbekannte Größe in einer Gleichung die Glieder einer arithmetiſchen Reihe geſetzt werden, ſo ſind in einer Gleichung vom zweyten Grade die zweyten Unterſchiede der Werthe der Gleichung unveränderlich, in einer Gleichung vom dritten Grade die dritten Unterſchiede, allgemein in einer Gleichung vom mten Grade die mten Unterſchiede der Werthe der Gleichung.

Der Satz iſt ſchon in dem Artikel, arithmetiſche Reihen höherer Ordnungen, 24, erwieſen. Man kann den Satz auch aus der allgemeinen Form der Glieder arithmetiſcher Reihen irgend einer Ordnung herleiten.

177. Es ſey y ein Glied einer arithmetiſchen Reihe der mten Ordnung, die Stelle deſſelben x, das Anfangsglied der Reihe ſey A, die Anfangsglieder der Differenzreihen, nach ihrer Folge, a, b, c, d, etc. ſo iſt (a. a. O. 7.)

$$y = A + x.a + \frac{x.x-1.}{1.2} b + \frac{x.x-1.x-2.}{1.2.3} c$$

$$+ \frac{x.x-1.x-2.x-3.}{1.2.3.4} d \ldots\ldots$$

$$+ \frac{x.x-1\ldots.x-m+1}{1.2\ldots. m} m',$$

wo m′ das beſtändige Differenzglied der mten Differenzreihe bedeutet. Entwickelt man die Glieder durch wirkliche Multiplication, und ordnet das Aggregat nach den Potenzen von x, ſo erhält y die Form

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \ldots Mx^m,$$

das iſt, eben diejenige, welche der Werth einer Gleichung vom mten Grade mit ganzen Exponenten der unbekannten Größe hat. Dieſer Werth iſt alſo ein Glied einer arithmetiſchen Reihe der mten Ordnung, deren mte Differenzreihe beſtändige Glieder enthält. Iſt x eine ganze, poſitive, oder negative Zahl, ſo iſt y ein Glied der Reihe, zu welcher die Differenzreihen mit den Anfangsgliedern, a, b, c, d, ... m′ gehören; iſt x eine gebrochne Zahl, ſo iſt y ein eingeſchaltetes Glied. Sind die Stellen der Glieder der erweiterten Reihe in einfacher arithmetiſcher Fortſchreitung, ſo ſind die mten Unterſchiede ebenfalls beſtändig, wie in der urſprünglichen Reihe (a. a. O. 25. ff.).

178. Vergleicht man die Coefficienten einer Gleichung mit den Coefficienten von x in dem entwickelten Werthe des Gliedes einer arithmetiſchen Reihe, ſo ergeben ſich die Anfangsglieder der Differenzreihen, auf die Art, wie das folgende Beyſpiel zeigt.

Die Gleichung ſey

$$0 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5$$

Man nehme die Werthe dieſer Gleichung für die poſitiven Werthe 1, 2, 3, 4, 5 von x, und ſetze dieſe den Werthen der Glieder einer arithmetiſchen Reihe der fünften Ordnung für dieſelben Werthe von x gleich, ſo iſt

$$\text{I. } A + B + C + D + E + F = A + a$$

$$\text{II. } A + 2B + 4C + 8D + 16E + 32F = A + 2a + b$$

$$\text{III. } A + 3B + 9C + 27D + 81E + 243F = A + 3a + 3b + c.$$

$$\text{IV. } A + 4B + 16C + 64D + 256E + 1024F = A + 4a + 6b + 4c + d$$

$$\text{V. } A + 5B + 25C + 125D + 625E + 3125F = A + 5a + 10b + 10c + 5d + e.$$

Hieraus ergiebt ſich nach der Reihe ganz leicht

$$a = B + C + D + E + F$$

$$b = 2C + 6D + 14E + 30F$$

$$c = 6D + 36E + 150F$$

$$d = 24E + 240F$$

$$e = 120F$$

In dieſen Formeln liegen auch die für niedrige Gleichungen gehörige.

179. Exempel. Die Gleichung ſey $x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 4x - 140 = 0$, ſo iſt $A = -140$; $B = -4$; $C = +20$; $D = -10$; $E = +1$; $F = 0$. Daraus iſt $a = +7$; $b = -6$; $c = -24$; $d = +24$. Die Reihe der Werthe der Gleichung mit den Gliedern der Differenzreihen für die ganzen Werthe x von + 8 bis − 2 enthält die folgende Tafel

x	y	Δy	Δ²y	Δ³y	Δ⁴y
— 2	+ 44	— 149	+ 114	— 72	+ 24
— 1	— 105	— 35	+ 42	— 48	+ 24
0	— 140	+ 7	— 6	— 24	+ 24
+ 1	— 133	+ 1	— 30	0	+ 24
+ 2	— 132	— 29	— 30	+ 24	+ 24
+ 3	— 161	— 59	— 6	+ 48	+ 24
+ 4	— 220	— 65	+ 42	+ 72	+ 24
+ 5	— 285	— 23	+ 114	+ 96	+ 24
+ 6	— 308	+ 91	+ 210	+ 120	+ 24
+ 7	— 217	+ 301	+ 330	+ 144	+ 24
+ 8	+ 84	+ 631	+ 474	+ 168	+ 24

180. Durch Hülfe der Differenzreihen laſſen ſich die Werthe einer numeriſchen Gleichung für eine Folge der x bequem berechnen, woraus man, mittelſt des Vorzeichenwechſels die Zahlen erfährt, zwiſchen welchen Wurzeln liegen. In dem Exempel fällt eine Wurzel zwiſchen + 7 und + 8; eine zwiſchen — 1 und — 2. Die Beſchaffenheit der Glieder in der Hauptreihe und in den Differenzreihen zeigt, daß die Gleichung nicht mehr als dieſe beiden möglichen Wurzeln haben kann.

181. Die Vorzeichenwechſel in der Reihe der Δy geſchehen da, wo die Werthe von y am größten ſind, in Beziehung auf die vorhergehenden und nachfolgenden Glieder. Hätte die Gleichung vier mögliche Wurzeln, ſo müßte bey dem mittlern Wechſel der Vorzeichen in der Reihe Δy der Werth der Gleichung poſitiv ſeyn, (das Vorzeichen + haben), da er hier negativ iſt. S. Größtes und Kleinſtes.

VII. Von Gleichungen, in welchen zwey oder mehrere Wurzeln einander gleich ſind.

182. Die cubiſche Gleichung, $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, habe zwey gleiche Wurzeln, ſo iſt diejenige,

welche ihr zweymahl zukommt, eine der Wurzeln der quadratiſchen Gleichung, $3x^2 - 2ax + b = 0$.

Bew. Die Wurzeln der cubiſchen Gleichung ſeyn p, p, q, ſo iſt I. $2p + q = a$; II. $p^2 + 2pq = b$ (59.). Jene werde mit $2p$ multiplicirt, und darauf die zweyte abgezogen, ſo iſt $3pp = 2ap - b$. Dieſe Gleichung giebt zwey Werthe für p, welches daher rührt, daß von den drey Wurzeln einer cubiſchen Gleichung, p, q, r, ſowohl p und q als q und r gleich groß geſetzt werden können, wenn p, q, r die Folge der Wurzeln nach ihrer Größe und Beziehung iſt. Da dies aber nicht zugleich geſchehen kann, wenn nur zwey Wurzeln einander gleich ſeyn ſollen, ſo giebt die quadratiſche Gleichung mit der geſuchten Wurzel noch eine fremde verbundene. Setzt man x ſtatt p, ſo iſt $3x^2 - 2ax + b = 0$.

183. Die Wurzel welche der biquadratiſchen Gleichung, $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$, zweymahl zukommt, iſt eine der Wurzeln der cubiſchen Gleichung, $4x^3 - 3ax^2 + 2bx - c = 0$.

Bew. Die Wurzeln der biquadratiſchen Gleichung ſeyn p, p, q, r, ſo iſt (59.)

$$\text{I. } 2p + q + r = a$$

$$\text{II. } p^2 + 2p(q + r) + qr = b$$

$$\text{III. } p^2(q + r) + 2pqr = c.$$

Daraus iſt

$$\text{I. } 6p^3 + 3p^2(q + r) = 3ap^2$$

$$\text{II } 2p^3 + 4p^2(q + r) + 2pqr = 2bp$$

$$\text{III } p^2(q + r) + 2pqr = c.$$

Aus dieſen folgt ſogleich

$$\text{IV. } 4p^3 = 3ap^2 - 2bp + c.$$

Dieſe Gleichung für p ſteigt auf den dritten Grad, weil von den vier Wurzeln einer biquadratiſchen Gleichung

jede ihrer nächſten gleich geſetzt werden kann. Da aber nur zwey Wurzeln gleich groß ſeyn ſollen, ſo ſind mit der geſuchten Wurzel noch zwey fremde verbunden, und p iſt eine der Wurzeln der Gleichung

$$4x^3 - 3ax^2 + 2bx - c = 0.$$

Man bemerke, daß hier wie bey der quadratiſchen Gleichung die Coefficienten die Exponenten der vorgegebenen Gleichung mit zwey gleichen Wurzeln ſind.

184. Die biquadratiſche Gleichung habe drey gleich große Wurzeln, p, p, p, nebſt einer andern q, ſo iſt die Wurzel p eine der Wurzeln der quadratiſchen Gleichung, $6x^2 - 3ax + b = 0$.

Denn es iſt $3p + q = a$, und $3pp + 3pq = b$, woraus $6pp = 3ap - b$, ſo daß p eine der Wurzeln der Gleichung, $6x^2 - 3ax + b = 0$, iſt.

Dieſe Gleichung hat mit der in (183.) gefundenen cubiſchen Gleichung, $4x^3 - 3ax^2 + 2bx - c = 0$, die Wurzel gemein, welche derſelben zweymahl zukommt. Denn ſie entſteht daraus durch die Multiplication der Coefficienten mit den Exponenten von x, und Diviſion aller durch die Zahl 2. Die cubiſche Gleichung hat daher in dieſem Falle zwey gleich große Wurzeln mit der biquadratiſchen gemein. Von den vier Wurzeln einer biquadratiſchen Gleichung laſſen drey ſich nächſte auf zweyerley Art ſich gleich ſetzen.

185. Es ſey gegeben die Gleichung,

$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} - \text{etc.} = 0$, (A), und es ſey zugleich $mx^{m-1} - (m-1)ax^{m-2} + (m-2)bx^{m-3} - (m-3)cx^{m-4} + (m-4)dx^{m-5} - \text{etc.} = 0$, (B), ſo hat die Gleichung (A) zwey gleich große Wurzeln, von welchen eine der Gleichung (B) zukommt.

Iſt zugleich $m(m-1)x^{m-2} - (m-1)(m-2)ax^{m-3} + (m-2)(m-3)bx^{m-4} - (m-3)(m-4)cx^{m-5} + (m-4)(m-5)dx^{m-6} - \text{etc.} = 0$, (C),

ſo hat die Gleichung (A) drey gleiche Wurzeln, von welchen zwey der Gleichung (B) gehören, und eine in der Gleichung (C) enthalten iſt.

Iſt noch zugleich $m(m-1)(m-2)x^{m-3}$ $-(m-1)(m-2)(m-3)ax^{m-4}$ $+(m-2)(m-3)(m-4)bx^{m-5}$ $-(m-3)(m-4)(m-5)cx^{m-6}+\text{etc.}=0$, (D), ſo hat die Gleichung (A) vier gleiche große Wurzeln, von welchen drey in (B), zwey in (C) enthalten ſind, und eine in (D).

Bew. I. Es ſey p eine der Wurzeln in der Gleichung (A), eine andere $= p + u$, ſo iſt

$$p^m - ap^{m-1} + bp^{m-2} - cp^{m-3} + dp^{m-4} - \text{etc.} = 0$$

und

$$(p+u)^m - a(p+u)^{m-1} + b(p+u)^{m-2} - c(p+u)^{m-3} + d(p+u)^{m-4} - \text{etc.} = 0.$$

II. Entwickelt man die Potenzen des Binomium (binomiſcher Lehrſatz, 1.), und zieht die erſte Gleichung von der zweyten ab, ordnet auch die Glieder nach den Potenzen von u, ſo entſteht eine Gleichung von der Form,

$$Pu + Qu^2 + Ru^3 + Su^4 \ldots + u^m = 0, \text{ (M)}.$$

III. Die Coefficienten ſind

$$P = mp^{m-1} - (m-1)ap^{m-2} + (m-2)bp^{m-3} - (m-3)cp^{m-4} + \text{etc.}$$

$$Q = \frac{m.m-1.}{1.2}p^{m-2} - \frac{m-1.m-2.}{1.2}ap^{m-3} + \frac{m-2.m-3.}{1.2}bp^{m-4} - \frac{m-3.m-4.}{1.2}cp^{m-5} + \text{etc.}$$

$$R = \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} p^{m-3} - \frac{m-1.m-2.m-3.}{1.2.3} a p^{m-4}$$
$$+ \frac{m-2.m-3.m-4.}{1.2.3} b p^{m-5} - \text{etc.}$$

$$S = \frac{m.m-1.m-2.m-3.}{1.2.3.4} p^{m-4} - \frac{m-1..m-4.}{1..4} a p^{m-5}$$
$$+ \frac{m-2..m-5.}{1..4} b p^{m-6} - \text{etc.}$$

u. ſ. f.

IV. Die Gleichung (M) iſt $= 0$, entweder dadurch, daß $u = 0$ iſt, oder dadurch, daß

$$P + Qu + Ru^2 + Su^3 \ldots u^{m-1} = 0, \quad (N)$$

iſt. Die Gleichung (N) ſteigt auf den $(m - 1)$ten Grad, weil der Unterſchied einer Wurzel p in (A) von den übrigen $m - 1$ Wurzeln der Gleichung $m - 1$ Werthe hat. Der Unterſchied der Wurzel p von ihr ſelbſt, oder $p - p = 0$, giebt die Wurzel $u = 0$ der Gleichung (M).

V. Da die Gleichung (A) m Wurzeln hat, ſo entſtehen m Gleichungen wie (N), und dadurch werden $m(m - 1)$ Werthe für u erhalten. Es ſind ſo viele Unterſchiede je zweyer Wurzeln in (A) vorhanden, als Paare von Wurzeln genommen werden können, alſo $\frac{1}{2}m(m - 1)$. Die Unterſchiede können ſowohl poſitiv als negativ ſeyn, wodurch $m(m - 1)$ Unterſchiede entſtehen.

VI. Es ſey $P = 0$, aber nicht $Q = 0$, ſo wird in (N) eine Wurzel $u = 0$, alſo ein Werth von $p + u = p$, und die Gleichung (A) hat zwey gleich große Wurzeln. Die Annahme, $P = 0$, giebt

$$0 = mp^{m-1} - (m-1)ap^{m-2} + (m-2)bp^{m-3}$$
$$- (m-3)cp^{m-4} + (m-4)dp^{m-5} - \text{etc.} \quad (P).$$

Dieſe Gleichung ſteigt auf den (m — 1)ten Grad, weil es m — 1 Fälle giebt, wie unter m Wurzeln zwey glei-che ſeyn können. Ordnet man ſie nämlich nach ihrer Größe, die größte poſitive voran, bis zu der kleinſten po-ſitiven, dann die abſolut kleinſte negative, bis zu der ab-ſolut größten, ſo können die erſte und zweyte, oder die dritte und vierte, u. ſ. f. gleich groß ſeyn.

VII. So viele Paare gleicher Wurzeln (A) hat, ſo viele Wurzeln hat ſie mit der Gleichung (P) gemein. Für jede andere Wurzel in (A), die keine ihr gleiche hat, findet die Gleichung (N) nicht Statt, als welche darauf beruht, daß der Unterſchied zwiſchen zwey Wurzeln, p und p + u, Null ſey. Die andern Wurzeln in (P), außer den mit (A) gemeinſchaftlichen, ſind daher als frem-de Wurzeln zu betrachten.

VIII. Da P = 0 geſetzt iſt, ſo verwandelt die Gleichung (N) ſich in folgende,

$$Q + Ru + Su^2 + Tu^3 \dots u^{m-2} = 0,$$

welche m — 2 Werthe von u, die nicht = 0 ſind, ent-hält. Es ſey Q = 0, aber nicht R = 0, ſo hat die Gleichung (N) zwey Wurzeln, die = 0 ſind. Unter-ſcheidet man die Wurzeln dieſer Gleichung durch die Bezeichnungen u′, u″, u‴, etc. nach der Folge ihrer Quantität, ſo werden von den Wurzeln in (A), die nun durch p, p + u′, p + u″, p + u‴, etc. bezeichnet werden, die drey hier zuerſt geſetzten gleich groß. Die Annahme, Q = 0, giebt

$$0 = \frac{m.m-1.}{1.2} p^{m-2} - \frac{m-1.m-2.}{1.2} a p^{m-3}$$

$$+ \frac{m-2.m-3.}{1.2} b p^{m-4} - \frac{m-3.m-4.}{1.2} c p^{m-5}$$

$$+ \text{etc. (Q).}$$

Die Gleichung ſteigt auf den (m — 2)ten Grad, weil es (m — 2) Fälle giebt, daß unter m Wurzeln drey gleich große vorhanden ſind, als die erſte, zweyte und

dritte, oder die zweyte, dritte und vierte, u. ſ. f. So oft (A) drey gleiche Wurzeln enthält, ſo viele Wurzeln hat (Q) mit (A) gemein.

IX. Die Gleichung $Q = 0$ entſteht aus der, $P = 0$, auf gleiche Art, wie dieſe aus der, $A = 0$, entſteht. Es hat alſo die Gleichung, $P = 0$, zwey gleich große Wurzeln (oder Paare gleicher), von welchen eine (oder ſo viele als jene Paare) der Gleichung $Q = 0$ zukommt. Jene beiden ſind daher zwey von den drey gleichen in der Gleichung, $A = 0$.

X. Da P und $Q = 0$ geſetzt ſind, ſo verwandelt die Gleichung (N) ſich in dieſe,

$$R + Su + Tu^2 \ldots u^{m-3} = 0,$$

welche $m - 3$ Werthe von u, die nicht $= 0$ ſind, enthält. Iſt $R = 0$, aber S nicht $= 0$, ſo hat die Gleichung (N) drey Wurzeln $= 0$, und die Gleichung (A) hat vier gleiche Wurzeln. Dieſe Annahme giebt

$$0 = \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} p^{m-3} - \frac{m-1.m-2.m-3.}{1.2.3} a p^{m-4} + \frac{m-2.m-3.m-4.}{1.2.3} b p^{m-5} - \text{etc.} \quad (R.)$$

So vielmahl (A) vier gleiche Wurzeln enthält, ſo viele Wurzeln hat (A) mit (R) gemein. Die Gleichung, $P = 0$, enthält je drey von jenen Wurzeln, und die Gleichung, $Q = 0$, je zwey von denſelben.

XI. Auf dieſelbe Art werden die Gleichungen gefunden, welche von n gleichen Wurzeln der Gleichung (A) enthalten $n - 1$, $n - 2$, $n - 3$, ... 2, 1 Wurzeln.

XII. Multiplicirt man die gefundenen Gleichungen jede mit dem gemeinſchaftlichen Theiler ihrer Glieder, und ſetzt x ſtatt p, ſo erhält man die in dem Satze aufgeführten derivirten Gleichungen, welche mit der gegebenen Gleichung (A) eine Wurzel gemein haben, entweder einfach oder mehrfach.

XIII. Die Gleichung $P = 0$ iſt der Differential-quotient $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, wenn y der Werth der Gleichung (A) iſt. Ferner iſt die Gleichung $Q = 0$, der Differen-tialquotient $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$; die Gleichung $R = 0$, der Dif-ferentialquotient $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$, u. ſ. f. S. Größte und kleinſte Werthe einer Function.

186. Die Gleichung (N) enthält die Relation irgend einer Wurzel von (A) und ihrem Unterſchiede von jeder der übrigen Wurzeln. Verbindet man beide Glei-chungen mit einander, ſo läßt ſich x herausſchaffen, und es ergiebt ſich eine Gleichung zwiſchen u und den gegebe-nen Größen der Gleichung. Dieſe ſteigt aber auf den m(m —)ten Grad, weil der Unterſchied u ſo viele Werthe hat, als Binionen zweyer Wurzeln, poſitiv oder negativ (p — q oder q — p) möglich ſind, (185. V.) Wegen des gedoppelten Vorzeichens, ±, ſind in der Glei-chung für u bloß die geraden Potenzen davon vor-handen.

187. Die Coefficienten dieſer abſoluten Gleichung für u werden auf dem Wege der Elimination ſehr mühſam gefunden. La Grange hat eine ſinnreiche Methode in den Mem. de l'Ac. de Berlin 1767. p. 330, ſur la reſolution des équations numériques, angegeben, die ſich auf die Lehrſätze von der Relation der Summen der Combinationen und der Potenzen einer Anzahl Größen gründet. Sie kann aber nicht in der Kürze vorgetragen werden, daher hier die Anzeige für den geübten Leſer ge-nügen muß. Man findet ſie auch in der vermehrten Aus-gabe dieſer beiden Abhandlungen à Paris An. VI. pag. 9. ff. p. 24. ff. und p. 118. ff. und in Michelſens Theorie der Gleichungen, S. 66. ff.

188. Wenn die Gleichung für u^2 gefunden iſt, ſo dient ſie zu entdecken, wie viele Paare gleich groſser Wurzeln die Gleichung (A) hat. Sind zwey gleiche Wurzeln in derſelben, ſo iſt ein Werth von $u^2 = 0$, alſo das gegebene Glied $= 0$. Sind zwey Paare gleicher Wurzeln in (A), ſo iſt zugleich der Coefficient von $u^2 = 0$. Sind drey gleiche Wurzeln, oder drey Paare gleicher Wurzeln vorhanden, ſo ſind außer dem gegebenen Gliede, die Coefficienten von u^2 und von $u^4 = 0$, u. ſ. w.

189. Auch dient die abſolute Gleichung für u zur Entdeckung und Beſtimmung der unmöglichen Wurzeln, ſ. Mém. de l'Acad. de Berlin 1768. p. 113. ff. in den Zuſätzen zu den angeführten Abh. von la Grange. Jeder poſitive Werth von u^2 zeigt zwey mögliche Wurzeln in (A) an. Ein negativer möglicher Werth von u^2 zeigt zwey unmögliche zuſammengehörige Wurzeln $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ an. Ein unmöglicher Werth von u^2 entſteht aus dem Unterſchiede einer möglichen und unmöglichen Wurzel, oder zweyer unmöglichen nicht zuſammengehörigen. Allein wegen der Höhe der Gleichung für u, wenn (A) noch eine mäßige Höhe hat, iſt es nicht leicht ſich derſelben zu dieſen Abſichten zu bedienen.

190. Wie die mehrfachen Wurzeln und die dazu erforderliche Relation der Coefficienten gefunden werden, zeigt das Verfahren an den niedrigern Gleichungen, durch Elimination der höhern Potenzen von x.

Die cubiſche Gleichung,

$$\text{I. } x^3 - ax^2 + bx - c = 0,$$

habe zwey gleiche Wurzeln, ſo iſt

$$\text{II. } 3x^2 - 2ax + b = 0,$$

zufolge (182.). Aus beiden wird

$$\text{III. } ax^2 - 2bx + 3c = 0.$$

Aus II. und III. entſteht

$$\text{IV. } (2a^2 - 6b)\,x - (ab - 9c) = 0,$$

und

$$\text{V. } (ab - 9c)\,x - (2bb - 6ac) = 0.$$

Hieraus iſt $x = \frac{ab - 9c}{2aa - 6b}$,

und $x = \frac{2bb - 6ac}{ab - 9c}$,

alſo iſt die Relation der Coefficienten in der Gleichung,

$$(ab - 9c)^2 = 4(aa - 3b)(bb - 3ac),$$

enthalten.

191. Die biquadratiſche Gleichung,

$$\text{I. } x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0,$$

habe zwey gleiche Wurzeln, ſo iſt (183)

$$\text{II. } 4x^3 - 3ax^2 + 2bx - c = 0.$$

Aus der Verbindung beider Gleichungen folgt

$$\text{III. } ax^3 - 2bx^2 + 3cx - 4d = 0.$$

Aus II. und III. wird

$$\text{IV. } (3aa - 8b)\,x^2 - (ab - 12c)\,x + (ac - 16d) = 0.$$

$$\text{V. } (ac - 16d)\,x^2 - (2bc - 12ad)\,x + (3cc - 8bd) = 0.$$

Man ſetze zur Abkürzung

$3aa - 8b = A$; $2ab - 12c = B$; $ac - 16d = C$;

$ac - 16d = \alpha$; $2bc - 12ad = \beta$; $3cc - 8bd = \gamma$;

ſo iſt

$$\text{VI. } (A\beta - B\alpha)\,x - (A\gamma - C\alpha) = 0,$$

$$\text{VII. } (A\gamma - C\alpha)\,x - (B\gamma - C\beta) = 0.$$

Alſo iſt $x = \frac{A\gamma - C\alpha}{A\beta - B\alpha}$,

$$\text{und } x = \frac{B\gamma - C\beta}{A\gamma - C\alpha}.$$

Folglich

$$(A\gamma - C\alpha)^2 = (A\beta - B\alpha)(B\gamma - C\beta).$$

192. Exempel. Es ſey $x^4 - 18x^3 + 93x^2 - 80x - 300 = 0$, ſo iſt $A = + 228$; $B = + 2388$; $C = + 6240$; $\alpha = + 6240$; $\beta = + 79680$; $\gamma = + 242400$; $A\gamma - C\alpha = + 16329600$; $A\beta - B\alpha = + 3265920$; $B\gamma - C\beta = + 81648000$. Beide Werthe von x ſind ſich gleich, und $= + 5$.

193. Wenn $A\gamma = C\alpha$, und $B\gamma = C\beta$, daher auch $A\beta = B\alpha$ iſt, ſo ſind die Werthe $x = \frac{0}{0}$. Dieſe Form zeigt an, daß Zähler und Nenner einen Factor enthalten, der Null iſt. Die Gleichung VII. entſtehe aus VI. durch die Multiplication mit einer gewiſſen Größe, ſo iſt $A : B = \alpha : \beta$; und $A : C = \alpha : \gamma$; auch $B : C = \beta : \gamma$, woraus ſich jene drey Gleichungen ergeben. Die beiden quadratiſchen Gleichungen ſind dadurch ſich gleichgültig. Daher hat die biquadratiſche Gleichung zwey Paare gleicher Wurzeln, die durch die eine oder die andere quadratiſche Gleichung gegeben werden. Der Werth von x iſt in dieſem Falle zweyfach, und kann nicht durch eine einfache Gleichung gegeben werden. Drey gleiche große Wurzeln geben auch zwey Paare gleicher Wurzeln.

194. Dieſes noch deutlicher einzuſehen, bilde man eine biquadratiſche Gleichung durch die Multiplication der Quadrate,

$$x^2 - 2mx + m^2, \text{ und } x^2 - 2nx + n^2,$$

ſo daß

$$x^4 - 2(m+n)x^3 + (m^2 + n^2 + 4mn)x^2$$
$$- 2mn(m+n)x + m^2n^2 = 0.$$

Hier iſt $a = 2(m+n)$; $b = m^2 + n^2 + 4mn$; $c = 2mn(m+n)$; $d = m^2n^2$; alſo $A = 4(m-n)^2$;

$B = 4(m+n)(m-n)^2$; $C = 4mn(m-n)^2$; dann noch $\alpha = 4mn(m-n)^2$; $\beta = 4mn(m+n)(m-n)^2$; $\gamma = 4m^2n^2(m-n)^2$. Folglich iſt $A\gamma = C\alpha$; und $A\beta = B\alpha$; auch $B\gamma = C\beta$. Die beiden Gleichungen VI. und VII. in (191.) ſind, nach geſchehener Diviſion durch die gemeinſchaftlichen Factoren ihrer Glieder,

$$x^2 - (m+n)x + mn = 0.$$

Dieſe Gleichung enthält die beiden Wurzeln, m, n, welche in der biquadratiſchen Gleichung beide zweymahl vorhanden ſind.

195. Hat die biquadratiſche Gleichung die Wurzeln, p, p, p, q, ſo iſt ſie

$$x^4 - (3p+q)x^3 + 3p(p+q)x^2 - p^2(p+3q)x + p^3q = 0.$$

Aus den Coefficienten dieſer Gleichung wird ebenfalls $A\beta = B\alpha$; $A\gamma = C\alpha$; $B\gamma = C\beta$, und die Gleichungen IV. V. in (191.) ſind jede $x^2 - 2px + p^2 = 0$.

196. Die gleichen Wurzeln laſſen ſich auch dadurch finden, daß man den gemeinſchaftlichen Theiler der gegebenen Gleichung und der abgeleiteten ſucht, auf ähnliche Art wie bey Zahlen (ſ. Theiler gemeinſchaftlicher). Die Form dieſes Theilers iſt durch die Vorausſetzung wegen der Gleichheit der Wurzeln gegeben. Wenn $\frac{A}{B} = a + \frac{C}{B}$ iſt, ſo haben C und B den gemeinſchaftlichen Factor, den A und B enthalten. Iſt ferner $\frac{B}{C} = b + \frac{D}{C}$, ſo haben D und C denſelben gemeinſchaftlichen Factor wie B und C, alſo auch wie B und A, u. ſ. f.

Man kann auch zu A, B, C und D irgend welchen Factor ſetzen, oder von jedem einen in den andern nicht enthaltenen Factor abſondern, ohne dadurch in Rückſicht der gemeinſchaftlichen Factoren etwas zu ändern.

197. Exempel. Die cubiſche Gleichung, $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, und die daraus hergeleitete, $3x^2 - 2ax + b = 0$, haben eine Wurzel gemeinſchaftlich. Alſo haben die beiden Functionen,

A) $x^3 - ax^2 + bx - c$

B) $x^2 - \frac{2}{3}ax + \frac{1}{3}b$,

einen gemeinſchaftlichen Factor, $x - p$, worin p die gemeinſchaftliche Wurzel der beiden Gleichungen iſt. Multiplicirt man beyde mit 3, und dividirt 3(A) durch 3(B), ſo iſt der erſte Reſt $= - ax^2 + 2bx - 3c$, wofür man auch das entgegengeſetzte nehmen kann. Mit dieſem dividire man die Function a(B), ſo iſt der erſte Reſt $= -(2aa - 6b)x + (ab - 9c)$, oder auch $(2aa - 6b)x - (ab - 9c)$, das iſt, $\left(x - \frac{ab - 9c}{2aa - 6b}\right)(2aa-6b)$.

Der gemeinſchaftliche Factor, $x - p$, der beiden Functionen, A, B, iſt es auch von dieſem Reſte; alſo iſt $x - p$ gleich dem Factor des Reſtes, der dieſelbe Form hat; folglich iſt $p = \frac{ab - 9c}{2aa - 6b}$.

198. Die beiden Functionen,

P) $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d$

Q) $4x^3 - 3ax^2 + 2bx - c$,

haben eine gemeinſchaftliche Wurzel, p, wodurch jede derſelben Null wird, oder P und $\frac{1}{4}$Q haben den gemeinſchaftlichen Factor, $x - p$. Um p zu finden, dividire man 4P durch Q, ſo iſt der erſte Reſt

R) $- ax^3 + 2bx^2 - 3cx + 4d$.

Das entgegengeſetzte nehme man zum Diviſor aQ, ſo iſt der erſte Reſt entgegengeſetzt genommen

S) $(3aa - 8b)x^2 - (2ab - 12c)x + (ac - 16d)$.

Nimmt man bey der Diviſion den niedrigſten Theil, $+ 4d$, zum erſten Theil, ſo iſt der erſte Reſt

T) $+ (8abd - 3ac^2)x - (12aad - 2abc)x^2 + (16ad - aac)x^3$,

wovon die Factoren a und x abgeſondert werden können. So wird dieſer Reſt, entgegengeſetzt genommen,

T) $(ac - 16d)x^2 - (2bc - 12ad)x + (3cc - 8bd)$.

Dieſer Reſt hat wie S den Factor $x - p$. Gebraucht man die in (10) gemachten Bezeichnungen, ſo iſt

$$\text{S)} \quad Ax^2 - Bx + C.$$

$$\text{T)} \quad \alpha x^2 - \beta x + \gamma.$$

Multiplicirt man S durch α, und dividirt durch T, ſo iſt der Reſt, entgegengeſetzt genommen,

$$\text{U)} \quad (A\beta - B\alpha)x - (A\gamma - C\alpha),$$

oder

$$\left(x - \frac{A\gamma - C\alpha}{A\beta - B\alpha}\right)(A\beta - B\alpha).$$

Da U den Factor $x - p$ hat, ſo iſt $x - p$ gleich dem Factor von derſelben Form, und daher

$$p = \frac{A\gamma - C\alpha}{A\beta - B\alpha}.$$

Dividirt man T durch S, ſo erhält man für $x - p$ daſſelbe Reſultat. Nimmt man aber zum erſten Theil des Diviſors das niedrigſte Glied von T, nämlich γ, und multiplicirt C mit γ, ſo wird der Reſt

$$\text{V)} \quad - (B\gamma - C\beta)x + (A\gamma - C\alpha)x^2,$$

oder nach Abſonderung des Factors x,

$$(A\gamma - C\alpha)x - (B\gamma - C\beta).$$

Hieraus folgt $p = \dfrac{B\gamma - C\beta}{A\gamma - C\alpha}$.

199. Hat die biquadratiſche Gleichung zwey verſchiedene Paare gleicher Factoren, ſo haben die Functionen P und $\frac{1}{4}Q$ einen quadratiſchen Factor, $x^2 - (m+n)x + mn$, gemein. Dieſer iſt in dem Reſte S enthalten. Man gebe dieſem, mit den abgekürzten Bezeichnungen, die Form,

$$\left(x^2 - \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right) A,$$

ſo iſt $m + n = \frac{B}{A}$; $mn = \frac{C}{A}$.

Eben derſelbe iſt aber auch in T enthalten. Dieſer Reſt giebt $m + n = \frac{\beta}{\alpha}$; $mn = \frac{\gamma}{\alpha}$. Dadurch iſt $A\beta = B\alpha$; und $A\gamma = C\alpha$.

Hat die biquadratiſche Gleichung zwey gleiche Paare gleicher Wurzeln, das iſt, drey gleiche, ſo iſt $m = n$, und $2m = \frac{B}{A}$; $m^2 = \frac{C}{A}$, wo m die dreymahl vorhandene Wurzel bedeutet.

200. Der Satz (185.) oder eigentlich der umgekehrte läßt ſich auch auf eine andere Art aus dem binomiſchen Lehrſatze herleiten, wozu folgender Vorbereitungsſatz nöthig iſt.

Es iſt

$$(p + x)^n = p^n + {}^n\mathfrak{A}p^{n-1}x + {}^n\mathfrak{B}p^{n-2}x^2 + {}^n\mathfrak{C}p^{n-3}x^3 + {}^n\mathfrak{D}p^{n-4}x^4 \ldots + x^n,$$

wo die Binomial-Coefficienten auf die Th. I. S. 308, angegebene Art bezeichnet ſind. Die Glieder der Reihe rechter Hand multiplicire man folgeweiſe durch 0, 1, 2, 3, 4 . . n, ſo wird ſie

$$1 \cdot {}^n\mathfrak{A}p^{n-1}x + 2 \cdot {}^n\mathfrak{B}p^{n-2}x^2 + 3 \cdot {}^n\mathfrak{C}p^{n-3}x^3 + 4 \cdot {}^n\mathfrak{D}p^{n-4}x^4 \ldots + nx^n$$

Es iſt

$$^{n}\mathfrak{A} = n;\quad 2.\,^{n}\mathfrak{B} = n.\,n - 1 = n.\,^{n-1}\mathfrak{A};$$

$$3.\,^{n}\mathfrak{C} = \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1\,.\,2} = n.\,^{n-1}\mathfrak{C};\quad 4\,^{n}\mathfrak{D}$$

$$= \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3}{1\,.\,2\,.\,3} = n.\,^{n-1}\mathfrak{D};$$ u. ſ. f.

Alſo iſt dieſe Reihe =

$$nx(p^{n-1} + {}^{n-1}\mathfrak{A}\,p^{n-2}x + {}^{n-1}\mathfrak{B}p^{n-3}x^2 + {}^{n-1}\mathfrak{C}p^{n-4}x^3$$
$$+ {}^{n-1}\mathfrak{D}p^{n-4}x^4 \ldots + x^{n-1}) = nx(p+x)^{n-1}.$$

201. Man multiplicire die Glieder der entwickelten Reihe für $(p + x)^n$ folgeweiſe mit den Zahlen r, $r + 1$, $r + 2$, $r + 3$; . . . $r + n$, ſo iſt dieſes ſo viel als ſie alle mit r, und ſie dann noch folgeweiſe durch 0, 1, 2, 3 . . . n multipliciren. Es iſt alſo die Summe der folgeweiſe durch r, $r + 1$; $r + 2$ . . . $r + n$ multiplicirten Glieder $= (nx + r(p + x))\,(p+x)^{n-1}$.

202. Die Function,

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \ldots + x^m,$$

ſey ein Product aus den Factoren $(p + x)^n$ und $a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots + x^{m-n}$, ſo enthält die Function,

$$B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 \ldots + mx^{m-1}$$

den Factor $(p + x)^{n-1}$; ferner

$$1.2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 \ldots (m-1)mx^{m-2}$$

den Factor $(p + x)^{n-2}$; ferner

$$1.2.3D + 2.3.4Ex \ldots + (m-2)(m-1)mx^{m-3}$$

den Factor $(p + x)^{n-3}$; u. ſ. f.

Bew. Man entwickele das angegebene Product folgendergeſtalt,

$$ap^n + a.\,^{n}\mathfrak{A}\,p^{n-1}x + a.\,^{n}\mathfrak{B}\,p^{n-2}x^2 + a.\,^{n}\mathfrak{C}\,p^{n-3}x^3 \ldots\ldots + ax^n$$

$$+ bp^nx + b.\,^{n}\mathfrak{A}p^{n-1}x^2 + b.\,^{n}\mathfrak{B}p^{n-2}x^3 + b.\,^{n}\mathfrak{C}p^{n-3}x^4 \ldots\ldots + bx^{n+1}.$$

$$+ cp^n x^2 + c.{}^n\mathfrak{A}p^{n-1}x^3 + c.{}^n\mathfrak{B}p^{n-2}x^4 + c.{}^n\mathfrak{C}p^{n-3}x^5 \dots\dots + cx^{n+2}$$

$$+ dp^n x^3 + d.{}^n\mathfrak{A}p^{n-1}x^4 + d.{}^n\mathfrak{B}p^{n-2}x^5 + d.{}^n\mathfrak{C}p^{n-3}x^6 \dots\dots + d.x^{n+3}$$

+ etc.

Die Glieder der erſten Reihe multiplicire man folgeweiſe durch 0, 1, 2, 3 ... n; die Glieder der zweyten eben ſo durch 1, 2, 3 .. n + 1; die Glieder der dritten durch 2, 3, 4 ... n + 2; die Glieder der vierten durch 3, 4, 5 ... n + 3, u. ſ. f. Dadurch entſteht aus der

erſten Reihe die Function	$nx(p+x)^{n-1}a$
zweyten Reihe	$(nx+p+x)(p+x)^{n-1}bx$
dritten Reihe	$(nx+2(p+x))(p+x)^{n-1}cx^2$
vierten Reihe	$(nx+3(p+x))(p+x)^{n-1}dx^3$

u. ſ. f.

Die Glieder jener Reihen, welche zu derſelben Potenz von x gehören, werden mit derſelben Zahl multiplicirt. Die Glieder der Function, $A + Bx + Cx^2 \dots + x^m$, beſtehen aus ſolchen Gliedern jener Reihen, welche mit ihnen dieſelbe Potenz von x enthalten; die vorgenommene Multiplication der Glieder in dieſen Reihen giebt daher eben das Reſultat, als die Multiplication der Glieder in

$$A + Bx + Cx^2 \dots + x^m$$

durch die Zahlen 0, 1, 2, 3 ... m folgeweiſe wie die Glieder genommen. Die Summe aller dieſer Producte, nämlich

$$0.A + 1.Bx + 2.Cx^2 + 3.Dx^3 \dots + mx^m$$

iſt daher der Summe der vorher gefundenen Functionen gleich. Sie enthält folglich den Factor $(p+x)^{n-1}$, der in allen dieſen Functionen enthalten iſt, oder die Function

$$B + 2Cx + 3Dx^2 \ldots + mx^{m-1}$$

hat den Factor $(p + x)^{n-1}$.

Daraus folgt nun eben ſo, daß

$$2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 \ldots + (m - 1)mx^{m-2}$$

den Factor $(p + x)^{n-2}$ enthält, und ſo weiter bis daß n Factoren, $p + x$, abgeſondert ſind.

VIII. Von den Verwandlungen der Gleichungen.

203. Die gewöhnlichſte Verwandlung der Gleichungen iſt, daß man für die unbekannte Größe x eine andere, $k + y$, ſetzt, in welcher das Stück k willkührlich, nach einer beſondern Abſicht, beſtimmt wird, als um das zweyte Glied wegzuſchaffen, oder y einen Werth, kleiner als die Einheit zu geben. Bey der Aufſuchung der Gränzen der Wurzeln bedient man ſich auch dieſer Subſtitution.

204. Die gegebene Gleichung ſey

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} - \text{etc.} = 0.$$

Setzt man $x = k + y$, ſo iſt (binomiſcher Lehrſatz) wenn die Binomial-Coefficienten nach (Binomial-Coefficienten, 1.) bezeichnet werden,

$$\begin{array}{lllll}
x^m = y^m & + {}^m\mathfrak{A}ky^{m-1} & + {}^m\mathfrak{B}k^2y^{m-2} & + {}^m\mathfrak{C}k^3y^{m-3} & + \text{etc.} \\
-ax^{m-1} = & - a \ldots & - {}^{m-1}\mathfrak{A}ak \ldots & - {}^{m-1}\mathfrak{B}ak^2 \ldots & - \text{etc.} \\
+bx^{m-2} = & & + b \ldots & + {}^{m-2}\mathfrak{A}bk \ldots & + \text{etc.} \\
-cx^{m-3} = & & & - c \ldots & - \text{etc.} \\
\text{etc.} & & & &
\end{array}$$

Soll das zweyte Glied weggeſchafft werden, ſo hat man ${}^m\mathfrak{A}k - a = 0$, das iſt, $k = \frac{1}{m}a$, zu ſetzen. Sollte das dritte Glied wegzuſchaffen ſeyn, ſo hätte man

eine quadratiſche Gleichung für k aufzulöſen; um das vierte wegzuſchaffen, eine Gleichung vom dritten Grade u. ſ. f.

205. Durch gehörige Annahme von k kann man allen Gliedern entweder wechſelsweiſe verſchiedene, oder durchgehends dieſelben Vorzeichen geben, wodurch in jenem Falle alle Wurzeln y poſitiv, in dieſem alle negativ werden. Dieſes geſchieht am leichteſten durch ſucceſſive Verſuche.

206. Wenn zwey Glieder zugleich weggeſchafft werden ſollen, ſo muß man ſetzen $x^2 + \alpha x = \beta + y$, wobey die Größen, α, β, ſo zu beſtimmen ſind, daß zwey gewiſſe Glieder in der neuen Gleichung für y wegfallen. Dieſes muß durch Elimination der Größe x geſchehen. Die Rechnung wird aber ſchon für niedrige Gleichungen weitläufig.

207. Es ſey die gegebene Gleichung

I. $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$.

Mit dieſer verbinde man folgende,

II. $x^2 - \alpha x + \beta = 0$,

welche mit jener eine Wurzel gemein habe. Aus der Verbindung beider wird erhalten,

III. $(a - \alpha)x^2 - (b - \beta)x + c = 0$.

Aus dieſer und II. folgt

IV. $(a\alpha - \alpha^2 - b + \beta)x - a\beta + \alpha\beta + c = 0$,

$$\text{und } x = \frac{(a - \alpha)\beta - c}{(a - \alpha)\alpha - b + \beta}.$$

Aus II. und III. wird durch Wegſchaffung der gegebenen Glieder erhalten,

V. $((a - \alpha)\beta - c)x + c\alpha - (b - \beta)\beta = 0$.

$$\text{alſo } x = \frac{(b - \beta)\beta - c\alpha}{(a - \alpha)\beta - c}.$$

Aus dieſen beiden Werthen von x ergiebt ſich die Relation zwiſchen α und β. Es iſt

$$\text{VI. } \beta^3 - (a\alpha - aa + 2b)\beta^2 + (b\alpha\alpha - (ab - 3c)\alpha - 2ac + bb)\beta - c\alpha^3 + ac\alpha^2 - bc\alpha + c^2 = 0.$$

Wird α hier willkührlich angenommen, ſo iſt β gegeben, aber wieder durch eine cubiſche Gleichung. Es kann nämlich jede der drey Wurzeln der cubiſchen Gleichung mit einer andern Wurzel in der quadratiſchen verbunden werden.

208. Nun ſetze man $\beta + y$ ſtatt β, ſo wird eine cubiſche Gleichung für y erhalten, worin die zwey Größen α und β zu beſtimmen bleiben. Dieſe Gleichung hat die Form,

$$y^3 + My^2 + Ny + P = 0.$$

Der Werth dieſer Gleichung für irgend ein y ſey $= z$. Für $y = 0$, iſt $z = P$, dem Werthe der Gleichung VI. Nun wird z aus P, wenn $\beta + y$ ſtatt β geſetzt wird. Alſo iſt

$$z = P + \frac{\partial P}{\partial \beta} y + \frac{\partial^2 P}{2\partial \beta^2} y^2 + \frac{\partial^3 P}{6\partial \beta^3} y^3,$$

ſ. Differenzenrechnung, 17, 38. wo für $x, fx, u, f(x+u)$ hier kommen β, P, y, z. Wird $z = 0$ geſetzt, ſo iſt

$$N = \frac{\partial P}{\partial \beta};\ M = \frac{\partial^2 P}{2\partial \beta^2};\ 1 = \frac{\partial^3 P}{6\partial \beta^3}$$

Es iſt alſo

$$P = \beta^3 - (a\alpha - aa + 2b)\beta^2 + (b\alpha\alpha - (ab - 3c)\alpha - 2ac + bb)\beta - c\alpha^3 + ac\alpha^2 - bc\alpha + c^2$$

$$N = 3\beta^2 - 2(a\alpha - aa + 2b)\beta + b\alpha^2 - (ab - 3c)\alpha - 2ac + b^2.$$

$$M = 3\beta - a\alpha + aa - 2b$$

Setzt man $M = 0$; $N = 0$, ſo ſind dadurch die Werthe von α und β beſtimmt, und jeder wird unmittelbar durch eine quadratiſche Gleichung gefunden. Durch die Werthe von α und β iſt P gegeben, alſo $y = -\sqrt[3]{P}$, und daraus endlich x mittelſt der quadratiſchen Gleichung, $x^2 - \alpha x + \beta + y = 0$.

Dieſes iſt eine Probe von der Tſchirnhauſiſchen Methode, die in (132.) erwähnt iſt. Nach dieſer Probe wird man ſich derſelben zu bedienen ſchwerlich Luſt haben.

209. Eine andere Verwandlung iſt, $x = \frac{k}{y}$ zu ſetzen. Dadurch werden die größern Wurzeln in kleinere, und die kleinern in größere verwandelt. Iſt $k = 1$, ſo treten dadurch in die Stelle der Wurzeln x, die eigentliche Brüche ſind, in der verwandelten Gleichung alle y, die größer als die Einheit ſind. Hat die Gleichung für x keine Wurzeln zwiſchen $+1$ und -1, ſo hat die Gleichung für y alle ihre Wurzeln zwiſchen dieſen Gränzen. Sind die ganzen Zahlen g und $g + 1$ zwey Gränzen für eine oder mehrere Wurzeln x, ſo ſetze man $x = g + \frac{1}{y}$, und die Gleichung für y enthält ſo viele Wurzeln, größer als $+1$, als ſo viele x zwiſchen g und $g + 1$ liegen. Dieſes Verfahren wird unten zur Entdeckung der mehrern Wurzeln zwiſchen zwey nächſten ganzen Zahlen angewandt werden.

210. Wenn in einer Gleichung die höchſte Potenz der unbekannten Größe einen Coefficienten hat, wie in der Gleichung, $ax^m - bx^{m-1} + cx^{m-2} - dx^{m-3} + \text{etc.} = 0$, ſo dividire man, um dieſen Coefficienten wegzuſchaffen, die ganze Gleichung durch a, oder man ſetze $x = \frac{y}{a}$, und multiplicire die dadurch entſtandene Gleichung mit a^{m-1}, ſo iſt die transformirte,

$$y^m - by^{m-1} + acy^{m-2} - a^2dy^{m-3} + a^3ey^{m-4} - \text{etc.} = 0.$$

211. Die Gleichung,

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} \dots \pm k = 0,$$

werde durch das letzte gegebene Glied dividirt, ſo erhält ſie die Form,

$$1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 \dots \mp \frac{a}{k} x^{m-1} \pm \frac{1}{k} x^m = 0.$$

Sind die Wurzeln jener Gleichung, p, q, r, s, t etc. ſo ſind die Wurzeln in der zweyten Form noch dieſelben, aber der Werth der Gleichung für irgend einen Werth von x nach der zweyten Form iſt =

$$\left(1 - \frac{x}{p}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{x}{s}\right)$$

$$\left(1 - \frac{x}{t}\right).\ \text{etc.}$$

Denn in der erſtern Form iſt (165. 167.) der Werth der Gleichung das Product

$$(x - p)\ (x - q)\ (x - r)\ (x - s).\ \text{etc.}$$

Das gegebene Glied $\pm k$ iſt das Product aus allen, den Wurzeln entgegengeſetzten Größen, oder $(-p)\ (-q)\ (-r)\ (-s)$ etc. Wird die Gleichung durch $\pm k$ dividirt, ſo wird ihr Werth, oder das Product, $(x-p)(x-q)$ etc. auch dadurch dividirt. Dieſes geſchieht dadurch, daß man jeden Factor durch das entgegengeſetzte der zugehörigen Wurzel dividirt. Dadurch iſt der Quotient =

$$\left(1 - \frac{x}{p}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{x}{s}\right)$$

$$\left(1 - \frac{x}{t}\right).\ \text{etc.}$$

ſo wie der Quotient von der Diviſion der Gleichung durch $\pm k$ iſt

$$1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 \dots \pm \frac{1}{k} x^m.$$

212. In der zweyten Form iſt I. α die Summe aller reciproken Wurzeln, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$ + etc. II. β die Summe aller Producte der reciproken Wurzeln nach Binionen, $\frac{1}{pq} + \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr}$ + etc. III. γ die Summe aller Producte nach Ternionen, $\frac{1}{pqr} + \frac{1}{prs} + \frac{1}{qrs}$ + etc. IV. δ die Summe aller Producte nach Quaternionen, als $\frac{1}{pqrs}$, etc. u. ſ. w. Der Beweis iſt ſchon in dem Artikel, Buchſtabenrechnung, 19. gegeben.

Hievon wird bey unendlichen Reihen, als Gleichungen von einem unendlich hohen Grade, oder Werthen ſolcher Gleichungen, Gebrauch gemacht, um die Relationen ihrer Wurzeln zu den Combinationen nach Producten zu finden.

213. Gleichungen, worin gebrochne Potenzen der unbekannten Größe vorkommen, rational zu machen, ſetze man die höchſte Radikalgröße auf die eine Seite des Gleichheitszeichens, die übrigen Glieder alle auf die andere, und erhebe jene auf die Potenz des gleichen Grades wie die Wurzel. Dann bringe man die Radikalgröße, welche nun von dem höchſten Grade iſt, auf die eine Seite des Gleichheitszeichens, und mache ſie durch Erhebung rational. So fahre man fort, bis alle irrationale Größen aufgehoben ſind.

214. Exempel. Es ſey $a - \sqrt{x} = \sqrt[4]{x^3}$. Auf beiden Seiten quadrirt, iſt $a^2 - 2a\sqrt{x} + x = x\sqrt{x}$. Es iſt hier die Erhebung auf die vierte Po-

tenz nicht nöthig, weil nur bloß die zwente und vierte Wurzel vorkommen, wovon jene das Quadrat dieſer iſt. Ferner iſt

$$a^2 + x = (2a + x)\sqrt{x}, \text{ alſo}$$

$$a^4 + 2a^2x + x^2 = 4a^2x + 4ax^2 + x^3,$$

oder

$$x^3 + (4a - 1)x^2 + 2a^2x - a^4 = 0.$$

215. Wenn mehr als eine unbekannte Größe in einer Gleichung vorhanden ſind, und die Irrationalität bloß von der Ausziehung der Quadratwurzel herrührt, ſo kann man die gezeigte Methode auch bey denſelben anwenden; aber nicht, wenn höhere Wurzelgrade vorkommen.

216. In einer Gleichung M) verwandle man die Vorzeichen aller ungeraden Potenzen in die entgegengeſetzten, ſo ſind in der neuen Gleichung N) die Wurzeln denen in M) gleich, aber entgegengeſetzt. Iſt das höchſte Glied eine ungerade Potenz, ſo verwandle man darauf in N) alle Vorzeichen durchgehends in die entgegengeſetzten, um dem höchſten Gliede das Vorzeichen + zu laſſen. Oder, man verwandle in dieſem Falle gleich anfangs die Vorzeichen der geraden Potenzen in M) in die entgegengeſetzten.

217. Die beiden Gleichungen,

$$\text{M)}\ x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} - \text{etc.} = 0,$$

$$\text{N)}\ x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} + \text{etc.} = 0,$$

welche dieſelben, aber entgegengeſetzte Wurzeln haben, multiplicire man in einander, ſo entſteht daraus die Gleichung,

$$
\begin{array}{lllll}
P)\ o = x^{2m} & + 2bx^{2m-2} & + 2dx^{2m-4} & + 2fx^{2m-6} & + \text{etc.} \\
 & - aa\ .. & - 2ac\ .. & - 2ae\ .. & \\
 & & + bb\ .. & + 2bd\ .. & \\
 & & & - cc\ .. &
\end{array}
$$

Die Gleichung P) enthält die Wurzeln von M) und N) zuſammen, oder m Paare gleicher und entgegengeſetzter Wurzeln.

218. Den Unterſchied der Exponenten ſetze man $\frac{1}{2}$, wodurch die Gleichung M) Quadratwurzeln enthält, auch ſey m eine ganze Zahl, oder habe die Form $\frac{1}{2}(2n+1)$. Durch die Verwändlung von M) in die Gleichung P) wird jene Gleichung eine rationale.

Der Unterſchied der Exponenten ſey $\frac{1}{4}$, und 4m eine ganze Zahl, ſo enthält die Gleichung M) theils Quadratwurzeln, theils Biquadratwurzeln. Sie werde zuerſt in eine Gleichung P) verwandelt, die nun noch bloß Quadratwurzeln enthält; und dieſe darauf in eine Gleichung Q), die ganz rational iſt.

219. Exempel. Wie in (214.) ſey

$$M)\ o = x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{2}{4}} - c.$$

Hier iſt die Einheit für die Exponenten $\frac{1}{4}$, ſo daß das dritte Glied fehlt. Mit dieſer Gleichung verbinde man die Gleichung,

$$N)\ o = x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{2}{4}} + c,$$

ſo entſteht daraus

$$P)\ o = x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{2}{2}} + 2cx^{\frac{1}{2}} - c^2.$$

Dieſe multiplicire man durch die Gleichung,

$$Q)\ o = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{2}{2}} + 2cx^{\frac{1}{2}} + c^2,$$

ſo entſteht die rationale Gleichung,

$$S)\ o = x^3 + (4c - 1)x^2 + 2c^2x - c^4,$$

wie oben.

220. Die Gleichung

$$\text{M)}\ 0 = x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} - \text{etc.}$$

multiplicire man mit der

$$\text{N)}\ 0 = x^{2m} - \alpha x^{2m-1} + \beta x^{2m-2} - \gamma x^{2m-3} + \delta x^{2m-4} - \text{etc.}$$

ſo entſteht daraus die Gleichung

$$\begin{array}{llllll} \text{P)}\ 0 = x^{3m} & - a x^{3m-1} & + b x^{3m-2} & - c x^{3m-3} & + d x^{3m-4} \\ & - \alpha x \ldots & + a\alpha \ldots & - b\alpha \ldots & + c\alpha \ldots \\ & & + \beta \ldots & - a\beta \ldots & + b\beta \ldots \\ & & & - \gamma \ldots & + a\gamma \ldots \\ & & & & + \delta \ldots \\ & & & + \text{etc.} & \end{array}$$

Man ſetze hier die Coefficienten derer Glieder, worin die Exponenten von x durch 3 nicht theilbar ſind, $= 0$, ſo erhält man eine Gleichung von der Form

$$\text{Q)}\ 0 = x^{3m} - A x^{3m-3} + B x^{3m-6} - C x^{3m-9} + \text{etc.}$$

deren Coefficienten durch die Werthe von α, β, γ, δ, etc. gefunden werden. Für dieſe Größen, deren Anzahl 2m iſt, ſind eben ſo viele Gleichungen des erſten Grades vorhanden, wodurch ſie eine nach der andern beſtimmt werden.

Da die Gleichung Q bloß Potenzen von x^3 enthält, ſo dient ſie eine Gleichung von der Form

$$0 = x^{\frac{m}{3}} - a x^{\frac{m-1}{3}} + b x^{\frac{m-2}{3}} - c x^{\frac{m-3}{3}} + \text{etc.}$$

rational zu machen.

221. Exempel. Es ſey

$$\text{M)}\ x^{\frac{2}{3}} - a x^{\frac{1}{3}} + b = 0,$$

ſo iſt

$$\begin{aligned} 0 &= a + \alpha \\ 0 &= b + a\alpha + \beta \\ 0 &= b\beta + a\gamma + \delta \\ 0 &= b\gamma + a\delta \end{aligned}$$

indem hier

$$N)\ 0 = x^{\frac{4}{3}} - \alpha x^{\frac{3}{3}} + \beta x^{\frac{2}{3}} - \gamma x^{\frac{1}{3}} + \delta$$

iſt.

Daraus iſt

$$\alpha = -a; \qquad \beta = aa - b$$

$$\gamma = -ab; \qquad \delta = +bb.$$

Hieraus iſt

$$A = b\alpha + a\beta + \gamma = a^3 - 3ab$$

$$B = b\delta = b^3,$$

alſo

$$Q)\ x^2 - (a^3 - 3ab)x + b^3 = 0.$$

222. Exempel in Zahlen. Es ſey $\sqrt[3]{x} = y$, und $y^2 - 7y + 10 = 0$. Dieſe Gleichung auf den ſechſten Grad erhöht, ſo daß ſie einer quadratiſchen gleichgültig bleibe, iſt

$$y^6 - 133y^3 + 1000 = 0,$$

oder

$$(y^3)^2 - 133(y^3) + 1000 = 0.$$

Die Wurzeln jener ſind + 2 und + 5; die Wurzeln von der erhöheten, aber als einer quadratiſchen, ſind die Cubi von 2 und 5, oder + 8 und 125.

223. Man ſehe über dieſe Elevations-Methode, Lamberts Beyträge zur Mathematik, 2 Th. VIII. Fiſchers Aufſätze über die Wegſchaffung der Wurzelgrößen aus den Gleichungen, in Hindenburgs Archiv der Mathematik, 6tes und 8tes Heft. Haubers Auflöſung des Elevationsproblems für Gleichungen, in Hindenburgs Sammlung combinatoriſch-analytiſcher Abhandlungen. Von Fermats Methode, irrationale complexe Größen wegzubringen, in dem Artikel Irrational.

224. Die erhöhte Gleichung enthält alle Wurzeln der niedrigern M), und noch dazu die Wurzeln der Gleichung N). Dieſes ſind fremde Wurzeln, die nicht zu den in der Frage geſuchten gehören, und nur durch die Wegſchaffung der Irrationalität eingeführt ſind. Die erhöhte Gleichung iſt ein Product aus zwey Gleichungen, von welchen eine nur eine ſolchergeſtalt angenommene iſt, ſo daß ſie gewiſſen Bedingungen Genüge thut.

225. Wie die Brüche aus den Coefficienten wegzuſchaffen ſind, zeigt folgendes Beyſpiel.

Die Gleichung ſey

$$x^3 - \frac{a}{m}x^2 + \frac{b}{n}x - \frac{c}{p} = 0.$$

Man nehme die kleinſte Zahl h, worin die Nenner m, n, p, aufgehen, und ſetze $x = \frac{y}{h}$, ſo iſt

$$\frac{y^3}{h^3} - \frac{ay^2}{mh^2} + \frac{by}{nh} - \frac{c}{p} = 0.$$

Multiplicirt man mit h^3, ſo iſt

$$y^3 - \frac{ah}{m}y^2 + \frac{bh^2}{n}y - \frac{ch^3}{p} = 0,$$

wo die Coefficienten zufolge der gemachten Bedingung für die Zahl h alle ganze Zahlen ſind.

IX. Aufloſung numeriſcher Gleichungen.

226. Die Gleichungen mit numeriſchen Coefficienten können alle entweder ganz genau, oder ſo genau als es nöthig iſt, durch Näherung aufgelöſet werden; ſelbſt die unmöglichen Wurzeln laſſen ſich zufolge (189.) durch die Hülfsgleichung für die Unterſchiede je zweyer Wurzeln beſtimmen.

227. Eine Gleichung, in welcher alle Coefficienten ganze Zahlen ſind, und der zu dem höchſten Gliede gehörige $= 1$ iſt, hat keine rationale gebrochne Wurzeln.

In der qaudratiſchen Gleichung, $x^2 - ax + b = 0$, ſeyn die Coefficienten ganze Zahlen. Wäre eine Wurzel der rationale Bruch $\frac{p}{m}$, in den kleinſten Zahlen ausgedruckt, ſo wäre die andere $= a - \frac{p}{m} = \frac{ma - p}{m}$, gleichfalls in den kleinſten Zahlen. Das Product $\frac{p}{m} \cdot \frac{q}{m}$ zweyer auf die kleinſten Zahlen gebrachten Brüche kann nicht eine ganze Zahl, b, ſeyn, da kein Factor von m in p und in q enthalten iſt.

Die cubiſche Gleichung, $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ habe bloß ganze Zahlen zu Coefficienten. Man ſetze, daß ſie rationale Brüche zu Wurzeln habe. Nun zerlege man ſie in das Product,

$$(x^2 - \alpha x - \beta)\left(x - \frac{p}{m}\right),$$

wo $\frac{p}{m}$ eine der Wurzeln iſt. Dieſes Product entwickelt iſt

$$\begin{array}{llll} x^3 - & \alpha x^2 + & \beta x & \\ & - \frac{p}{m} \cdot\cdot + & \frac{\alpha p}{m} \cdot\cdot - & \frac{\beta p}{m}. \end{array}$$

Hier iſt $\alpha + \frac{p}{m}$ eine ganze Zahl, alſo α ein Bruch, $\frac{q}{m}$, der ſich nicht verkleinern läßt, (denn der Factor von m, der in q aufgeht, müßte auch in p auf-

geſetzen), und $\frac{\alpha p}{m} = \frac{pq}{mm}$, eben ein ſolcher Bruch.

Da b eine ganze Zahl iſt, ſo iſt β ein Bruch, $\frac{r}{mm}$, der ſich nicht verkleinern läßt. Das gegebene Glied des Products iſt nun eben ein ſolcher Bruch, $\frac{pr}{m^3}$, welcher nicht dem als eine ganze Zahl angeſetzten Gliede, c, gleich ſeyn kann.

Auf dieſelbe Art wird für alle Gleichungen gezeigt, daß ſie keine rationale Brüche zu Wurzeln haben, wenn die Coefficienten alle ganze Zahlen ſind.

228. Iſt eine ſolche Gleichung gegeben, ſo ſuche man zuerſt, ob ſie nicht ganze Zahlen zu Wurzeln habe. Da das gegebene Glied das Product aller Wurzeln iſt, ſo verſuche man alle ganze Factoren deſſelben mit beiderley Vorzeichen. Die Arbeit iſt langwierig, wenn das gegebene Glied viele Factoren hat. Sie wird durch folgendes Verfahren ſehr abgekürzt. In der gegebenen Gleichung A) ſetze man $y + 1$ und $y - 1$ für x, ſo erhält man zwey neue Gleichungen B) und C). Hat A eine ganze Zahl (oder mehrere) zur Wurzel, ſo muß das letzte Glied in B) einen Factor enthalten, der um 1 kleiner iſt als einer der Factoren des letzten Gliedes in A), wenn dieſe mit beiden Vorzeichen genommen werden. Hingegen das gegebene Glied in C) muß einen Factor enthalten, der um 1 größer iſt, als eben dieſer Factor des letzten Gliedes in A). So viele Wurzeln in A) ganze Zahlen ſind, ſo oft muß dieſes eintreffen. Um das letzte Glied von B) zu finden, hat man nur nöthig für x zu ſetzen $+ 1$, und um denſelben in C) zu erhalten, $x = - 1$ zu ſetzen.

229. Exempel. Es ſey $x^5 - 7x^4 + 5x^3 + 95x^2 - 326x + 312 = 0$. Man ſetze $x = + 1$, ſo iſt das Aggregat der Glieder $= + 80$; ſetzt man

x = — 1, ſo iſt es = + 720. Die abſoluten Factoren von 312 ſind

einfache . . . 1, 2, 2, 2, 3, 13
zweyfache . . . 4, 6, 26, 39
dreyfache . . . 8, 12, 52, 39
vierfache . . . 24, 104, 156
die Zahl . . . 312.

Von der Zahl 80 braucht man unmittelbar nur die einfachen Factoren, 1, 2, 2, 2, 2, 5, und von der Zahl 720 ebenfalls nur dieſe, nämlich 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 5, anzuzeichnen. Unter den Factoren der Zahl 312 ſind nur folgende, welche um 1 vermindert einen Factor von 80 geben, + 2, + 3, + 6, — 1, — 3, — 4, — 39. Folgende um 1 vergrößert geben Factoren von 720, nämlich + 1, + 2, + 3, + 4, + 39, + 8, — 2, — 3, — 13, — 4, — 5. Von dieſen Factoren der Zahlen 80 und 720 können nur die gemeinſchaftlichen Wurzeln der vorgegebenen Gleichung ſeyn, alſo + 2, + 3, — 3, — 4. Da hier nur vier Wurzeln gefunden ſind, und fünf ſich zeigen müßten, wenn alle möglich wären, ſo iſt eine von den gefundenen vier Zahlen keine Wurzel. Dieſe iſt, wie die Probe mit den Zahlen zeigt, die Zahl — 3. Die möglichen Wurzeln ſind + 2, + 3, — 4.

Man ſehe Newtons Arithm. univerſ. p. 37. de inventione diviſorum. Auch Clairauts Algebra, III. Theil, und mehrere Schriftſteller von der Algebra.

230. Iſt eine Wurzel, die p heiße, in ganzen Zahlen gefunden, ſo wird die Gleichung durch den Factor x — p, wodurch ſie theilbar iſt, dividirt, und dadurch um einen Grad erniedrigt. So viele Wurzeln gefunden ſind, ſo viele Diviſionen.

231. Die irrationalen Wurzeln einer Gleichung, es ſey der gegebenen unmittelbar, oder der erniedrigten, zu finden, ſuche man zuerſt die Gränzen ſämmtlicher Wurzeln in ganzen Zahlen. Dieſes geſchieht dadurch, daß

man in der Gleichung für x zuerſt ſetzt $x = y - g$, und g ſo beſtimmt, daß alle Wurzeln der Gleichung für y poſitiv ſind, oder daß die Vorzeichen alle abwechſeln, für $x = y - g + 1$ aber eine einzige Folge gleichnamiger Vorzeichen entſtehe. Zweytens ſetzt man $x = y + h$, und ſucht einen Werth von h, wodurch alle Wurzeln in der Gleichung für y negativ werden, indem alle Vorzeichen gleichnamig ſind, ſo aber daß $x = y + h - 1$ eine Abwechslung der Vorzeichen gebe, alſo eine Wurzel poſitiv wird.

Die erſte Beſtimmung, $x = y - g$ giebt $y = x + g$, alſo iſt, wenn jede Wurzel y poſitiv iſt, g größer als jede negative Wurzel x. Iſt aber $x + g - 1$ zugleich negativ, ſo zeigt dies an, daß $g - 1$ kleiner als die größte negative Wurzel, abſolut genommen, iſt.

Die zweyte Beſtimmung $x = y + h$ giebt $y = x - h$: alſo iſt, wenn jede Wurzel y negativ iſt, h größer als jede poſitive Wurzel x. Da aber zugleich $x - h + 1$ ein poſitives y giebt, ſo iſt $h - 1$ kleiner als die größte poſitive Wurzel x.

232. Hierauf ſetze man für x die Glieder einer arithmetiſchen Reihe, welche zwiſchen den beiden Gränzen, g, h, enthalten iſt, und berechne die zugehörigen Werthe y der Gleichung. Für eine Gleichung vom dritten Grade hat man nur vier Werthe von y unmittelbar zu berechnen nöthig, für eine Gleichung vom vierten Grade fünf, u. ſ. f. Aus dieſen finde man die erſten Unterſchiede, daraus die zweyten, und ſo weiter, bis zu dem beſtändigen Unterſchiede. Hat man dieſen gefunden, ſo erhält man daraus rückwärts die vorletzten Unterſchiede, aus dieſen die nächſt vorhergehenden, u. ſ. w. bis daß man auf die Werthe y ſelbſt kommt. Werden für x die ganzen Zahlen nach der Reihe geſetzt, ſo bediene man ſich der Formeln für die Anfangsglieder der Differenzreihen, (178.), wie in (179.) geſchehen iſt.

233. Zwiſchen denjenigen Werthen von x, bey welchen die Vorzeichen von y wechſeln, liegt eine Wurzel

der Gleichung; finden ſich ſo viele Zeichenwechſel als die Gleichung Wurzeln haben kann, ſo iſt weiter nichts nöthig, als die Wurzeln genauer zu beſtimmen. Sonſt aber muß man ſuchen, wo zwiſchen zwey nächſten ganzen Zahlen Wurzeln verſteckt ſeyn mögen, ob es gleiche Wurzeln gebe, oder ob unmögliche vorhanden ſeyn müſſen.

234. Für $x = p$, einer ganzen Zahl, ſey der Werth der Gleichung $= \pm A$; für $x = p + 1$ ſey der Werth $= \mp B$, wo A und B bloß die Quantität bedeuten. Da $A + B$ die Veränderung des Werthes der Gleichung für die Veränderung 1 von x iſt, ſo iſt $\frac{A}{A + B}$ beynahe die Veränderung von $x = p$, wodurch der Werth der Gleichung $= 0$ wird, und $p + \frac{A}{A + B}$ iſt der erſte genäherte Werth der Wurzel.

235. Man ſetze $p + \frac{A}{A + B} = q$, und die Wurzel $x = q + u$. Dieſen Werth ſetze man in der Gleichung für x, ſo erhält man eine Gleichung für u, zwar von demſelben Grade wie die für x, worin aber eine Wurzel ein Bruch iſt, daher die Glieder, worin das Quadrat und die höhern Potenzen von u enthalten ſind, wenigen Einfluß auf den Werth von u haben, es müßten denn die Coefficienten groß ſeyn. Der Werth von u wird alſo beynahe durch eine einfache Gleichung gefunden. Den genäherten Werth von u ſetze man r, und $u = r + v$, ſo erhält man durch die Subſtitution von $r + v$ für u eine Gleichung für v, worin v ein kleinerer Bruch als die Wurzel in der Gleichung für u iſt. Auf dieſe Art hat man fortzufahren, ſo weit als es zur Beſtimmung der Wurzel x nach den Umſtänden erforderlich iſt.

236. Bequemer behält man die Gleichung für u bey, und ſetzt folgeweiſe die genäherten Werthe von u in die Glieder mit den höhern Potenzen, wodurch der Werth

von u immer genauer beſtimmt wird. Ein Beyſpiel wird dieſes ohne umſtändliche Vorſchriften deutlich machen.

237. Exempel. Die Wurzeln der Gleichung $x^3 - 9x^2 - 4x + 100 = 0$ zu finden.

I. Man ſetze $x = y - g$, ſo iſt

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3 - 3gy^2 + 3g^2y - g^3 \\ -\ 9x^2 = & \quad -9 \;..\; +18g\,.. -9g^2 \\ -\ 4x = & \qquad\qquad -4 \;..\; +4g \\ +\ 100 = & \qquad\qquad\qquad +100 \end{array}$$

Damit je zwey Vorzeichen wechſeln, iſt es nur nöthig, das letzte Glied ſubtractiv zu machen. Für $g = 3$ iſt es $+ 4$; für $g = + 4$ iſt es $- 92$. Die Gränze der negativen Wurzeln iſt daher $- 4$.

II. Man ſetze $x = y + g$, ſo iſt

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3 + 3gy^2 + 3g^2y \quad + g^3 \\ -\ 9x^2 = & \quad -9 \;..\; -18g\,.. \quad -9g^2 \\ -\ 4x = & \qquad\qquad 4 \;..\; \quad -4g \\ +\ 100 = & \qquad\qquad\qquad +100 \end{array}$$

Nun nehme man g ſo, daß alle Vorzeichen + werden. Wegen des zweyten Gliedes iſt $g > 3$; wegen des dritten iſt $g > 6$; wegen des letzten iſt $g > 7$, und $+ 8$ iſt die Gränze der poſitiven Wurzeln.

III. Da die dritte Wurzel ſich aus den zwey andern ergiebt, ſo iſt es nicht nöthig, eine Folge von Werthen der Gleichung zu berechnen.

IV. Der Werth der Gleichung für $x = + 7$ iſt $= - 26 = - A$; und für $x = + 8$ iſt der Werth $= + 4 = + B$. Alſo $\frac{A}{A+B} = \frac{26}{30} = 0,9$ beynahe. Es ſey $x = 7,9 + u$, ſo iſt

$$\begin{array}{rl} x^3 = & +\,493{,}039 + 187{,}23\,u + 23{,}7\,u^2 + u^3 \\ -9x^2 = & -\,561{,}690 - 142{,}20\,.. - 9{,}0\,.. \\ -4x = & -\,31{,}600 - 4{,}00\,.. \\ +100 = & +\,100 \\ \hline 0 = & -\,0{,}251 + 41{,}03\,u + 14{,}7\,u^2 + u^3 \end{array}$$

oder

$$41{,}03\,u = +\,0{,}251 - 14{,}7\,u^2 - u^3.$$

Demnach $u = 0{,}006$ nahe. Dieſer Werth in die beiden höchſten Glieder geſetzt, giebt

$$\begin{array}{rl} 41{,}03\,u = & +\,0{,}251 - 0{,}0005292 \\ & \quad\quad\quad\;\; - 0{,}000000216 \\ = & 0{,}250471\,... \end{array}$$

Daher $u = 0{,}006104$, weil das in dem erſten Werthe von u weggelaſſene Stück, 0,0001 einen Fehler von nicht 0,00002 giebt, daher man die Diviſion bis zu der vierten Ziffer des Quotienten fortſetzen darf. Setzt man nun für u^2 und u^3 die verbeſſerten Werthe, ſo wird u noch viel genauer gefunden. Es genüge $u = 0{,}006104$, ſo iſt $x = 7{,}906104$.

V. Die hier einzige negative Wurzel fällt zwiſchen -3 und -4. Es iſt $+A = +4$; $-B = -92$, alſo $\frac{A}{A+B} = \frac{4}{96}$, und $x = -3{,}04 - u$. Demnach iſt

$$\begin{array}{rl} x^3 = & -\,28{,}094464 - 27{,}7248\,u - 9{,}12\,u^2 - u^3 \\ -9x^2 = & -\,83{,}1744 - 54{,}72\,.. - 9{,}00\,.. \\ -4x = & +\,12{,}16 + 4{,}00\,.. \\ +100 = & +\,100{,}00 \\ \hline 0 = & +\,0{,}891136 - 78{,}4448\,u - 18{,}12\,u^2 - u^3 \end{array}$$

oder

$$78,4448\,u = 0,891136 - 18,12\,u^2 - u^3,$$

und u = 0,0113 beynahe, da das zweyte Glied in der dritten Decimalſtelle anfängt. Setzt man dieſen Werth in das zweyte und dritte Glied des zweyten Theils der Gleichung, ſo wird u = 0,0113305, alſo x = — 3,0513305.

VI. Die dritte Wurzel wird aus dem Coefficienten von x^2 gefunden. Es iſt 9 die Summe der drey Wurzeln, alſo iſt die dritte Wurzel = + 9 — 7,906104 + 3,051330 = + 4,145226.

VII. Zur Probe der Rechnung dient das gegebene Glied der Gleichung. Das Product der drey Wurzeln, ohne Rückſicht auf die Vorzeichen, iſt = 100. Nun iſt

log. 7,906104 = 0,8979625
log. 4,145226 = 0,6175482
log. 3,051330 = 0,4844892

log. Products = 1,9999999

alſo das Product ſehr nahe = 100.

238. Ob zwiſchen zwey nächſten ganzen Zahlen zwey oder mehrere ungleiche Wurzeln liegen, wird auf folgende Art gefunden.

Es ſeyn dieſe ganze Zahlen p und p + 1; die Gleichung ſey

$$x^m - a x^{m-1} + b x^{m-2} - c x^{m-3} \ldots \pm k = 0.$$

Man ſetze $x = p + \frac{1}{z}$, und multiplicire die verwandelte Gleichung durch z^m, ſo erhält man eine Gleichung von der Form

$$A z^m - B z^{m-1} + C z^{m-2} \ldots \pm K = 0.$$

Da einer oder mehrere Werthe von x ſind $p + \frac{1}{z}$, wo $\frac{1}{z}$ ein eigentlicher Bruch iſt, ſo hat die Gleichung für z wenigſtens eine poſitive Wurzel, die größer als die Einheit iſt. Setzt man nun in dieſer Gleichung die ganzen poſitiven Zahlen von 0 an für z, ſo giebt der Vorzeichenwechſel die nächſten ganzen Zahlen für z. So viele poſitive Wurzeln über 1 die Gleichung für z hat, ſo viele Wurzeln zwiſchen p und p + 1 hat die Gleichung für x. Man muß auch darauf Acht haben, ob auch zwey oder mehrere Wurzeln z zwiſchen zwey nächſten ganzen Zahlen liegen, wenn zu der Gleichung für x noch nicht die Gränzen aller Wurzeln in ganzen Zahlen gefunden ſind.

239. Exempel. Es ſey

$$x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 200x - 360 = 0.$$

Die Werthe dieſer Gleichung für x = + 2; + 3; + 4; + 5 ſind − 56; − 3; − 8; − 35. Es iſt leicht möglich, daß zwiſchen + 3 und + 4 zwey Wurzeln liegen. Man ſetze $x = 3 + \frac{1}{z}$, ſo iſt die verwandelte Gleichung

$$0 = -3 + \frac{20}{z} - \frac{30}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{1}{z^4},$$

oder

$$0 = 3z^4 - 20z^3 + 30z^2 - 4z - 1.$$

Die Werthe dieſer Gleichung für z = + 1; + 2; + 3; + 4; + 5, ſind folgende: + 8; − 1; − 40; − 49; + 104, ſo daß zwey poſitive Wurzeln z größer als 1 vorhanden ſind, eine zwiſchen + 2 und + 3; die andere zwiſchen + 4 und + 5. Daher liegen zwey Wurzeln x zwiſchen + 3 und + 4, die eine iſt etwas kleiner als $3 + \frac{1}{2}$, die andere als $3 + \frac{1}{4}$. Nun ſetze man x = 3,25 − u, und dann auch x = 3,5 − u, ſo erhält man nach dem obigen

Verfahren die beiden Werthe von x ſo genau als es er- forderlich ſeyn mag.

240. Wie die gleichen Wurzeln für Gleichungen, die den vierten Grad nicht überſteigen, gefunden werden, iſt in dem VII. Abſchnitte gezeigt. Bey höhern Glei- chungen hat man ſich der daſelbſt (187.) angezeigten Me- thode von la Grange zu bedienen.

241. In der Abhandlung über die numeriſche Auflöſung der Gleichungen von la Grange iſt von der Gleichung für die Unterſchiede je zweyer Wurzeln ei- ner Gleichung die Anwendung gemacht, eine Zahl zu fin- den, die kleiner als der kleinſte Unterſchied irgend zweyer Wurzeln iſt, zu dem Ende, daß man in der arithmeti- ſchen Reihe der Werthe von x die Unterſchiede weder un- nöthiger weiſe zu klein nehme, welches die Berechnung zu weitläufig macht, noch auch ſie zu groß ſetze, wobey zwey oder mehr Wurzeln überſehen werden könnten. Allein man muß, um das ſchicklichſte Intervall der Werthe von x zu erhalten, eine Gleichung bilden, die auf einen hohen Grad ſteigen kann, auf den $\frac{m(m-1)}{2}$ten Grad, wenn die für x vom mten iſt. Die Gleichung zu finden, und die Gränzen der Wurzeln zu ſuchen iſt mühſamer als eine beträchtliche Anzahl Werthe einer Gleichung zu be- rechnen. Wenn man auf das Zunehmen und Abnehmen der Werthe der Gleichung und die Beſchaffenheit der Glieder in den verſchiedenen Differenzreihen Acht giebt, ſo wird man leicht merken, wo zwey oder mehr Wurzeln innerhalb eines Intervalls liegen können, und hier die In- tervalle in der Reihe der x kleiner machen. Da man die Anzahl der möglichen und unmöglichen Wurzeln zuſam- men genommen weiß, ſo kann man keine aus Unvorſich- tigkeit aus der Acht laſſen.

242. Die Wurzeln laſſen ſich auch in Form von Kettenbrüchen, die wechſelnd größer und kleiner als der

genaue irrationale Werth der Wurzel ſind, darſtellen. Davon in dem Artikel, Kettenbrüche.

Die Glieder rücklaufender Reihen dienen auch zur Erfindung der größten und kleinſten Wurzel, ſ. rücklaufende Reihe.

X. Auflöſung literaler Gleichungen.

243. Die literalen Gleichungen, in welchen die Coefficienten allgemeine Größen ſind, laſſen ſich, wie ſchon bemerkt iſt, außer denen von den erſten drey Graden, nicht ſo auflöſen, daß die Wurzeln durch endliche Formeln dargeſtellt würden. Durch Reihen mit einer unendlichen Anzahl von Gliedern iſt es zwar möglich; es iſt aber unbequem, daß ſolche Reihen oft wenig convergiren, oder gar divergiren, und daß ſie unmögliche Größen in einer möglichen Geſtalt geben. Weil die Entwickelung der verſchiedenen Wurzeln einer Gleichung mittelſt ihrer Coefficienten auf der Lehre von der Umkehrung der Reihen beruht, ſo wird dieſelbe erſt in dem Artikel, Umkehrung der Reihen, vorgetragen werden können.

244. Der Taylorſche Lehrſatz dient zur Auflöſung der Gleichungen, wenn für eine Wurzel ſchon ihre nächſten Gränzen in ganzen Zahlen gefunden ſind. Die Gleichung

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} \ldots + k = 0$$

werde als eine Function einer veränderlichen Größe x betrachtet, und der Werth dieſer Function für irgend ein x ſey $= y$, alſo $= 0$, wenn x eine der Wurzeln iſt. Man bezeichne dieſe Relation durch $\varphi x = y$, wo φ das Functionszeichen iſt (ſ. Function). Es verändere ſich x um u, ſo iſt (Differenzenrechnung, 38.)

$$\varphi(x+u) = \varphi x + \frac{\partial \varphi x}{\partial x} \cdot \frac{u}{1} + \frac{\partial^2 \varphi x}{\partial x^2} \cdot \frac{u^2}{1.2}$$
$$+ \frac{\partial^3 \varphi x}{\partial x^3} \cdot \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 \varphi x}{\partial x^4} \cdot \frac{u^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Wenn hier x von einer der Wurzeln wenig verſchieden iſt, ſo erhält man eine ſolche Formel, wie in (237.) zur Annäherung an den Werth der Wurzel gebraucht iſt. In dem Exempel daſelbſt iſt $x = 7{,}9$; $\varphi x = -0{,}251$.

245. Es ſey x + u eine Wurzel der Gleichung, ſo iſt $\varphi(x+u) = 0$, und

$$0 = \varphi x + \frac{\partial \varphi x}{\partial x} . u + \frac{\partial^2 \varphi x}{\partial x^2} . \frac{u^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Der Kürze wegen ſetze man die Differentialquotienten nach der Folge p, q, r, s, etc. und $\varphi x = y$, ſo iſt

$$0 = y + pu + \tfrac{1}{2} q u^2 + \tfrac{1}{6} r u^3 + \tfrac{1}{24} s u^4 + \text{etc.}$$

Um hieraus den Werth von u herzuleiten, ſetze man u aus einer Reihe von Theilen, A, B, C, D, etc. zuſammen, deren jeder gegen den vorhergehenden ſo klein ſey, daß B ſich nur mit AA vergleichen laſſe, C mit A^3 und AB; D mit A^4, A^2B, AC, B^2, u. ſ. f. Nun ſetze man in der Gleichung für u den Werth

$$u = A + B + C + D + \text{etc.}$$

ſo iſt

$$\begin{array}{lllll}
y = y & & & & \\
pu = Ap & + Bp & + Cp & + Dp & + \text{etc.} \\
\tfrac{1}{2} q u^2 = & + A^2 q & + ABq & + ACq & + \text{etc.} \\
 & & & + \tfrac{1}{2} B^2 q & + \text{etc.} \\
\tfrac{1}{6} r u^3 = & & + \tfrac{1}{6} A^3 r & + \tfrac{1}{2} A^2 B r & + \text{etc.} \\
\tfrac{1}{24} s u^4 = & & & + \tfrac{1}{24} A^4 s & + \text{etc.} \\
\text{etc.} & & & &
\end{array}$$

Die Glieder rechter Hand zuſammengenommen ſind Null. Da ſie von verſchiedenen Ordnungen der Größe ſind, ſo kann dieſes nur erhalten werden, wenn die Größen von einerley Ordnung der Größe, die unter einander geſetzten, ſich aufheben, zufällige Modificationen durch die Coefficienten, und durch die Vorausſetzung ſelbſt nicht geachtet. Dadurch werden folgende Beſtimmungen erhalten.

$$A = -\frac{y}{p}$$

$$B = -\frac{q}{2p^3}y^2$$

$$C = -\frac{q^2}{2p^5}y^3 + \frac{r}{6p^4}y^3$$

$$D = -\frac{5q^3}{8p^7}y^4 + \frac{5qr}{12p^6}y^4 - \frac{s}{24p^5}y^4.$$

etc.

246. Exempel. Die Gleichung, $x^5 + 2x - 2 = 0$, aufzulöſen. Hier iſt

$$y = x^5 + 2x - 2;$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = p = 5x^4 + 2; \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = q = 20x^3;$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = r = 60x^2; \qquad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = s = 120x;$$

$$\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = t = 120.$$

Für $x = 0$ iſt $y = -2$, für $x = +1$ iſt $y = +1$, alſo iſt, wenn $x = +1$ genommen wird, der Werth von u klein und negativ. Dadurch iſt $p = +7$; $q = 20$; $r = 60$; $s = 120$; $t = 120$, und

$$u = -\tfrac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \left(\frac{200}{7^5} - \frac{10}{7^4}\right)$$

$$- \left(\frac{5.1000}{7^7} - \frac{5.100}{7^6} + \frac{5}{7^5}\right) - \text{etc.}$$

oder

$$u = -\tfrac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \frac{130}{7^5} - \frac{1745}{7^7} - \text{etc.}$$

das iſt $u = -0{,}18$ nahe, und die Wurzel $x + u = 1 - 0{,}18 = +0{,}82$ nahe. Wird dieſer Werth für x in die Gleichung geſetzt, ſo wird daraus durch eine neue Rechnung der Unterſchied von der Wurzel ſehr genau gefunden werden können.

247. Man kann x auch als eine Function von y anſehen, ſo daß $x = \varphi y$, und $x - u = \varphi(y - z)$. Nun iſt

$$\varphi(y-z) = \varphi y - \frac{\partial x}{\partial y}.z + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}.\frac{z^2}{1.2}$$

$$- \frac{\partial^3 x}{\partial y^3}.\frac{z^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 x}{\partial y^4}.\frac{z^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

Iſt $x - u$ eine Wurzel der Gleichung, ſo iſt $y - z = 0$, und $y = z$, alſo

$$x - u = x - \frac{\partial x}{\partial y}\, y + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}.\frac{y^2}{1.2} - \text{etc.}$$

oder

$$u = \frac{\partial x}{\partial y}.y - \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}.\frac{y^2}{1.2} + \frac{\partial^3 x}{\partial y^3}.\frac{y^3}{1.2.3}$$

$$- \frac{\partial^4 x}{\partial y^4}.\frac{y^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Man hat nun für einen Werth von x, welcher einer Wurzel nahe kommt, den zugehörigen Werth der Gleichung y, und die Werthe der Differentialquotienten zu ſuchen, und die daraus entſtehenden Glieder mit Beobachtung der Vorzeichen, die ſie erhalten müſſen, zuſammen zu neh-

men, ſo wird der Werth von u, dem Unterſchiede der Wurzel und des geſetzten Werthes von x, dadurch mehr oder weniger genau gefunden, nachdem die Reihe ſchneller oder langſamer convergirt. In dem letztern Falle hat man den durch die erſte Rechnung verbeſſerten Werth von x ſtatt des zuerſt gebrauchten zu nehmen.

248. Exempel. Die Gleichung ſey, $x^4 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$, ſo daß

$$y = x^4 - 2x^2 + 4x - 8 = 0.$$

Nun iſt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4; \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{4(x^3 - x + 1)};$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial x} = -\frac{3x^2 - 1}{4(x^3 - x + 1)^2}; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = -\frac{3x^2 - 1}{16(x^3 - x + 1)^3};$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial y^2 \partial x} = \frac{21x^4 - 12x^2 - 6x + 3}{16(x^3 - x + 1)^4};$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial y^3} = \frac{21x^4 - 12x^2 - 6x + 3}{64(x^3 - x + 1)^5}, \text{ etc.}$$

Alſo iſt

$$u = \frac{y}{4(x^3 - x + 1)} + \frac{(3x^2 - 1)y^2}{32(x^3 - x + 1)^3} + \frac{(7x^4 - 4x^2 - 2x + 1)y^3}{128(x^3 - x + 1)^5} + \text{etc.}$$

Setzt man $x = +1$, ſo iſt $y = -5$; ſetzt man $x = +2$, ſo iſt $y = -8$; alſo liegt die Wurzel näher an $+2$ als an $+1$. Man ſetze $x = 1,6$, ſo iſt $y = -0,1664$, und

$$u = \left.\begin{array}{r} -0,0118993 \\ +0,0001353 \\ -0,0000023 \end{array}\right\} = -0,0117663$$

da die Wurzel iſt x — u, ſo iſt ſie ſehr nahe = 1,6117663.

In Eulers Differentialrechnung, 2 Th. S. 563, woraus die Methode mit dem Exempel genommen iſt, iſt der dritte Differentialquotient im Zähler unrichtig. Dieſer iſt daſelbſt $21x^4 - 12xx - 3$. Die Wurzel findet Euler = 1,6117632. Er hat aber x = 1,61 geſetzt. Lange nachher hat Euler dieſe Methode dahin erweitert, daß ſie dient, jede Potenz einer Wurzel und ihren natürlichen Logarithmen zu finden. Nova Acta Petrop T. VI.

249. Die Formel für die Wurzel (247.) hat Euler im J. 1740 an die Pariſer Akademie der Wiſſenſchaften ohne Beweis geſchickt. S. eine Abhandlung von dem Marquis de Courtivron, ſur une maniere de reſoudre par approximation les équations de tous les degrés. Mem de l'Ac. 1744. Courtivron verwandelt die Gleichung für x in eine für u, wenn x = k + u, und u klein iſt. Dieſe kehrt er um, ſo daß u durch eine Reihe dargeſtellt wird. Seine Formel findet er, wie es nothwendig iſt, mit der Euleriſchen übereinſtimmend.

250. Eine andere allgemeine Methode, die noch nicht angewandt worden, iſt folgende:

I. Die gegebene Gleichung für x werde in eine Gleichung für u verwandelt, ſo daß eine Wurzel derſelben kleiner als 1 ſey, wenn jene Gleichung nicht ſelbſt ſo beſchaffen iſt. Die verwandelte Gleichung ſey

$$a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + fu^5 + \text{etc.} = 0.$$

Man multiplicire ſie durch eine unbeſtimmte Function,

$$1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \text{etc.}$$

ſo iſt das Product =

$$\begin{array}{l} a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + fu^5 + \text{etc.} \\ \quad + a\alpha.. + b\alpha.. + c\alpha.. + d\alpha.. + e\alpha.. + \text{etc.} \\ \qquad + a\beta.. + b\beta.. + c\beta.. + d\beta.. + \text{etc.} \\ \qquad\quad + a\gamma.. + b\gamma.. + c\gamma.. + \text{etc.} \\ \qquad\qquad + a\delta.. + b\delta.. + \text{etc.} \\ \qquad\qquad\quad + a\varepsilon.. + \text{etc.} \end{array}$$

In dieſem Producte ſetze man die Coefficienten von u^2, u^3, u. ſ. f. $= 0$, ſo erhält man dadurch Beſtimmungen von α, β, γ, etc. und es iſt nahe $a + (b + a\alpha)u = 0$, alſo $u = -\frac{a}{b + a\alpha}$, nahe.

II. Zuerſt ſetze man nur die beiden Coefficienten von u^2 und u^3 Null, ſo iſt

$$c + b\alpha + a\beta = 0$$

$$d + c\alpha + b\beta + a\gamma = 0.$$

Da hier eine unbeſtimmte Größe mehr iſt, als Gleichungen vorhanden ſind, ſo iſt eine willkührlich anzunehmen. Man ſetze $\gamma = 0$, und zugleich δ, ε, etc auch $= 0$, ſo iſt die multiplicirende Function $= 1 + \alpha u + \beta u^2$. Aus jenen beiden Gleichungen ergiebt ſich durch Wegſchaffung von β der Werth von α, nämlich $\alpha = \frac{ad - bc}{bb - ac}$, alſo

$$u = -\frac{a(bb - ac)}{b(bb - ac) + a(ad - bc)}.$$

251. Exempel. Die gegebene Gleichung ſey $x^3 - 9x^2 - 4x + 100 = 0$. Eine Wurzel derſelben fällt zwiſchen $+ 7$ und $+ 8$, näher an 8 (137.). Man ſetze $x = 8 - u$, ſo iſt die transformirte Gleichung,

$$0 = + 4 - 44u + 15u^2 - u^3,$$

alſo

$$a = + 4;\ b = - 44;\ c = + 15;\ d = - 1.$$

Ji

Dieſe Werthe in die Formel für u geſetzt, geben $u = + \frac{7504}{79920} = \frac{938}{9990} = 0{,}093894$, folglich die geſuchte Wurzel $x = 7{,}906106..$ Die mühſamere Rechnung a. a. O. gab 7,906104.

252. Wenn es nöthig iſt, kann man den gefundenen Werth leicht verbeſſern. Das fünfte Glied des Products iſt $= (d\alpha + c\beta)u^4$, da γ, δ, etc. $= 0$ geſetzt ſind. In dieſem ſetze man für u den gefundenen Werth, und addire dieſes Glied zu a, worauf man u aufs neue berechnet. Es iſt $\beta = \frac{cc - bd}{bb - ac}$.

253. Nun nehme man zum Multiplicator der Gleichung die Function, $1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3$, und ſetze die Coefficienten von u^2, u^3, u^4 jeden Null, ſo iſt

$$\text{I. } c + b\alpha + a\beta = 0$$

$$\text{II. } d + c\alpha + b\beta + a\gamma = 0$$

$$\text{III. } e + d\alpha + c\beta + b\gamma = 0.$$

Die Gleichungen II. und III. geben durch die Wegſchaffung von γ.

$$\text{IV. } bd - ae + (bc - ad)\alpha + (bb - ac)\beta = 0.$$

Dieſe und I. geben durch die Wegſchaffung von β

$$\text{V. } \left.\begin{array}{l}(bb - ac)c - (bd - ae)a \\ \quad + (bb - ac)b\alpha - (bc - ad)a\alpha\end{array}\right\} = 0.$$

Alſo

$$\alpha' = \frac{(ad - bc)b - (ae - cc)a}{(ad - bc)a - (ac - bb)b}.$$

$$b + a\alpha' = \frac{2(ad - bc)ab - (ac - bb)bb - (ae - cc)aa}{(ad - bc)a - (ac - bb)b}$$

$$u = \frac{(ad - bc)aa - (ac - bb)ab}{(ac - bb)bb - 2(ad - bc)ab + (ae - cc)aa}$$

254. Exempel. Es ſey in der Gleichung (239.),

$$x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 200x - 360 = 0,$$

die an + 3 nächſte Wurzel zu finden. Setzt man $x = 3 + u$, ſo iſt die verwandelte Gleichung

$$0 = 3 - 20u + 30u^2 - 4u^3 - u^4,$$

wo $a = +3$; $b = -20$; $c = +30$; $d = -4$; $e = -1$ iſt. Ferner iſt $(ad - bc)aa = 5292$; $(ac - bb)ab = +18600$; $(ac - bb)bb = -124000$; $2(ad - bc)ab = -70560$; $(ae - cc)aa = -8127$. Daher

$$u = \tfrac{13308}{61567} = 0,216155\ldots$$

und $x = 3,216155\ldots$

255. Um mit Sicherheit die Gränze zu beſtimmen, bis auf welche nach dieſem Verfahren die Wurzel gefunden wird, muß das erſte der weggelaſſenen Glieder des Products, nämlich $(e\alpha + d\beta + c\gamma)u^5$ berechnet werden, wenn nämlich zu dem Multiplicator vier Glieder genommen ſind. Es iſt

$$\alpha = \frac{(ad - bc)b - (ae - cc)a}{(ad - bc)a - (ac - bb)b}$$

$$\beta = \frac{(ae - bd)b - (ad - bc)c}{(ad - bc)a - (ac - bb)b}$$

$$\gamma = \frac{(bd - cc)c - (ad - bc)d + (ac - bb)e}{(ad - bc)a - (ac - bb)b}$$

256. Anſtatt den genäherten Werth von u durch eine einfache Gleichung zu finden, kann man auch eine quadratiſche anwenden. Man ſetze die Coefficienten von u^3 und mehrere folgende gleich Null. Der Multiplicator der Gleichung ſey $1 + \alpha u + \beta u^2$, ſo erhält man die Gleichungen,

$$\text{I. } d + c\alpha + b\beta = 0$$

$$\text{II. } e + d\alpha + c\beta = 0,$$

wodurch α und β, alſo die Coefficienten der Näherungs-Gleichung,

$$a + (b + a\alpha)u + (c + b\alpha + a\beta)u^2 = 0,$$

beſtimmt werden.

Nimmt man den Multiplicator, $1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3$, ſo kann man drey Coefficienten Null ſetzen, die von u^3, u^4, u^5, wodurch die quadratiſche Gleichung noch viel genauer den Werth von u giebt.

257. Hat u zwey Werthe, die kleiner als die Einheit ſind, ſo findet man ſie mittelſt der quadratiſchen Gleichung beide. Die einfache Gleichung giebt nur den kleinern Werth, der die gemachte Vorausſetzung am nächſten erfüllt, wie in dem zweyten Exempel (254.), worin zwey Wurzeln x zwiſchen + 3 und + 4 fallen.

258. Auf eine ähnliche Art kann man eine Näherungsgleichung vom dritten, oder einem noch höhern Grade ſich verſchaffen, es ſey nun eine Gleichung zu erniedrigen, oder die mehrern Wurzeln, die zwiſchen zwey nächſten ganzen Zahlen liegen, zu finden.

259. Auch für große u läßt ſich eine Annäherungsgleichung nach der für kleine u gebrauchten Methode finden. Es ſey die Gleichung

$$0 = u^m + a u^{m-1} + b u^{m-2} + c u^{m-3} + d u^{m-4} + \text{etc.}$$

Dieſe werde durch $1 + \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{u^2} + \frac{\gamma}{u^3} + \frac{\delta}{u^4}$ + etc. multiplicirt. Das Product iſt $= 0 =$

$$\begin{array}{llllll}
u^m & + a u^{m-1} & + b u^{m-2} & + c u^{m-3} & + d u^{m-4} & + \text{etc.} \\
 & + \alpha \,.. & + a\alpha \,.. & + b\alpha \,.. & + c\alpha \,.. & + \text{etc.} \\
 & & + \beta \,.. & + a\beta \,.. & + b\beta \,.. & + \text{etc.} \\
 & & & + \gamma \,.. & + a\gamma \,.. & + \text{etc.} \\
 & & & & + \delta \,.. & + \text{etc.} \\
 & & & & & \text{etc.}
\end{array}$$

Man nehme den Multiplicator $1 + \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{u^2}$, und ſetze die Coefficienten von u^{m-2} und u^{m-3} Null, ſo iſt

$$\text{I. } b + a\alpha + \beta = 0$$

$$\text{II. } c + b\alpha + a\beta = 0.$$

Hieraus iſt $\alpha = \frac{c - ab}{aa - b}$, alſo iſt

$$u = a + \alpha = \frac{a^3 - 2ab + c}{aa - b} \text{ nahe.}$$

Auch iſt $\beta = \frac{bb - ac}{aa - b}$, und

$$c\alpha + b\beta = \frac{cc - 2abc + bbb}{aa - b}.$$

Aus dem Werthe von $c\alpha + b\beta$ iſt der Grad der Annäherung zu beurtheilen. Das erſte der weggelaſſenen Glieder iſt $\left(d + \frac{cc - 2abc + bbb}{aa - b}\right) u^{m-4}$.

260. Die durch die Multiplication mit einer Function von u entſtandene Gleichung iſt in beiden Fällen eine Hülfsgleichung von einem höhern Grade als die vorgegebene. Weil aber einige Glieder in ihr fehlen, und die darauf folgenden gegen die erſten klein ſind, ſo iſt ſie leicht aufzulöſen, mit einem größern oder geringern Grade der Genauigkeit.

* * *

Zu den Abhandlungen algebraiſchen Inhalts von Euler ſind hier noch einige aus den Novis Actis Acad. Petrop. beyzufügen.

In dem IV. Bande ſind zwey Abhandlungen, welche beide die Darſtellung der Wurzeln einer Gleichung oder irgend welcher Potenzen derſelben durch Reihen betreffen. In der erſten wird aus der

Gleichung $Z^n = Z^{n-\alpha} + CZ^{n-\beta}$ eine Reihe für Z hergeleitet, deren Glieder Functionen des Exponenten n ſind, woraus ferner Reihen für die Potenzen der Wurzeln von Gleichungen mit mehr Gliedern hergeleitet werden. Die Reihen ſind ſehr zuſammengeſetzt, daher Euler ſie auch in der Aufſchrift der Abhandlung maxime abſtruſas nennt. Mit derſelben iſt eine frühere Abhandlung in den Actis Petrop. T. III. a. a. 1779. zu verbinden, worin Betrachtungen über eine von Lambert entwickelte Reihe zur Auflöſung einer trinomiſchen Gleichung angeſtellt ſind.

In der zweyten Abhandlung wird die Methode zur Entwickelung der Wurzeln und ihrer Potenzen durch Reihen, welche der Verfaſſer ſchon in dem XV. Bande der neuen Commentarien (1771) gelehrt hatte, beſſer begründet.

In dem VI. Bande ſind zwey Abhandlungen, von welchen die erſtere zeigt, wie die Werthe der Wurzeln durch Annäherung gefunden werden, wenn ſie ſchon einigermaßen bekannt ſind. Es iſt die von dem Verfaſſer ſchon vor langer Zeit angegebene, und in dem letzten Abſchnitte dieſes Artikels erklärte Methode, mit Erweiterung auf Potenzen der Wurzeln.

In der zweyten Abhandlung des VI. Bandes wird gezeigt, wie unzählige Formen von Gleichungen angegeben werden können, die alle auflösbar ſind.

In dem XII. Bande wird die Entwickelung der Wurzeln und ihrer Potenzen noch einmahl vorgenommen, nach der Methode, die in den Comm. novis, T. XV. gezeigt war, aber mit Erweiterung und Verbeſſerungen.

Eulers Algebra iſt von Bernoulli ins Franzöſiſche überſetzt, und von la Grange mit Anmerkungen bereichert. Dieſe gehen die unbeſtimmte Analytik an. Eine neue vermehrte Ausgabe dieſer Überſetzung iſt zu Lyon 1795. in zwey Octavbänden erſchienen. Die Zuſätze von la Grange hat Kaußler beſonders überſetzt geliefert, Frankfurt am Mayn, 1796.

Unter den ältern Lehrbüchern zeichnet ſich die Algebra von dem tiefſinnigen Maclaurin durch Deutlichkeit wie durch Gründlichkeit aus. Treatiſe of Algebra, the ſecond edition, London 1756. 8.

Wer viele Beyſpiele und Erläuterungen verlangt, findet ſie in Saunderſons Elements of Algebra, Cambridge, 1740. 2 vol. in 4. Überſetzt ins Franzöſiſche von Joncourt. Amſterdam, 1756.

Clairauts Algebra, die zuerſt 1746 herauskam, iſt mehrmahls aufgelegt. Neuerlich iſt ſie von Lacroix neu herausgegeben, und mit Anmerkungen von la Grange und la Place ausgeſtattet, 2 vol. in 8. Eine deutſche Überſetzung iſt von Mylius 1752 gemacht, von welcher Tempelhof 1778 eine zweyte Auflage mit Zuſätzen beſorgt hat.

Die deutſchen Lehrbücher von Segner, Käſtner, Tempelhof, Pasquich, werden den Liebhabern der Mathematik bekannt genug ſeyn. Anfängern iſt zu empfehlen Buſſe erſter Unterricht in der algebraiſchen Auflöſung arithmetiſcher und geometriſcher Aufgaben. Deſſau 1782. 2 Bde in 8.

Glied (terminus) iſt ein einzelnes Stück einer Gleichung, Reihe oder Function. Das lateiniſche Wort, membrum, bedeutet alle Glieder einer Gleichung, die auf derſelben Seite des Gleichheitszeichens ſtehen. Weil das Wort terminus im deutſchen ſich nicht gut gebrauchen läßt, ſo muß man es durch Glied geben, und membrum durch Theil.

Gnomon in der Geometrie iſt eine Figur, die in einem Parallelogramm übrig bleibt, wenn ein kleineres Parallelogramm, deſſen Diagonale in der Diagonale jenes liegt, weggenommen wird. In Fig. 26. Tab. X. worin B H und E D jede einer Seite des Parallelogramms parallel iſt, iſt Gnomon die Figur, welche aus den beiden Complementen A C, A K zu den Parallelogrammen A F, A G längs der Diagonale F G, und einem dieſer Parallelogram-

me ſelbſt beſteht, nämlich ABCGKEA, oder ADCFKHA. Euklides gebraucht das Wort in ſeinen Anfangsgründen, 2. Buch. Es bedeutet auch ein Winkelmaaß, daher die Anwendung auf die geometriſche Figur.

Gnomon iſt an einer Sonnenuhr der Zeiger, der durch ſeinen Schatten die Stunden zeigt. Hier ergiebt ſich die Herleitung von dem griechiſchen Stammworte, erkennen, noch deutlicher.

Gnomon in der Aſtronomie iſt eine beſondere Vorrichtung, Höhen der Sonnen zu beobachten.

Goniometrie iſt der Inbegriff der Sätze und Aufgaben, welche die Vergleichung der Winkel mittelſt der von den Winkeln abhängigen Linien, und die Relationen dieſer Linien ſelbſt betreffen. Das Wort Goniometrie iſt in dieſer weiten Bedeutung ſonſt nicht gewöhnlich, ſondern man verſteht darunter nur die Methoden Winkel zu meſſen. In dieſem Verſtande gebraucht de Lagny den Ausdruck in einigen Abhandlungen der Pariſer Akademie von den J. 1724, 1725, 1729. Von ſeinem Verfahren, Winkel ohne Transporteur oder Maaßſtab zu meſſen, wird in dem Artikel, Winkelmeſſung, Anzeige geſchehen. Das Wort Goniometrie iſt im Griechiſchen daſſelbe was Winkelmeſſung im deutſchen. So wie aber Geometrie eine Wiſſenſchaft iſt, welche alle Arten von Vergleichungen ausgedehnter Größen begreift, ohngeachtet das Wort nur Landmeſſung andeutet, ſo mag auch Goniometrie die Benennung für ein Syſtem ſeyn, das viel mehreres in ſich ſchließt, als das Wörtliche zu erkennen giebt. In einer kleinen Schrift, betitelt Anfangsgründe der Goniometrie von Däzel, München 1800, bedeutet das Wort Trigonometrie und Polygonometrie zuſammen.

2. Die Goniometrie pflegt als ein Theil der Trigonometrie angeſehen zu werden. Ihre Grundlehren werden auch in dieſer Wiſſenſchaft gebraucht, um die Berechnung der ebenen und ſphäriſchen Dreyecke, und der

daraus zuſammengeſetzten Figuren herzuleiten. Die Trigonometrie bekommt durch ſie einen weitern Umfang als die Wortbedeutung angiebt. Vieles in der Goniometrie betrifft bloß Vergleichungen der Winkel, ohne Rückſicht auf Dreyecke oder Figuren; anderes bezieht ſich auf die Kreismeſſung; ſelbſt in der Analyſis, wo auch keine geometriſche Größen betrachtet werden, kommen oft Functionen von Winkeln vor. In einer vollſtändigen Abhandlung von der Trigonometrie darf zwar die Goniometrie nicht fehlen; allein in dieſem Wörterbuche würde jene durch dieſe einen zu weitläuftigen Artikel ausmachen. Um aber auch nicht die Materie von der Vergleichung der Winkel zu zerſtückeln, werden alle dahin gehörigen Formeln hier in einem Artikel, unter dem Titel, Goniometrie, vorgetragen.

3. Die analytiſche Geometrie, ſo fern ſie die Winkel entweder unabhängig von der Verbindung mit den Linien einer Figur vergleicht, oder ſowohl die Linien und ihre Winkel in ihrer gegenſeitigen Abhängigkeit betrachtet, begreift drey Hauptſtücke, die Goniometrie, Cyklometrie (Bogenmeſſung) und Trigonometrie mit der Polygonometrie. Das erſte iſt gleich Anfangs erklärt; die Cyklometrie, welche die Winkel durch zugehörige Kreisbogen darſtellt, enthält die Formeln zur Vergleichung der Bogen und der zu ihnen gehörigen Linien (Sinus, Tangenten u. ſ. w.); die Trigonometrie entwickelt die Formeln zur Berechnung der Seiten und Winkel ebener und ſphäriſcher Dreyecke aus gegebenen Beſtimmungsſtücken; die Polygonometrie ſucht daſſelbe für mehrſeitige Figuren zu leiſten. Beyde gründen ſich, ſo wie die Cyklometrie, auf die Lehren der Goniometrie.

4. Ein Winkel wird, wie jede Größe überhaupt durch eine gleichartige gemeſſen wird, unmittelbar nur durch einen andern Winkel gemeſſen. So giebt man z. B. die Größe eines Winkels in Graden an, da ein Grad der 90ſte Theil eines rechten Winkels iſt, und hat dadurch das Verhältniß des Winkels zu einem Rechten.

In der praktiſchen Geometrie hat man allerhand Werkzeuge zur Meſſung der ſinnlich gegebenen Winkel. In der theoretiſchen Geometrie ſind nur wenig Fälle, wo ein Winkel unmittelbar mit einem andern Winkel verglichen werden kann. Die Elementar-Geometrie kann nur Winkel vergleichen, deren einer doppelt ſo groß iſt als der andere. Allein es giebt auch eine andere Art Winkel mit einander zu vergleichen, als durch ein gemeinſchaftliches Maaß, und das geſchieht durch Linien, die von den Winkeln auf gewiſſe Art abhangen, ſo wie die Winkel von ihnen. Die Relationen dieſer Linien geben gewiſſe Relationen der zugehörigen Winkel zu erkennen. Dieſe Linien heißen daher auch Functionen der Winkel, und umgekehrt ſind die Winkel Functionen jener Linien, indem Function einer Größe irgend eine Zuſammenſetzung aus dieſer und gegebenen anzeigt.

I. Goniometriſche (trigonometriſche) Functionen der Winkel.

5. Es iſt ADBE (Tab. XII Fig. 56.) ein Kreis aus dem Mittelpunkte C über dem Durchmeſſer AB beſchrieben, in welchem der Durchmeſſer DE ſenkrecht auf AB ſteht. Irgend ein Durchmeſſer Ff ſchneide AB unter dem Winkel ACF. Von dem Puncte F des Kreiſes werde FG ſenkrecht auf AB gezogen. Nun iſt in dem gegebenen Kreiſe FG durch den Winkel, und der Winkel durch FG beſtimmt. Die Linie FG heißt der **Sinus** des Winkels ACF.

Der Sinus iſt Null, wenn der Winkel Null iſt. Er iſt dem Radius des Kreiſes gleich, wenn der Winkel ein Rechter iſt, und heißt alsdann der **Sinus totus**.

Der Winkel der beiden Linien AB und Ff iſt nicht allein der ſpitze ACF, ſondern auch der ſtumpfe BCF. Es gehört alſo derſelbe Sinus FG zu zwey Winkeln, die zuſammen aber zwey Rechte ausmachen.

Man ziehe den Durchmeſſer H C h unter dem Winkel B C H = A C F, und fälle die ſenkrechte Hg auf AB, ſo iſt Hg = FG, und Hg iſt der Sinus des Winkels A C H, ſo wie es F G von B C F iſt. Die Folge der Sinus bricht mit dem Sinus totus für den rechten Winkel nicht ab, ſondern wird für die ſtumpfen fortgeſetzt, indem nun die Sinus auf dieſelbe Art, bey wachſenden Winkeln, abnehmen, als ſie für Winkel unter einem Rechten zunehmen.

Für zwey Rechte iſt der Sinus = o. Allein auch hier bricht die Folge der Sinus nicht ab, ſondern geht fort, nur werden die Sinus negativ.

Nämlich zwey gleiche Winkel, wie A C F, A C h, oder A C H, A C f, können entgegengeſetzte Lage haben, indem der Schenkel, durch deſſen Bewegung von dem fixen Schenkel an der Winkel beſchrieben wird, nach einer Gegend ſich bewegt, die der für den andern Winkel entgegen geſetzt iſt. Es ſeyn h G, fg ſenkrecht auf A B, ſo ſind dieſe die Sinus von A C h, A C f, aber den Sinus von A C F, A C H eben ſo entgegengeſetzt, wie die zugehörigen Winkel. Wenn man C f in C B fallen läßt, ſo ſchließen die negativen Sinus ſich an die poſitiven. Die Winkel nach der Gegend von A nach F ſehe man als poſitiv an, und alſo auch ihre Sinus. Das Complement des negativen Winkels A C f zu vier Rechten, oder A C B C f iſt poſitiv, weil es nach der Richtung der poſitiven Winkel genommen wird, aber der Sinus deſſelben, fg, iſt negativ. Eben ſo iſt das Complement von A C h, oder A C B C h poſitiv, und der Sinus h G negativ.

6. Das Segment des Halbmeſſers, C G, welches der Sinus abſchneidet, von dem Mittelpuncte an genommen, heißt der Coſinus. Für einen ſtumpfen Winkel A C H liegt der Coſinus C g nach einer entgegengeſetzten Seite in Beziehung auf die Coſinus der ſpitzen Winkel, und ſind daher negativ, wenn dieſe poſitiv genommen werden. Es iſt coſ A C F = ſin (R — A C F), alſo auch coſ A C H = ſin (R — A C H) = — ſin (A C H — R).

Der Coſinus iſt dem Halbmeſſer gleich, wenn der Winkel Null iſt; er iſt Null, wenn der Winkel ein Rechter iſt.

Für einen negativen ſpitzen Winkel ACh iſt der Coſinus CG poſitiv, und ſo groß als für denſelben Winkel poſitiv genommen. Für einen negativen ſtumpfen ACf iſt der Coſinus Cg negativ. Daher iſt für poſitive Winkel zwiſchen zwey und drey Rechten der Coſinus negativ, zwiſchen drey und vier Rechten poſitiv.

7. Das Stück des Durchmeſſers AG oder Ag von dem Endpuncte A bis an den Punct, wo der Sinus ihn trifft, heißt der Querſinus oder ſinus verſus. Es iſt der Unterſchied zwiſchen dem Halbmeſſer und dem Coſinus, daher die arithmetiſche Summe, wenn der Coſinus negativ iſt.

8. Man ziehe auf AC durch A die ſenkrechte TAt oder die berührende in A, welche von dem Schenkel CF des Winkels ACF in T geſchnitten werde. Es heißt AT die Tangente des W. ACT. Sie iſt die vierte Proportionallinie zu dem Coſinus, Sinus und Halbmeſſer.

Die Tangente iſt Null, wenn der Winkel Null iſt. Sie iſt dem Halbmeſſer gleich, wenn der Winkel ein halber Rechter iſt. Sie iſt unendlich groß, wenn der Winkel ein Rechter iſt. Der unendlich große Werth einer Tangente macht den Übergang zu den Werthen der Tangenten ſtumpfer Winkel. Ohne dieſen Werth einzuführen, bliebe immer eine Lücke, die man nie ausfüllen würde.

Bey einem ſtumpfen Winkel ACH ſchneidet der Schenkel CH entgegengeſetzt verlängert die Tangente an der in Beziehung auf AT entgegengeſetzten Gegend in t. Die Tangente At iſt daher negativ. Die vorher angeführte Proportion erfordert dieſes auch. Einige angeſehene Mathematiker (de la Caille, Segner) haben die Tangente eines ſtumpfen Winkels als poſitiv angeſehen, weil ſie den Schenkel CH bis an eine Tangente in B verlängerten, welche freylich eine Lage wie AT hat. Die

Verſetzung der berührenden Linie geſchieht ohne Grund dazu zu haben.

Die Tangente At eines negativen ſpitzen Winkels ACh iſt negativ. Die Tangente eines negativen ſtumpfen iſt das Entgegengeſetzte einer negativen. Der Schenkel Cf des Winkels ACf ſchneidet entgegengeſetzt verlängert die Tangente in T, nach der Gegend, in welcher die Tangenten poſitiv ſind.

Die Tangenten der poſitiven Winkel zwiſchen zwey und drey Rechten ſind poſitiv; zwiſchen drey und vier Rechten negativ.

9. Durch den Endpunct D des Halbmeſſers CD, der auf AC ſenkrecht iſt, ziehe man eine ſenkrechte oder berührende, welche von dem Schenkel CF des Winkels ACF in K geſchnitten werde. Es heißt DK die Cotangente des Winkels ACF, und es iſt cot. ACF = tang (R — ACF). Die Cotangente iſt die dritte Proportionallinie zu der Tangente und dem Halbmeſſer, da AT:AC = CD:DK iſt.

Iſt der Winkel ſtumpf, wie ACH, ſo ſchneidet der Schenkel CH die berührende in k, und es iſt die Cotangente Dk negativ in Beziehung auf die poſitive DK. Wird CH nach t auf der berührenden in A verlängert, ſo iſt At : AC = CD : Dk. Wenn eine von beiden, Tangente und Cotangente, negativ iſt, ſo iſt es die andere auch.

Die Cotangente eines negativen ſpitzen Winkels ACh iſt Dk, negativ; die Cotangente eines negativen ſtumpfen Winkels iſt DK, poſitiv.

10. Die Hypotenuſe CT in dem rechtwinklichten Dreyeck CAT, deſſen Katheten der Halbmeſſer und die Tangente des Winkels ACT ſind, heißt die Secante dieſes Winkels. Sie iſt die dritte Proportionallinie zu dem Coſinus und Halbmeſſer.

Wenn der Winkel Null iſt, ſo iſt die Secante dem Halbmeſſer gleich Iſt der Winkel ein Rechter, ſo iſt die Secante unendlich groß. Für einen ſtumpfen Winkel

ACH iſt die Secante die Linie Ct, welche negativ iſt, weil ſie der Richtung des Schenkels CH entgegengeſetzt iſt, auch zufolge der angeführten Proportion.

Für einen negativen ſpitzen Winkel ACh iſt die Secante Ct poſitiv, weil ſie in die Richtung des Schenkels Ch fällt. Für einen ſtumpfen negativen Winkel ACf iſt die Secante CT negativ. Oder, für poſitive Winkel zwiſchen zwey und drey Rechten iſt die Secante negativ; zwiſchen drey und vier Rechten iſt ſie poſitiv; alles der Proportion coſ : rad = rad : ſec. gemäß.

11. Die Hypotenuſe CK an dem rechtwinklichten Dreyeck CDK iſt die Coſecante des Winkels ACF. Sie iſt die dritte Proportionallinie zu dem Sinus und dem Halbmeſſer. Für einen ſtumpfen Winkel ACH iſt die Coſecante die Hypotenuſe Ck, poſitiv, weil ſie in die Richtung des Schenkels, wie bey ſpitzen Winkeln fällt. Die Beziehung auf den Sinus deſſelben Winkels erfordert dies auch.

Für einen negativen ſpitzen Winkel ACh (oder poſitiven über drey Rechte) iſt die Coſecante die Linie Ck, und als negativ zu betrachten. Für einen negativen ſtumpfen Winkel ACf (poſitiven zwiſchen zwey und drey Rechten) iſt die Coſecante die Linie CK, und als negativ zu nehmen.

12. Die Größe der goniometriſchen Linien hängt, bey demſelben Winkel, von der Größe des Halbmeſſers ab. Allein das Verhältniß dieſer Linien zu dem Halbmeſſer iſt bey demſelben Winkel daſſelbe, wie groß oder klein auch der Halbmeſſer ſeyn mag, und ſo auch der Quotient, den die Diviſion dieſer Linien durch den Halbmeſſer giebt. Zu analytiſch-geometriſchen Rechnungen wird dieſer Quotient wegen ſeiner Beſtimmtheit gebraucht, und bekommt denſelben Namen, wie die geometriſche Linie, woraus er entſteht. In ältern Schriften, ſelbſt in den meiſten aus der erſten Hälfte des 18. Jahrhunderts, werden die Sinus, Tangenten u. ſ. w. als Linien betrachtet.

13. Dem neuern Gebrauche zufolge iſt in einem rechtwinklichten Dreyeck A B C, (Fig. 57.), worin B der rechte Winkel iſt,

$$\frac{BC}{AC} = \text{ſin } A; \qquad \frac{AB}{AC} = \text{coſ } A;$$

$$\frac{BC}{AB} = \text{tang } A; \qquad \frac{AB}{BC} = \text{cot } A;$$

$$\frac{AC}{AB} = \text{ſec } A; \qquad \frac{AC}{BC} = \text{coſec } A.$$

14. Hieraus ergiebt ſich

$$\text{ſin } A^2 + \text{coſ } A^2 = 1.$$

$$\text{tang } A \,.\, \text{coſ } A = \text{ſin } A.$$

$$\text{tang } A = \frac{\text{ſin } A}{\sqrt{(1 - \text{ſin } A^2)}}$$

$$\text{cot } A \,.\, \text{ſin } A = \text{coſ } A.$$

$$\text{cot } A = \frac{\text{coſ } A}{\sqrt{(1 - \text{coſ } A^2)}}$$

$$\frac{\text{tang } A}{\sqrt{(1 + \text{tang } A^2)}} = \text{ſin } A.$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1 + \text{tang } A^2)}} = \text{coſ } A.$$

$$\text{tang } A \,.\, \text{cot } A = 1:$$

$$\text{ſec } A = \frac{1}{\text{coſ } A} = \sqrt{(1 + \text{tang } A^2)}.$$

$$\text{coſec } A = \frac{1}{\text{ſin } A} = \sqrt{(1 + \text{cot } A^2)}$$

$$\text{ſin. verſ. } A = 1 - \text{coſ } A.$$

Die irrationalen Ausdrücke laſſen ſich in Reihen auflöſen, ſo daß eine goniometriſche Function aus Potenzen einer andern zuſammengeſetzt wird.

14*. Die Potenz einer goniometriſchen Function mag man durch den Exponenten oben an dem Symbol des Winkels bezeichnen, wenn man nur dieſes nicht als eine Potenzirung des Winkels anſieht. Denn ſin A, coſ A, tang A, etc. ſind wie einfache Bezeichnungen anzuſehen, ſo daß der Exponent nicht einen Theil derſelben angeht. Manche ſchließen das Symbol der Function in Klammern ein, wie $(\sin A)^2$. Einige bezeichnen ſie durch $\sin^2 A$; $\sin^3 A$, u. ſ. f.

15. Die goniometriſchen Functionen als Quotienten genommen nenne man die numeriſchen Sinus, Tangenten u. ſ. f. im Gegenſatze gegen die lineariſchen. Die letztern ſtellen die numeriſchen dar, wenn der Halbmeſſer zur Einheit genommen wird.

16. Wenn eine gerade Linie durch die Drehung um einen feſten Punct einen Winkel von vier Rechten beſchrieben hat, und in ihre erſte Lage wieder gekommen iſt, ſo beſchreibt ſie weiter hin dieſelben Winkel, wie vorher, und dieſes ohne Ende fort mit unendlich vielen Umläufen. In der Natur iſt dieſes der Fall bey den Umläufen der Planeten und ihrer Trabanten. Es bezeichne π die Summe zweyer Rechten, φ einen ſpitzen Winkel, ſo iſt

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \sin(2\pi+\varphi) = \sin(\pi-\varphi) \\ &= \sin(4\pi+\varphi) = \sin(3\pi-\varphi) \\ &\quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ &= \sin(2n\pi+\varphi) = \sin((2n+1)\pi-\varphi) \end{aligned}$$

Da ferner $\sin\varphi = -\sin(\pi+\varphi)$ iſt, ſo iſt $\sin\varphi = -\sin((2n+1)\pi+\varphi)$. Da auch $\sin\varphi = -\sin(2\pi-\varphi)$ iſt, ſo iſt $\sin\varphi = -\sin(2n\pi-\varphi)$.

Die Sinus aller Winkel, deren Unterſchied ein gerades Vielfaches von π, oder deren Summe ein ungerades Vielfaches von π iſt, ſind ſich gleich und gleichnamig. In dem entgegengeſetzten Falle ſind ſie gleich aber ungleichnamig.

17. Eben ſo iſt $\cos\varphi = \cos(2\pi + \varphi) = \cos(4\pi + \varphi) \ldots\ldots = \cos(2n\pi + \varphi)$. Da auch $\cos\varphi = \cos(2\pi - \varphi)$ iſt, ſo iſt $\cos\varphi = \cos(2n\pi - \varphi)$. Da ferner $\cos\varphi = -\cos(\pi - \varphi)$ iſt, ſo iſt $\cos\varphi = -\cos((2n+1)\pi - \varphi)$, und weil $\cos\varphi = -\cos(\pi + \varphi)$ iſt, ſo iſt $\cos\varphi = -\cos((2n+1)\pi + \varphi)$.

Die Coſinus aller Winkel, deren Unterſchied oder Summe ein gerades Vielfaches von π iſt, ſind gleich und gleichnamig. Iſt der Unterſchied ein ungerades Vielfaches von π, ſo ſind die Coſinus gleich aber ungleichnamig.

18. Auf ähnliche Art iſt $\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}(2n\pi + \varphi)$, und $\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}((2n+1)\pi + \varphi)$, aber $\operatorname{tang}\varphi = -\operatorname{tang}((2n+1)\pi - \varphi)$, und $\operatorname{tang}\varphi = -\operatorname{tang}(2n\pi - \varphi)$.

19. Wenn alſo ein Winkel durch eine goniometriſche Function gegeben wird, ſo gehören dazu unendlich viele Bogen. Iſt ein Winkel oder Bogen, der durch eine ſolche Function gegeben wird, in eine Anzahl gleicher Theile zu theilen, ſo müſſen alle Winkel, die zu der Function gehören, in ſo viele Theile getheilt werden. Davon unten.

20. Bey der Anwendung auf eine geometriſche Rechnung werden für einen beſtimmten Fall der Verbindung der Größen alle Winkel ſpitz und poſitiv genommen, ohne Rückſicht auf ihre gegenſeitige Beziehung, ſo wie auch alle Linien, nach welcher Gegend ſie auch genommen werden, poſitiv zu ſetzen ſind. Aus der Rechnung für dieſen Normalfall werden nachher alle andern Fälle der Verbindung der Größen durch gehörige Veränderung der Vorzeichen hergeleitet. Wird ein Winkel negativ, ſo wird deſſen Sinus negativ, und alle davon abhangende Linien werden daher negativ, ſo wie umgekehrt eine negative Linie den damit verbundenen Sinus eines Winkels und den Winkel zu demſelben negativ macht. Ein nega-

tiger ſpitzer Winkel verändert die Beſchaffenheit ſeines Coſinus, und der davon abhangenden Linien, nicht; aber ein ſtumpfer Winkel, er ſey poſitiv oder negativ, verurſacht, daß der Coſinus und die dadurch zu beſtimmenden Linien negativ werden. Bey einem poſitiven ſtumpfen, und negativen ſpitzen Winkel ändert die Tangente ihr Vorzeichen, und macht die dazu gehörigen Linien negativ, dagegen für einen negativen ſtumpfen Winkel die Tangente und das dazu gehörige poſitiv bleibt.

21. Solchergeſtalt kann die Rechnung alle verſchiedene Fälle, welche die Geometrie unterſcheidet, und beſonders betrachten muß, in eine einzige Formel faſſen, die aus der Betrachtung eines einzelnen Falles hergeleitet wird. In der ſphäriſchen Trigonometrie iſt dieſes ein wichtiges Mittel, um ſehr viele Fälle in wenigen Formeln zu begreifen. Ihre Formeln enthalten nichts als Functionen von mehrern Winkeln, deren Abänderungen in Rückſicht auf die poſitive und negative Lage, und die Beſchaffenheit, ob ſie ſpitz oder ſtumpf ſind, eine große Mannichfaltigkeit der Fälle geben. Hier kommen häufig überſtumpfe Winkel (größer als zwey Rechte) vor, für welche ihre Complemente zu vier Rechten als negative Winkel geſetzt werden können. In der Geometrie der krummen Linien, wo gewiſſe gerade Linien mit Winkeln verbunden werden, ſtellt ein einziger Normalfall alle abgeänderte Fälle dar, wenn man die goniometriſchen Functionen auf jede mögliche Art ihre Vorzeichen ändern läßt.

22. Wenn in einer Formel ſtatt der numeriſchen Functionen der Winkel die lineariſchen eingeführt werden ſollen, ſo hat man für jene die Quotienten der lineariſchen dividirt durch ihren Halbmeſſer zu ſetzen. Der Halbmeſſer ſey $= r$, der Winkel $= \varphi$, $\sin \varphi = \frac{y}{r}$; $\cos \varphi = \frac{x}{r}$; $\tang \varphi = \frac{t}{r}$; $\sec \varphi = \frac{s}{r}$, ſo ſetzt man dieſe Ausdrücke der Functionen in die Gleichung,

deren Form man ändern will, und multiplicirt ſie mit einer ſolchen Potenz von r, daß die Nenner in den Gliedern der Gleichung wegfallen. Oder man ſchreibt r ſin φ für ſin φ; r coſ φ für coſ φ, u. ſ. f. ſo daß nun ſin φ, etc. die lineariſchen Functionen bedeuten, wobey man aber in jedem Gliede die fehlenden Dimenſionen durch eine Potenz von r ergänzen muß, damit alle Glieder gleich hohe Dimenſionen erhalten, wenn ſonſt keine lineariſche Größe zur Einheit gemacht iſt.

23. In den gewöhnlichen Tafeln der Sinus, Tangenten und Secanten iſt der Halbmeſſer = 10000000 geſetzt. Die zu jedem Winkel als Sinus, Tangente und Secante geordneten Zahlen ſind durch dieſen Werth des Halbmeſſers zu dividiren, wenn ſie in der Bedeutung, die ihnen in (13.) gegeben iſt, zum analytiſchen Gebrauch angewandt werden ſollen. Das giebt den Sinus totus = 1. Dann ſind die Logarithmen aller Sinus, und der Tangenten von Winkeln unter 45° negativ; es ſind ihnen aber allen in der Kennziffer 10 geliehen, um bey den Rechnungen nicht genöthigt zu ſeyn, die Addition der Logarithmen in eine Subtraction, oder dieſe in jene zu verwandeln. Die Logarithmen der Tangenten von Winkeln über 45°, und der Secanten ſind zwar poſitiv, allein der Gleichförmigkeit wegen hat man ihnen auch 10 geliehen. Man hat alſo die Logarithmen aller dieſer Zahlen vollſtändig ſo zu ſchreiben, wie in folgenden Beyſpielen:

$$\log \sin 36^\circ = 9{,}7692187 - 10$$
$$\log \tan 40^\circ = 9{,}9238135 - 10$$
$$\log \tan 50^\circ = 10{,}0761865 - 10$$
$$\log \sec 54^\circ = 10{,}2307813 - 10.$$

Werden ſolche Logarithmen zu einander, oder zu den Logarithmen von irgend welchen Zahlen, addirt, ſo werden die ſubtractiven 10 auch zu einander addirt, worauf man aber von denſelben gegen die Kennziffer in der Summe der Logarithmen ſo viel hebt, als möglich iſt, damit entweder nicht mehr als 10 zu ſubtrahiren bleiben,

oder dieſelbe ganz wegfalle, wenn nämlich der Logarithme zu einer Zahl über die Einheit gehört. Z. B. log tang 40° + log tang 50° = 0, und log ſin 36° + log ſec 54° oder log coſ 54° + log ſec 54° = 0, den Formeln in (14.) gemäß.

Da nach (35.) iſt ſin 2 A = 2 ſin A . coſ A, ſo iſt, wenn A = 36° genommen wird,

log ſin 36° = 9,7692187 — 10
log coſ 36° = 9,9079576 — 10
log 2 = 0,3010300

log ſin 72° = 9,9782063 — 10.

Nach (36.) iſt 2 coſ A² = 1 + coſ 2 A. Alſo

log coſ 36° = 9,9079576 — 10
9,9079576 — 10
log 2 = 0,3010300

log 1,309017 = 0,1169452

Es iſt 0,309017 = coſ 72°.

Sucht man zu einem numeriſchen Sinus oder einer ſolchen Tangente den Winkel, ſo nehme man dieſelbe bis zu der ſiebenten Decimalſtelle für eine ganze Zahl, und ſuche ſie in den gewöhnlichen Tafeln unter ihrer Rubrik auf; man erhält daneben den geſuchten Winkel. Z. B. iſt 0,309017 ein Coſinus, ſo ſuche man die Zahl 3090170 in den Tafeln unter der Rubrik Coſinus auf, und man findet den Winkel 72°. Oder: es ſey 0,00436 ein Sinus. Man ſuche die Zahl 43600 unter den Sinus auf, ſo findet man nahe 15′. Es ſey 15,0557 eine Tangente, man ſuche auf die Zahl 15 0557000, ſo findet ſich der Winkel etwas kleiner als 86° 12′.

II. Zuſammenſetzung der Winkel vermittelſt ihrer Functionen.

24. Es iſt

$$\sin(A+B) = \sin A . \cos B + \cos A . \sin B$$
$$\sin(A-B) = \sin A . \cos B - \cos A . \sin B$$
$$\cos(A+B) = \cos A . \cos B - \sin A . \sin B$$
$$\cos(A-B) = \cos A . \cos B + \sin A . \sin B$$

von welchen Formeln die zweyte aus der erſten, und die vierte aus der dritten durch die Negation von B entſteht.

25. Man hat verſchiedene Beweiſe dieſer Formeln. Die leichteſte Beweisart iſt folgende. In einem Kreiſe (Fig. 58.) ſey ein Viereck ABCD beſchrieben, deſſen eine Diagonale der Durchmeſſer AC iſt, wodurch es in zwey rechtwinklichte Dreyecke zerfällt. Man ziehe noch den Durchmeſſer DE durch den Punct D, und die Chorde BE, ſo iſt die Diagonale BD der Sinus des Winkels BED, wenn DE der Sinus totus iſt, und der Winkel BED iſt = BCD, der auf demſelben Bogen ſteht, das iſt, BED = BCA + DCA. Nun iſt nach einer Eigenſchaft des Kreiſes (ſ. Kreis)

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD.$$

Dividirt man mit $AC \times AC$ oder $AC \times DE$, ſo iſt

$$\frac{BD}{DE} = \frac{AB}{AC} \times \frac{CD}{AC} + \frac{BC}{AC} \times \frac{AD}{AC},$$

das iſt

$$\sin BED = \sin ACB \times \cos ACD + \cos ACB \times \sin ACD,$$

und daher

$$\sin(ACB + ACD) = \sin ACB \times \cos ACD + \cos ACB \times \sin ACD.$$

Dies iſt die erſte der Formeln in 24.

Zweytens iſt BD auch der Coſinus von BDE, das iſt von ADE — ADB = CAD — ACB (weil die beiden Durchmeſſer ſich im Mittelpuncte ſchneiden, und weil ADB, ACB auf demſelben Bogen AB ſtehen). Demnach iſt

$$\text{coſ}\,(CAD - ACB) = \text{ſin}\,ACB \times \text{ſin}\,CAD + \text{coſ}\,ACB \times \text{coſ}\,CAD.$$

Dieſes iſt die vierte der Formeln in (24.)

26. In einem Kreiſe (Fig. 59.) ſey ein Viereck ABCD eingeſchrieben, deſſen Seite AD der Durchmeſſer iſt. In demſelben ziehe man die Diagonalen AC, DB, und durch C den Durchmeſſer CE, nebſt der Chorde BE. Nun iſt in dem bey B rechtwinklichten Dreyecke CBE die Kathete BC der Sinus von BEC für CE als Sinus totus. Es iſt BEC = BDC = ADC — ADB. Zufolge der in (25.) angeführten Eigenſchaft des Kreiſes iſt

$$AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$$

oder

$$AD \times BC = AC \times BD - AB \times CD.$$

Dividirt man mit AD × AD oder AD × CE, ſo iſt

$$\frac{BC}{CE} = \frac{AC}{AD} \times \frac{BD}{AD} - \frac{AB}{AD} \times \frac{CD}{AD}.$$

Folglich iſt

$$\text{ſin}\,(ADC - ADB) = \text{ſin}\,ADC \,.\, \text{coſ}\,ADB - \text{ſin}\,ADB \,.\, \text{coſ}\,ADC.$$

Dieſes iſt die zweyte Formel in (24.)

Zweytens, es iſt BC auch der Coſinus von BCE für den Sinus totus CE, und BCE = BCA + ACE = ADB + CAD. Daher iſt

$$\text{coſ}\,(ADB + CAD) = \text{coſ}\,CAD \,.\, \text{coſ}\,ADB - \text{ſin}\,ADB \,.\, \text{ſin}\,CAD$$

die dritte Formel in (24.). Dieſe und die zweyte folgen zwar aus den beiden andern durch den Gebrauch des Entgegengeſetzten. Zur deutlichern Einſicht ihrer Entſtehung iſt es nützlich, ſie unabhängig von jenen zu erweiſen.

Die vier Formeln in (24.) ſind eine reiche Quelle vieler andern.

27. Erſtlich fließen daraus folgende ſehr leicht

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\,.\cos B$$
$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\,.\sin B$$
$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\,.\cos B$$
$$\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\,.\sin B.$$

28. Man ſetze in dieſen Formeln A ſtatt A + B, und B ſtatt A — B ſo verwandeln ſie ſich in folgende:

$$\sin A+\sin B=2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\,.\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$\sin A-\sin B=2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\,.\sin\tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$\cos A+\cos B=2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\,.\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$\cos B-\cos A=2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\,.\sin\tfrac{1}{2}(A-B).$$

29. Aus dieſen Formeln werden durch die Diviſion folgende hergeleitet:

$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{\tang\tfrac{1}{2}(A+B)}{\tang\tfrac{1}{2}(A-B)}$$

$$\frac{\cos B-\cos A}{\cos A+\cos B}=\tang\tfrac{1}{2}(A+B)\,.\tang\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Auf die erſte dieſer Formeln gründet ſich eine Regel, welche gewöhnlich zur Berechnung zweyer unbekannten Winkel in einem Dreyecke aus einem Winkel nebſt den beiden einſchließenden Seiten gegeben wird. Iſt nämlich das Verhältniß $\sin A : \sin B$ gegeben, welches $m : n$ ſey, ſo iſt $m + n : m - n = \tang\tfrac{1}{2}(A+B) : \tang\tfrac{1}{2}(A-B)$.

30. Aus denſelben Formeln fließen noch folgende:

$$\frac{\text{ſin } A + \text{ſin } B}{\text{coſ } A + \text{coſ } B} = \text{tang } \tfrac{1}{2}(A + B)$$

$$\frac{\text{ſin } A - \text{ſin } B}{\text{coſ } B - \text{coſ } A} = \text{cot } \tfrac{1}{2}(A + B),$$

worin ſin B und B auch negativ genommen werden können.

31. Aus den beiden erſten Formeln in (24.) verbunden mit (14.) folgen

$$\frac{\text{ſin}(A + B)}{\text{coſ } A \,.\, \text{coſ } B} = \text{tang } A + \text{tang } B$$

$$\frac{\text{ſin}(A + B)}{\text{ſin } A \,.\, \text{ſin } B} = \text{cot } A + \text{cot } B$$

$$\frac{\text{ſin}(A - B)}{\text{coſ } A \,.\, \text{coſ } B} = \text{tang } A - \text{tang } B$$

$$\frac{\text{ſin}(A - B)}{\text{ſin } A \,.\, \text{ſin } B} = \text{cot } B - \text{cot } A.$$

32. Aus den beiden andern Formeln daſelbſt wird erhalten

$$\frac{\text{coſ}(A + B)}{\text{coſ } A \,.\, \text{coſ } B} = 1 - \text{tang } A \,.\, \text{tang } B$$

$$\frac{\text{coſ}(A + B)}{\text{ſin } A \,.\, \text{ſin } B} = \text{cot } A \,.\, \text{cot } B - 1$$

$$\frac{\text{coſ}(A - B)}{\text{coſ } A \,.\, \text{coſ } B} = 1 + \text{tang } A \,.\, \text{tang } B$$

$$\frac{\text{coſ}(A - B)}{\text{ſin } A \,.\, \text{ſin } B} = \text{cot } A \,.\, \text{cot } B + 1.$$

33. Aus den Formeln in (24.) oder in (31. 32.) werden mittelſt einiger Diviſionen hergeleitet:

$$\text{tang}(A \pm B) = \frac{\text{tang}\,A \pm \text{tang}\,B}{1 \mp \text{tang}\,A\,.\,\text{tang}\,B},$$

$$\text{cot}\,(A \pm B) = \frac{\text{cot}\,A \mp \text{tang}\,B}{1 \pm \text{cot}\,A\,.\,\text{tang}\,B}.$$

34. Aus den Formeln in (31. 32.) folgt noch

$$\frac{\text{ſin}\,(A + B)}{\text{ſin}\,(A - B)} = \frac{\text{tang}\,A + \text{tang}\,B}{\text{tang}\,A - \text{tang}\,B}$$

$$\frac{\text{coſ}\,(A + B)}{\text{coſ}\,(A - B)} = \frac{\text{cot}\,A - \text{tang}\,B}{\text{cot}\,A + \text{tang}\,B}.$$

Bey den zu dieſen und den vorhergehenden Formeln nöthigen Verwandlungen hat man nur ſich zu erinnern, daß der Sinus eines Winkels durch den Coſinus deſſelben dividirt die Tangente, dieſer durch jenen dividirt, die Cotangente, und daß Tangente mit Cotangente multiplicirt, die Einheit giebt.

35. Man ſetze $A = B$, ſo iſt aus (24.)

$$\text{ſin}\,2A = 2\,\text{ſin}\,A\,.\,\text{coſ}\,A$$

$$\text{coſ}\,2A = \text{coſ}\,A^2 - \text{ſin}\,A^2.$$

36. Mit dieſen Formeln verbinde man die, $1 = \text{ſin}\,A^2 + \text{coſ}\,A^2$, ſo iſt

$$1 + \text{ſin}\,2A = (\text{ſin}\,A + \text{coſ}\,A)^2$$

$$1 - \text{ſin}\,2A = (\text{ſin}\,A - \text{coſ}\,A)^2$$

$$1 + \text{coſ}\,2A = 2\,\text{coſ}\,A^2$$

$$1 - \text{coſ}\,2A = 2\,\text{ſin}\,A^2.$$

Die dritte und vierte Formel werden aus den beiden letztern in (28.) erhalten, wenn daſelbſt $B = 0$ geſetzt, und A mit $2A$ vertauſcht wird.

37. Setzt man in den beiden erſtern Formeln eben daſelbſt $A = 90°$, und $2A$ ſtatt B, ſo iſt

$$1 + \sin 2A = 2 \sin (45^\circ + A)^2$$
$$1 - \sin 2A = 2 \sin (45^\circ - A)^2.$$

Es iſt nämlich $\cos (45^\circ \mp A) = \sin (45 \pm A)$.

38. Aus (35 und 36.) iſt

$$\frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A$$

$$\frac{\sin 2A}{1 - \cos 2A} = \cot A$$

$$\frac{\cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tfrac{1}{2}(1 - \tan A^2)$$

$$\frac{\cos 2A}{1 - \cos 2A} = \tfrac{1}{2}(\cot A^2 - 1).$$

39. In den erſten zwey Formeln vertauſche man A mit $45^\circ - A$, ſo iſt

$$\frac{\cos 2A}{1 + \sin 2A} = \tan (45^\circ - A) = \cot (45^\circ + A)$$

$$\frac{\cos 2A}{1 - \sin 2A} = \cot (45^\circ - A) = \tan (45^\circ + A).$$

40. Aus dieſen entſteht

$$\frac{1 + \sin 2A}{1 - \sin 2A} = \frac{\tan (45^\circ + A)}{\tan (45^\circ - A)}$$
$$= \tan (45^\circ + A)^2$$

oder $\dfrac{1 - \sin 2A}{1 + \sin 2A} = \tan 45^\circ - A)^2.$

Dieſe Formel folgt auch aus (37.), weil $\cos (45 \mp A) = \sin (45 \pm A)$, und Sinus durch Coſinus dividirt die Tangente iſt.

41. Aus den beiden letzten Formeln in (36.) iſt

$$\frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A^2.$$

Vertauſcht man A mit 45° — A, ſo wird die zweyte Formel in (40.) erhalten.

42. Aus der Formel in (41.) folgt

$$\cos 2A = \frac{1 - \tang A^2}{1 + \tang A^2},$$

und aus dieſer

$$1 + \cos 2A = \frac{2}{1 + \tang A^2}$$

$$1 - \cos 2A = \frac{2 \tang A^2}{1 + \tang A^2}.$$

Hieraus mit Zuziehung (38.)

$$\sin 2A = \frac{2 \tang A}{1 + \tang A^2}.$$

Oder auch aus den beiden Formeln unmittelbar durch Multiplication und Ausziehung der Quadratwurzel.

43. Aus (28 und 35.) wird erhalten

$$\sin A^2 - \sin B^2 = \sin (A + B) . \sin (A - B)$$

$$\cos B^2 - \cos A^2 = \sin (A + B) . \sin (A - B).$$

Setzt man hier A + B ſtatt A, ſo iſt $\sin (A + B)^2 - \sin B^2 = \sin (A + 2B) . \sin A$.

44. In den Formeln (33.) ſetze man, das obere Vorzeichen genommen, A = B, ſo iſt

$$\tang 2A = \frac{2 \tang A}{1 - \tang A^2}$$

$$\cot 2A = \tfrac{1}{2} (\cot A - \tang A).$$

45. In den beiden erſten daſelbſt ſetze man B = 45°, ſo iſt

$$\tang (45° + A) = \frac{1 + \tang A}{1 - \tang A}$$

$$\tang (45° - A) = \frac{1 - \tang A}{1 + \tang A},$$

und hieraus

$$\tan(45^\circ + A) - \tan(45^\circ - A) = 2 \tan 2A.$$

Es iſt nämlich der Unterſchied $= \frac{4 \tan A}{1 - \tan A^2}$ $= 2 \tan 2A$. Die Formel folgt auch aus der zweyten in (44.).

46. Es ſey $A + B = 90^\circ$, ſo iſt $\tan A - \tan B = 2 \tan(A - B)$.

Aus (3 .), da $\tan B = \frac{1}{\tan A}$ iſt.

47. Aus den Formeln (31.) wird durch Multiplication erhalten,

$$\tan A^2 - \tan B^2 = \frac{\sin(A + B) . \sin(A - B)}{\cos A^2 . \cos B^2},$$

$$\cot B^2 - \cot A^2 = \frac{\sin(A + B) . \sin(A - B)}{\sin A^2 . \sin B^2}$$

48. Aus den Formeln in (39.) folgt

$$\sec 2A + \tan 2A = \tan(45^\circ + A)$$
$$\sec 2A - \tan 2A = \tan(45^\circ - A)$$

oder

$$\sec 2A = \tan(45^\circ \pm A) \mp \tan 2A.$$

Daraus iſt

$$2 \sec 2A = \tan(45^\circ + A) + \tan(45^\circ - A).$$

Die beiden erſten Formeln werden durch Umkehrung der Brüche in (39.) erhalten. Die Cotangente iſt auch ein Bruch, nämlich die Einheit dividirt durch die Tangente. Für $\frac{1}{\cos 2A}$ iſt $\sec 2A$ geſetzt.

Die Secanten werden aus Tangenten durch bloße Addition oder Subtraction gefunden.

49. Aus den Formeln (38.) folgt auf ähnliche Art

$$\operatorname{coſec} 2A + \cot 2A = \cot A$$
$$\operatorname{coſec} 2A - \cot 2A = \operatorname{tang} A,$$

oder

$$\operatorname{coſec} 2A = \cot A - \cot 2A$$
$$= \operatorname{tang} A + \cot 2A.$$

Daraus iſt

$$2 \operatorname{coſec} 2A = \operatorname{tang} A + \cot A.$$

Für $\frac{1}{\operatorname{ſin} 2A}$ iſt coſec 2 A geſetzt.

50. Da $\operatorname{coſ} 2A = \frac{1}{\operatorname{ſec} 2A}$ iſt, ſo iſt aus (42.)

$$\operatorname{ſec} 2A = \frac{1 + \operatorname{tang} A^2}{1 - \operatorname{tang} A^2}$$

und daraus vermittelſt (44)

$$\operatorname{ſec} 2A - 1 = \operatorname{tang} A \,.\, \operatorname{tang} 2A.$$

51. Hieraus iſt, wenn 2 A mit 90° — 2 A vertauſcht wird,

$$\operatorname{coſec} 2A - 1 = \frac{\operatorname{tang}(45^\circ - A)}{\operatorname{tang} 2A}$$

Die Formel kann auch für ſich aus der für ſin 2 A, das iſt $\frac{1}{\operatorname{coſec} 2A}$, und der für tang 2 A hergeleitet werden.

52. In den Formeln (28.) ſetze man $A = 30^\circ + \alpha$; $B = 30^\circ - \alpha$, und bemerke, daß $\operatorname{ſin} 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\operatorname{coſ} 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ iſt, ſo wird erhalten:

I. $\operatorname{ſin}(30^\circ + \alpha) + \operatorname{ſin}(30^\circ - \alpha) = \operatorname{coſ}\alpha$

II. $\operatorname{ſin}(30^\circ + \alpha) - \operatorname{ſin}(30^\circ - \alpha) = \operatorname{ſin}\alpha \,.\, \sqrt{3}$

III. $\operatorname{coſ}(30^\circ + \alpha) + \operatorname{coſ}(30^\circ - \alpha) = \operatorname{coſ}\alpha \,.\, \sqrt{3}$

IV. $\operatorname{coſ}(30^\circ - \alpha) - \operatorname{coſ}(30^\circ + \alpha) = \operatorname{ſin}\alpha.$

Die Formeln I. IV. dienen, aus den Sinus der Winkel von 0° bis 30°, und derer von 30° bis 90°, das

iſt der Coſinus der Winkel von 0° bis 30°, die Sinus und Coſinus der Winkel von 30° bis 60° durch bloße Subtraction zu finden. Es iſt nämlich

$$\sin(30° + \alpha) = \cos\alpha - \sin(30° - \alpha),$$
$$\cos(30° + \alpha) = \cos(30° - \alpha) - \sin\alpha.$$

oder

$$\cos(60° - \alpha) = \cos\alpha - \cos(60° + \alpha)$$
$$\sin(60° - \alpha) = \sin(60° + \alpha) - \sin\alpha.$$

53. In den beiden erſten Formeln (28.) ſetze man $B = 90° - A$, ſo iſt

$$\sin A + \cos A = \cos(45° - A).\sqrt{2}$$
$$\cos A - \sin A = \sin(45° - A).\sqrt{2}.$$

Dieſe Formeln dienen aus den Sinus und Coſinus der Winkel unter $\frac{1}{4}.90°$ oder $22°\frac{1}{2}$ die Sinus und Coſinus der Winkel von $22°\frac{1}{2}$ bis 45° zu berechnen Dieſes iſt in der Centeſimaltheilung zu gebrauchen, ſo wie das Verfahren nach (52.) in der Nonageſimaltheilung des Quadranten.

54. In (43.) ſetze man $A = 45°$, dann $A = 30°$, und noch $A = 60°$, und vertauſche B mit A, ſo iſt

$$\tfrac{1}{2} - \sin A^2 = \sin(45° + A)\ \sin(45° - A)$$
$$\tfrac{1}{4} - \sin A^2 = \sin(30° + A).\sin(30° - A)$$
$$\tfrac{3}{4} - \sin A^2 = \sin(60° + A).\sin(60° - A).$$

55. In der zweyten Formel (44.) ſetze man $A = 30° - \alpha$, ſo iſt

$$2\,\mathrm{tang}(30° + 2\alpha) = \mathrm{tang}(60° + \alpha) - \mathrm{tang}(30° - \alpha).$$

Es ſind nämlich ſtatt der Cotangenten die Tangenten der Complemente geſetzt.

Aus den Tangenten der Winkel von 0° bis 30° und von 60° bis 90° (den Cotangenten von 30° bis 0°) werden die Tangenten der Winkel von 30° bis 60° durch bloße Subtraction gefunden. Nur ſind die Unterſchiede in der letztern Reihe der Winkel doppelt ſo groß als in der erſtern, ſ. Cyklotechnie, Th. I. S. 680.

56. Es ſey die Summe dreyer Winkel, $A + B + C = 90$, ſo iſt

$$\tang A \,.\, \tang B + \tang A \,.\, \tang C + \tang B \,.\, \tang C = 1.$$

Denn $tg A + tg B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \,.\, \cos B}$ (31.)

und $tg A \,.\, tg C + tg B \,.\, tg C = (tg A + tg B) \,.\, \cot (A + B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \,.\, \cos B} \,.\, \frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)} = \frac{\cos(A+B)}{\cos A \,.\, \cos B} = 1 - \frac{\sin A \,.\, \sin B}{\cos A \,.\, \cos B} = 1 - tg A \times tg B$, folglich $tg A \,.\, tg C + tg B \,.\, tg C + tg A \,.\, tg B = 1$.

57. Es ſey $A + B + C = 90°$, ſo iſt $\cot A + \cot B + \cot C = \cot A \,.\, \cot B \,.\, \cot C$.

Denn $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \,.\, \sin B} + \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \,.\, \sin B} \,.\, \frac{\cos(A+B) + \sin A \,.\, \sin B}{\cos(A+B)}$

$$= \frac{\sin(A+B)}{\sin A \,.\, \sin B} \,.\, \frac{\cos A \,.\, \cos B}{\cos(A+B)}$$

$$= \cot A \,.\, \cot B \times \tang(A+B)$$

$$= \cot A \,.\, \cot B \,.\, \cot C.$$

Der Satz iſt in dem Artikel, Dreyeck (38.) durch ein bloßes geometriſches Verfahren gefunden.

III. Reihen der Sinus und Coſinus von Winkeln, die in arithmetiſcher Progreſſion ſind.

58. In der erſten Formel (27.), $\sin(A + B) = 2 \sin A \,.\, \cos B - \sin(A - B)$, ſetze man für A folgeweiſe die Glieder der arithmetiſchen Progreſſion,

a; a + b; a + 2b; a + 3b; ...... a + nb; und B = b, ſo erhält man für die Sinus dieſer Winkel folgende Fortſchreitung.

$$\sin a = \sin a$$

$$\sin(a+b) = 2\cos b \,.\, \sin a - \sin(a-b)$$

$$\sin(a+2b) = 2\cos b \,.\, \sin(a+b) - \sin a$$

$$\sin(a+3b) = 2\cos b \,.\, \sin(a+2b) - \sin(a+b)$$

$$\sin(a+4b) = 2\cos b \,.\, \sin(a+3b) - \sin(a+2b)$$

. . .

. . .

. . .

$$\sin(a+nb) = 2\cos b \,.\, \sin(a+(n-1)b) - \sin(a+(n-2)b).$$

59. In der zweyten Formel (27.), $\sin(A+B) = 2\cos A \,.\, \sin B + \sin(A-B)$, ſetze man für A und B dieſelben Größen, ſo iſt das allgemeine Glied der Fortſchreitung der Sinus,

$$\sin(a+nb) = 2\sin b \,.\, \cos(a+(n-1)b) + \sin(a+(n-2)b).$$

60. Eben ſo verfahre man mit der dritten Formel in (27.), $\cos(A+B) = 2\cos A \,.\, \cos B - \cos(A-B)$, und man erhält

$$\cos a = \cos a$$

$$\cos(a+b) = 2\cos b \,.\, \cos a - \cos(a-b)$$

$$\cos(a+2b) = 2\cos b \,.\, \cos(a+b) - \cos a$$

$$\cos(a+3b) = 2\cos b \,.\, \cos(a+2b) - \cos(a+b)$$

$$\cos(a+4b) = 2\cos b \,.\, \cos(a+3b) - \cos(a+2b)$$

. . .

. . .

. . .

$$\cos(a+nb) = 2\cos b \,.\, \cos(a+(n-1)b) - \cos(a+(n-2)b).$$

61. Durch dieſelben Subſtitutionen wird aus der vierten Formel, $\cos(A + B) = \cos(A - B) - 2\sin A \,.\, \sin B$, das allgemeine Glied der Fortſchreitung der Coſinus,

$$\cos(a + nb) = \cos(a + (n - 2)b)$$
$$- 2\sin b \,.\, \sin(a + (n - 1)b).$$

62. Von dieſen Formeln iſt in dem Artikel, Cyklotechnie, die Anwendung zum Einſchalten der Sinus und Coſinus zwiſchen zwey gegebenen, bey einer arithmetiſchen Fortſchreitung der Winkel, gemacht. Th. I. S. 677.

Die Reihe der Sinus und Coſinus iſt nach (58 und 60.) eine rücklaufende, worin jedes Glied aus den zwey nächſt vorhergehenden auf eine gleichförmige Art zuſammengeſetzt wird.

63. Die Summe einer Reihe Sinus von Winkeln, die in arithmetiſcher Progreſſion ſind, ſey $= S$, ſo daß

$$\sin a + \sin(a + b) + \sin(a + 2b) \ldots\ldots$$
$$\ldots + \sin(a + nb) = S.$$

Es iſt

$$S = \frac{\cos(a - \frac{1}{2}b) - \cos(a + (n + \frac{1}{2})b)}{2\sin\frac{1}{2}b},$$

oder

$$S = \frac{\sin(a + \frac{1}{2}nb) \,.\, \sin\frac{1}{2}(n + 1)b}{\sin\frac{1}{2}b}.$$

In der Formel (61.),
$2\sin b \,.\, \sin(a + (n - 1)b) = \cos(a + (n - 2)b) - \cos(a + nb)$, ſetze man für n ſucceſſiv die Werthe, 1, 2, 3 ... $n + 1$, ſo erhält man eine Reihe von Formeln oder Gleichungen, deren erſte iſt

$$2\sin b \,.\, \sin a = \cos(a - b) - \cos(a + b).$$

Die letzte oder $(n + 1)$te iſt

$$2\sin b \,.\, \sin(a + nb) = \cos(a + (n - 1)b)$$
$$- \cos(a + (n + 1)b).$$

A

Addirt man alle dieſe Gleichungen zu einander, ſo entſteht daraus dieſe,

$$2 \operatorname{ſin} b . S = \operatorname{coſ}(a - b) + \operatorname{coſ} a - \operatorname{coſ}(a + nb)$$
$$- \operatorname{coſ}(a + (n + 1) b),$$

das iſt (28.)

$$\operatorname{ſin} b . S = \operatorname{coſ}(a - \tfrac{1}{2} b) \operatorname{coſ} \tfrac{1}{2} b - \operatorname{cſ}(a + (n + \tfrac{1}{2}) b) \operatorname{coſ} \tfrac{1}{2} b.$$

Da $\operatorname{ſin} b = 2 \operatorname{ſin} \frac{1}{2} b . \operatorname{coſ} \frac{1}{2} b$, ſo entſteht durch die Subſtitution des Werthes von ſin b der erſte angegebene Werth von S, und durch Verwandlung des Unterſchiedes in ein Product nach (28.) der zweyte.

64. Die Summe einer Reihe Coſinus von Winkeln, die in arithmetiſcher Progreſſion ſind, ſey = s, ſo daß $\operatorname{coſ} a + \operatorname{coſ}(a + b) + \operatorname{coſ}(a + 2b) \ldots \ldots + \operatorname{coſ}(a + nb) = s$; es iſt

$$s = \frac{\operatorname{ſin}(a + (n + \frac{1}{2}) b) - \operatorname{ſin}(a - \frac{1}{2} b)}{2 \operatorname{ſin} \frac{1}{2} b},$$

oder

$$s = \frac{\operatorname{coſ}(a + \frac{1}{2} nb) . \operatorname{ſin} \frac{1}{2}(n + 1) b}{\operatorname{ſin} \frac{1}{2} b}.$$

In der Formel (59.)

$$2 \operatorname{ſin} b . \operatorname{coſ}(a + (n - 1) b) = \operatorname{ſin}(a + nb)$$
$$- \operatorname{ſin}(a + (n - 2) b)$$

ſetze man für n nach der Reihe die Werthe, 1, 2, 3, .. n, n + 1, ſo erhält man eine Folge von Gleichungen, deren erſte iſt

$$2 \operatorname{ſin} b . \operatorname{coſ} a = \operatorname{ſin}(a + b) - \operatorname{ſin}(a - b).$$

Die letzte oder (n + 1)te iſt

$$2 \operatorname{ſin} b . \operatorname{coſ}(a + nb) = \operatorname{ſin}(a + (n + 1) b)$$
$$- \operatorname{ſin}(a + (n - 1) b).$$

Werden alle dieſe Gleichungen zuſammen genommen, ſo entſteht die Gleichung,

$$2\,\text{ſin}\,b\,.\,s = \text{ſin}\,(a+nb) + \text{ſin}\,(a+(n+1)b)$$
$$- \text{ſin}\,(a-b) - \text{ſin}\,a.$$

Dieſe verwandelt ſich in

$$\text{ſin}\,b\,.\,s = \text{ſin}\,(a+(n+\tfrac{1}{2})b)\,\text{coſ}\,\tfrac{1}{2}b$$
$$- \text{ſin}\,(a-\tfrac{1}{2}b)\,.\,\text{coſ}\,\tfrac{1}{2}b,$$

woraus ſich durch die Subſtitution von $2\,\text{ſin}\,\tfrac{1}{2}b\,.\,\text{coſ}\,\tfrac{1}{2}b$ für ſin b die angegebene Formel ergiebt.

65. Es iſt $\text{ſin}\,a + \text{ſin}\,2a + \text{ſin}\,3a \ldots\ldots + \text{ſin}\,.\,na = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin}\,.\,na + \tfrac{1}{2}\,(1-\text{coſ}\,na)\,\cot\tfrac{1}{2}a.$

Denn in der erſten Formel (63.) ſetze man $n-1$ ſtatt n, und $b = a$, ſo iſt $S = \dfrac{\text{coſ}\,\tfrac{1}{2}a - \text{coſ}\,(n+\tfrac{1}{2})a}{2\,\text{ſin}\,\tfrac{1}{2}a}$.

Da $\text{coſ}\,(n+\tfrac{1}{2})\,a = \text{coſ}\,na\,.\,\text{coſ}\,\tfrac{1}{2}a - \text{ſin}\,.\,na \times \text{ſin}\,\tfrac{1}{2}a$, und $\dfrac{\text{coſ}.}{\text{ſin}.} = \cot.$ ſo ergiebt ſich ſogleich die aufgeſtellte Formel.

Oder es iſt $2S - \text{ſin}\,na = \dfrac{1-\text{coſ}\,na}{\tan\tfrac{1}{2}a}$:

Dieſen Satz erweiſet Archimedes geometriſch auf eine ſehr einfache Art in dem 1. B. von Kugel und Cylinder, 22. Satz. Man hat nur ſtatt der Chorden bey ihm die doppelten Sinus zu ſetzen.

66. Aus der zweyten Formel in (63.) iſt $\text{ſin}\,a + \text{ſin}\,2a \ldots + \text{ſin}\,na = \dfrac{\text{ſin}\,\tfrac{1}{2}(n+1)a\,.\,\text{ſin}\,\tfrac{1}{2}na}{\text{ſin}\,\tfrac{1}{2}a}$.

Dieſer Satz iſt in dem Artikel, Differenzenrechnung (80.), aus der Theorie ſummatoriſcher Functionen hergeleitet.

67. Es iſt $\text{coſ}\,a + \text{coſ}\,2a + \text{coſ}\,3a \ldots + \text{coſ}\,na = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin}\,.\,na\,.\,\cot\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}(1-\text{coſ}\,na)$.

Der Beweis iſt dem in (66.) geführten ähnlich.

68. Aus der zweyten Formel in (64.) iſt coſ a

$$+ \operatorname{coſ} 2a \ldots + \operatorname{coſ} na = \frac{\operatorname{coſ}(\tfrac{1}{2}(n+1)a) . \sin \tfrac{1}{2} na}{\sin \tfrac{1}{2} a},$$

wie in dem Artikel, Differenzenrechnung (81.).

69. Es ſey der Winkel na zu dem letzten Sinus und Coſinus = 90°, ſo iſt die Summe der Sinus = $\frac{1}{2}(1 + \cot \frac{1}{2} a)$, und die Summe der Coſinus = $\frac{1}{2}(\cot \frac{1}{2} a - 1)$. Addirt man zu der letztern noch den coſ 0° = 1, ſo wird die Summe, coſ 0° + coſ a ... + coſ 90° = $\frac{1}{2}(\cot \frac{1}{2} a + 1)$, gleich der Summe der Sinus, wie es nothwendig iſt.

70. Es ſey na = 180°, ſo iſt die Summe der Sinus = $\cot \frac{1}{2} a$, da coſ na = coſ 180° = − 1 iſt.

Dieſen Satz hat Archimedes a. a. O. 21. S. erwieſen. Kepler ſagt in den Comment. de ſtella Martis, p. 211, daß die Secante und die Tangente von 89° zuſammen genommen der Summe aller Sinus von Grad zu Grad durch den ganzen Halbkreis gleich ſind, und beruft ſich deshalb auf Cardanum de ſubtilitate (vermuthlich Kap. 16.), mit der Anzeige, daß Juſtus Byrgius den Beweis gefunden zu haben verſichere. Es iſt coſec. a + cot a = $\cot \frac{1}{2} a$ (49.). Setzt man a = 1°, ſo iſt coſec. 1° = ſec. 89°, und cot. 1° = tang. 89°.

71. Wenn a ein kleiner Winkel, alſo $\cot \frac{1}{2} a$ eine große Zahl iſt, ſo iſt die Summe, ſin a + ſin 2 a ... ſin. + na zu der Summe ſin a + ſin 2 a .... + $\sin \frac{1}{2}\pi$, oder die Summe der Sinus in dem Bogen na zu der Summe der Sinus in dem Quadranten faſt wie 1 — coſ na : 1. Dieſen Satz gebraucht Kepler in den Comm. de ſtella Martis, p. 274, und hat ihn vermuthlich durch Induction gefunden.

72. Wenn die Summe der Sinus oder Coſinus in einer ohne Ende fortgehenden Reihe verlangt wird, ſo entſteht eine Schwierigkeit, da die Reihe nicht convergirend iſt. Die Sinus der Winkel von π bis 2π; von 3π bis 4π, und überhaupt von (2m + 1)π bis

$(2m + 2)\pi$ ſind negativ. Die Summe der Sinus iſt alſo wechſelsweiſe zunehmend und abnehmend, und in einer beſtändigen Schwankung dieſſeits oder jenſeits einer gewiſſen unveränderlichen Größe, die bloß durch die Winkel a und b beſtimmt wird, und dieſe unveränderliche Größe vertritt bey einer unendlichen Anzahl von Gliedern die Stelle der arithmetiſchen Summe, welche nur bey einer endlichen Anzahl von Gliedern angegeben werden kann. In dem Werthe der Summe der Sinus,

$$S = \frac{\operatorname{coſ}(a - \frac{1}{2}b) - \operatorname{coſ}(a + (n + \frac{1}{2})b)}{2 \operatorname{ſin} \frac{1}{2} b},$$ hängt

der erſte Theil von der Anzahl der Glieder nicht ab. Daher iſt die Summe, $\operatorname{ſin} a + \operatorname{ſin}(a + b) + \operatorname{ſin}(a + 2b)$

$$+ \text{etc. in infin.} = \frac{\operatorname{coſ}(a - \frac{1}{2}b)}{2 \operatorname{ſin} \frac{1}{2} b}.$$

73. Aus demſelben Grunde iſt die Summe, $\operatorname{coſ} a + \operatorname{coſ}(a + b) + \operatorname{coſ}(a + 2b) + \text{etc. in infin.} =$

$$- \frac{\operatorname{ſin}(a - \frac{1}{2}b)}{2 \operatorname{ſin} \frac{1}{2}}.$$

74. Da $2 \operatorname{coſ}(a - \frac{1}{2}b) \cdot \operatorname{ſin} \frac{1}{2} b = \operatorname{ſin} a - \operatorname{ſin}(a - b)$, (27.) ſo iſt

$$\operatorname{ſin} a + \operatorname{ſin}(a + b) + \text{etc. in inf} = \frac{\operatorname{ſin} a - \operatorname{ſin}(a - b)}{4 \operatorname{ſin} \frac{1}{2} b^2}.$$

Da ferner $2 \operatorname{ſin}(a - \frac{1}{2}b) \cdot \operatorname{ſin} \frac{1}{2} b = \operatorname{coſ}(a - b) - \operatorname{coſ} a$, ſo iſt

$$\operatorname{coſ} a + \operatorname{coſ}(a + b) + \text{etc. in inf.} = - \frac{\operatorname{coſ}(a - b) - \operatorname{coſ} a}{4 \operatorname{ſin} \frac{1}{2} b^2}.$$

75. Dieſe Werthe der Summe einer unendlichen Reihe von Sinus oder Coſinus ſtimmen mit denjenigen überein, die man erhält, wenn man mit Euler allgemein Summe einer unendlichen Reihe die analytiſche Formel nennt, aus deren Entwickelung jene Reihe entſteht. Da die Sinus und Coſinus von Winkeln, die in arithmeti-

ſcher Fortſchreitung ſind, eine rücklaufende Reihe ausmachen; ſo läßt ſich eine ſolche Formel finden, die entwickelt die Reihe der Sinus und Coſinus giebt. Nämlich, wenn

$$\frac{p + qz}{1 - \alpha z + z^2} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.}$$

iſt, ſo ſind A, B, C, D, etc. Glieder einer rücklaufenden Reihe, deren Verhältniß-Scale iſt, $+\alpha$; -1, und $p = A$; $q = B - \alpha A$. ſ. rücklaufende Reihe. In unſerm Falle iſt, aus (58. und 60.), $\alpha = 2 \cos b$, und für die Reihe der Sinus, $A = \sin a$; $B = \sin(a + b)$, alſo $p = \sin a$; $q = \sin(a + b) - 2 \sin a . \cos b$.

Setzt man $z = 1$, ſo wird $\frac{p + q}{1 - \alpha + 1}$ die Reihe der Sinus ohne Ende fortgeſetzt. Iſt dieſe $= S$, ſo iſt

$$S = \frac{\sin a + \sin(a + b) - 2 \sin a . \cos b}{2 - 2 \cos b}$$

$$= \frac{\sin a - \sin(a - b)}{4 \sin \frac{1}{2} b^2} = \frac{\cos(a - \frac{1}{2} b)}{2 \sin \frac{1}{2} b}.$$

Für die Reihe der Coſinus iſt $A = \cos a$; $B = \cos(a + b)$; und $p = \cos a$; $q = \cos(a + b) - 2 \cos a . \cos b$. Demnach iſt

$$s = \frac{\cos a + \cos(a + b) - 2 \cos a . \cos b}{2(1 - \cos b)}$$

$$= \frac{\cos a - \cos(a - b)}{4 \sin \frac{1}{2} b^2} = - \frac{\sin(a - \frac{1}{2} b)}{2 \sin \frac{1}{2} b}.$$

76. Die in dem vorhergehenden Paragraphen vorgetragene Aufloſung iſt aus Eulers Introd. in Anal. Inf. T. I. §. 258. ſſ. genommen. Sie ſcheint der Natur dieſer Reihen völlig angemeſſen zu ſeyn. Inzwiſchen hat Daniel Bernoulli doch noch Schwierigkeiten dabey gefunden. Er hat über dieſe Reihen zwey Abhandlungen in den neuen Pe-

tersburger Commentarien, T. XVII. 1772, und T. XVIII. 1774. geliefert. In der zweyten äußert er die Meynung, daß in dem Falle, wenn die Anzahl der Glieder unendlich iſt, etwas verborgen liege, quod omnem ſolutionem pure geometricam eludat, rurſusque ad principia ejus metaphyſica, ſed alio modo, recurrendum eſſe. Eine Abhandlung des Abbé Boſſut in den Mem. de l'Acad. des ſc. 1769. hatte ihn zu dieſen Unterſuchungen veranlaßt. Zugleich hat auch Lexell in den Comm. Acad. Petrop. T. XVIII. über denſelben Gegenſtand ſeine Gedanken vorgetragen. Sein Verfahren iſt im Grunde das Bernoulliſche, hat aber den Anſchein von Willkührlichkeit. Das Reſultat iſt das obige. Euler ſelbſt hat die Sache noch einmal vorgenommen, in den novis Actis Petrop. T. VII. 1789.

Entweder muß man die Summe einer unendlichen Reihe gar nicht beſtimmen wollen, oder eine beſtimmte Gränze ſuchen. Dieſe iſt in unſerm Falle diejenige Größe, von welcher die wirklichen ſucceſſiven Summen wechſelsweiſe in Plus und Minus unterſchieden ſind.

77. Die beiden Formeln in (74.) ſind ſchon in einer andern Abſicht als Summen unendlicher Reihen betrachtet worden, in Differenzenrechnung (64. 65.). Man ſetze irgend einen der Winkel in der arithmetiſchen Progreſſion $= \varphi$; den Unterſchied der Glieder $= \Delta\varphi$, ſo iſt

$\frac{\sin\varphi - \sin(\varphi - \Delta\varphi)}{4\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi^2}$ die Function, deren Differenz $= -\sin\varphi$. Denn man ſetze dieſe Function $= z$, ſo iſt

$$\frac{\sin(\varphi + \Delta\varphi) - \sin\varphi}{4\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi^2} = z + \Delta z,$$

alſo

$$\frac{\sin(\varphi + \Delta\varphi) - 2\sin\varphi + \sin(\varphi - \Delta\varphi)}{4\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi^2} = \Delta z,$$

oder

$$\Delta z = \frac{2\sin\varphi . \cos\Delta\varphi - 2\sin\varphi}{4\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi^2} = -\sin\varphi,$$

und daher iſt die durch z bezeichnete Function die integrirende Function von $-\sin\varphi$, oder $-z$ iſt es von $\sin\varphi$. Dieſe läßt ſich auch, wenn die Reihe der Unterſchieds-Functionen unendlich geſetzt, und dadurch kein letztes Glied angegeben werden kann, als eine Summe betrachten.

Iſt nämlich eine Reihe, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots \psi, \omega$ gegeben, ſo iſt $(\beta - \alpha) + (\gamma - \beta) + (\delta - \gamma) \ldots . + (\omega - \psi) = \omega - \alpha$, oder die Summe der Differenzen negativ genommen gleich $\alpha - \omega$, alſo gleich α zu ſchätzen, wenn ω als ein unendlich entferntes Glied betrachtet wird. Was hier α iſt, iſt die vorher durch z bezeichnete Function von φ, und $\beta - \alpha$ iſt $= -\sin\varphi$.

Eben ſolche Beſchaffenheit hat es mit der Reihe der Coſinus.

78. Die Reihe der Winkel ſey A; $A + 2\alpha$; $A + 4\alpha$; $A + 6\alpha$; etc. Die Anfangsglieder der Differenzreihen ihrer Sinus ſeyn bezeichnet durch $\Delta \sin \alpha$; $\Delta^2 \sin A$; $\Delta^3 \sin A$; u. ſ. f. Die zweyten Glieder derſelben durch $\Delta \sin (A + 2\alpha)$; $\Delta^2 \sin (A + 2\alpha)$; $\Delta^3 \sin (A + 2\alpha)$; etc. Die dritten Glieder durch $\Delta \sin (A + 4\alpha)$; etc. u. ſ. f. für die folgenden Glieder. Es iſt

$$\Delta \sin A = + 2\cos(A + \alpha) . \sin\alpha$$
$$\Delta^2 \sin A = - 4\sin(A - 2\alpha) . \sin\alpha^2$$
$$\Delta^3 \sin A = - 8\cos(A - 3\alpha) . \sin\alpha^3$$
$$\Delta^4 \sin A = + 16\sin(A + 4\alpha) . \sin\alpha^4$$

etc. etc.

Auf gleiche Art iſt

$$\Delta\ \mathrm{coſ}\,A = -\ \ 2\,\mathrm{ſin}\,(A + \alpha)\,.\,\mathrm{ſin}\,\alpha$$
$$\Delta^2\ \mathrm{coſ}\,A = -\ \ 4\,\mathrm{coſ}\,(A + 2\alpha)\,.\,\mathrm{ſin}\,\alpha^2$$
$$\Delta^3\ \mathrm{coſ}\,A = +\ \ 8\,\mathrm{ſin}\,(A + 3\alpha)\,.\,\mathrm{ſin}\,\alpha^3$$
$$\Delta^4\ \mathrm{coſ}\,A = +\,16\,\mathrm{coſ}\,(A + 4\alpha)\,.\,\mathrm{ſin}\,\alpha^4$$

etc. etc.

Denn es iſt $\Delta\,\mathrm{ſin}\,A = \mathrm{ſin}\,(A + 2\alpha) - \mathrm{ſin}\,A = 2\,\mathrm{coſ}\,(A + \alpha)\,.\,\mathrm{ſin}\,\alpha$. Auch $\Delta\,\mathrm{ſin}\,(A + 2\alpha) = \mathrm{ſin}\,(A + 4\alpha) - \mathrm{ſin}\,(A + 2\alpha) = 2\,\mathrm{coſ}\,(A + 3\alpha)\,.\,\mathrm{ſin}\,\alpha$, alſo $\Delta^2\,\mathrm{ſin}\,A = \Delta\,\mathrm{ſin}\,(A + 2\alpha) - \Delta\,\mathrm{ſin}\,A = - 4\,\mathrm{ſin}\,(A + 2\alpha)\,.\,\mathrm{ſin}\,\alpha^2$. Auf gleiche Art werden die beiden erſten Glieder jeder folgenden Differenzreihe, und daraus das Anfangsglied der nächſt folgenden gefunden. Man kann auch die Glieder der Differenzreihen als Glieder einer Hauptreihe betrachten. Die Glieder derſelben Differenzreihe werden aus dem Anfangsgliede ganz leicht durch Vertauſchung von A mit den folgenden Winkeln gefunden.

79. Bey derſelben Progreſſion der Winkel, A, $A + 2\alpha$, $A + 4\alpha$, etc. iſt

$$\Delta\,\mathrm{ſec}\,A = \frac{2\,\mathrm{ſin}\,(A + \alpha)\,.\,\mathrm{ſin}\,\alpha}{\mathrm{coſ}\,A\,.\,\mathrm{coſ}\,(A + 2\alpha)}$$

$$\Delta^2\,\mathrm{ſec}\,A = \frac{(2\,\mathrm{coſ}\,\alpha^2 - \mathrm{coſ}\,(A + 2\alpha)^2)\,.\,4\,\mathrm{ſin}\,\alpha^2}{\mathrm{coſ}\,A\,.\,\mathrm{coſ}\,(A + 2\alpha)\,.\,\mathrm{coſ}\,(A + 4\alpha)}.$$

Denn es iſt $\mathrm{ſec}\,A = \frac{1}{\mathrm{coſ}\,A}$; $\mathrm{ſec}\,(A + 2\alpha) = \frac{1}{\mathrm{coſ}\,(A + 2\alpha)}$, alſo

$$\Delta\,\mathrm{ſec}\,A = \frac{\mathrm{coſ}\,A - \mathrm{coſ}\,(A + 2\alpha)}{\mathrm{coſ}\,A\,.\,\mathrm{coſ}\,(A + 2\alpha)},$$

worin der Zähler $= 2\,\mathrm{ſin}\,(A + \alpha)\,.\,\mathrm{ſin}\,\alpha$ iſt.

Das zweyte Glied der erſten Differenzreihe iſt

$$\Delta \text{ſec}(A+2\alpha) = \frac{2 \sin(A+3\alpha) . \sin\alpha}{\text{coſ}(A+2\alpha) . \text{coſ}(A+4\alpha)}.$$

Dadurch iſt Δ^2 ſec A =

$$\frac{\sin(A+3\alpha) . \text{coſ} A - \sin(A+\alpha) . \text{coſ}(A+4\alpha)}{\text{coſ} A . \text{coſ}(A+2\alpha) . \text{coſ}(A+4\alpha)} \times 2 \sin\alpha.$$

Den Zähler des Bruchs auf die Winkel der Progreſſion und α zu reduciren, bemerke man, daß
$\sin(A+3\alpha) \text{coſ} A = \frac{1}{2} \sin(2A+3\alpha) + \frac{1}{2} \sin 3\alpha$;
$\sin(A+\alpha) . \text{coſ}(A+4\alpha) = \frac{1}{2} \sin(2A+5\alpha) - \frac{1}{2} \sin 3\alpha$;
daß der Unterſchied dieſer beiden Werthe $= \sin 3\alpha - \text{coſ}(2A+4\alpha) . \sin\alpha$, und daß $\sin 3\alpha = (4 \text{coſ}\alpha^2 - 1) \times \sin\alpha$, auch, daß $1 + \text{coſ}(2A+4\alpha) = 2 \text{coſ}(A+2\alpha)^2$ iſt.

80. Bey eben der Progreſſion der Winkel iſt

$$\Delta \text{coſec} A = - \frac{2 \text{coſ}.(A+\alpha) . \sin\alpha}{\sin A . \sin(A+2\alpha)}$$

$$\Delta^2 \text{coſec} A = \frac{(2 \text{coſ}\alpha^2 - \sin(A+2\alpha)^2) . 4 \sin\alpha^2}{\sin A . \sin(A+2\alpha) . \sin(A+4\alpha)}.$$

Man hat nur nöthig, 90° — A ſtatt A, und — α ſtatt + α in den Formeln (79.) zu ſetzen.

81. Die Reihe der Winkel ſey A, A + α, A + 2α, A + 3α; etc. ſo iſt

$$\Delta \text{tang} A = \frac{\sin\alpha}{\text{coſ} A . \text{coſ}(A+\alpha)},$$

$$\Delta^2 \text{tang} A = \frac{2 \text{tang}(A+\alpha) . \sin\alpha^2}{\text{coſ} A . \text{coſ}(A+2\alpha)}.$$

Aus den Werthen von tang (A + α) — tang A, und

tang (A + 2 α) — tang (A + α) wird Δ tang A, und Δ tang (A + α) erhalten. Aus dieſen beiden erſten Gliedern der erſten Differenzreihe folgt Δ^2 tang A, wobey noch tang (A + α) ſtatt des Quotienten von Sinus dividirt durch Coſinus zu ſetzen iſt.

82. Hieraus iſt, wenn A mit 90 — A und + α mit — α vertauſcht wird,

$$\Delta \cot A = - \frac{\sin \alpha}{\sin A . \sin (A + \alpha)}$$

$$\Delta^2 \cot A = + \frac{2 \cot (A + \alpha) . \sin \alpha^2}{\sin A . \sin (A + 2 \alpha)}.$$

83. Die drey Winkel, A, B, C, ſeyn in arithmetiſcher Proportion, ſo iſt

$$\sin B = \tfrac{1}{2} (\sin A + \sin C) + 2 \sin B . \sin \tfrac{1}{2} (B - A)^2$$

$$\cos B = \tfrac{1}{2} (\cos A + \cos C) + 2 \cos B . \sin \tfrac{1}{2} (B - A)^2$$

$$\sec B = \tfrac{1}{2} (\sec A + \sec C) - \sec A . \sec B . \sec C \times$$
$$(4 \cos \tfrac{1}{2} (B - A)^2 - 2 \cos B^2) . \sin \tfrac{1}{2} (B - A)^2$$

oder

$$\sec B = \tfrac{1}{2} (\sec A + \sec C) - \sec A . \sec B . \sec C \times$$
$$(1 + 2 \cos (B - A) - \cos 2 B) . \sin \tfrac{1}{2} (B - A)^2.$$

$$\tan B = \tfrac{1}{2} (\tan A + \tan C) - \frac{\tan B . \sin (B - A)^2}{\cos A . \cos C}.$$

Denn es ſeyn irgend drey Größen, α, β, γ, ihre erſten Unterſchiede, $\Delta \alpha = \beta - \alpha$; $\Delta \beta = \gamma - \beta$, ſo iſt der zweyte Unterſchied $\Delta^2 \alpha = \gamma - 2 \beta + \alpha$; alſo $\beta = \tfrac{1}{2} (\alpha + \gamma) - \tfrac{1}{2} \Delta^2 \alpha$ (Vergl. arithm. Reihen höherer Ordn. 2.). Von dieſem allgemeinen Satze ſind die aufgeſtellten Formeln unmittelbare Anwendungen. In der erſten Formel für die Secante ſind anſtatt der Coſinus im Diviſor die Secanten im Dividendus geſetzt; in der zweyten iſt eine Subſtitution aus (36.) gebraucht.

IV. Formeln für die Sinus und Coſinus der Vielfachen eines Winkels durch die Sinus und Coſinus des einfachen; auch der Tangenten auf gleiche Art.

84. Man ſetze in (58.) den Winkel $a = 0$, $b = \varphi$; $\sin\varphi = y$; $\cos\varphi = x$, ſo iſt

$$\sin . n\varphi = 2\cos\varphi . \sin(n-1)\varphi - \sin(n-2)\varphi.$$

Die Sinus der vielfachen Winkel machen alſo eine rücklaufende Reihe aus, deren Verhältniß-Scale iſt $2\cos\varphi; -1$. Daher iſt

$$\begin{aligned}
\sin\varphi &= y\\
\sin 2\varphi &= 2xy\\
\sin 3\varphi &= 4x^2y - y\\
\sin 4\varphi &= 8x^3y - 4xy\\
\sin 5\varphi &= 16x^4y - 12x^2y + y\\
\sin 6\varphi &= 32x^5y - 32x^3y + 6xy\\
\sin 7\varphi &= 64x^6y - 80x^4y + 24x^2y - y\\
\sin 8\varphi &= 128x^7y - 192x^5y + 80x^3y - 8xy\\
\sin 9\varphi &= 256x^8y - 448x^6y + 240x^4y - 40x^2y + y
\end{aligned}$$

und allgemein

$$\sin . n\varphi = 2^{n-1}x^{n-1}y - (n-2)\,2^{n-3}x^{n-3}y + \frac{n-3.n-4.}{1\;.\;2}2^{n-5}x^{n-5}y - \frac{n-4.n-5.n-6.}{1\;.\;2\;.\;3}2^{n-7}x^{n-7}y + \frac{n-5.n-6.n-7.n-8.}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4}2^{n-9}x^{n-9}y - \text{etc.}$$

85. Um die Formation der Coefficienten in einer verticalen Reihe, oder zu derſelben Stelle gehörigen, zu entdecken, bezeichne man ſie durch A, B, C, D ... Q, R, S, T, etc. und die in der folgenden durch a, b,

c, d, . . . q, r, s t, etc. ſo daß die gleichnamigen Coefficienten in denſelben Stellen ihrer Reihen vom Anfange an ſtehen.

Es iſt

$t = 2s + T; \qquad s = 2r + S;$

$r = 2q + R; \qquad q = 2p + Q;$ u. ſ. f.

alſo $t = 4r + 2S + T = 8q + 4R + 2S + T$
$= 16p + 8Q + 4R + 2S + T$, u. ſ. f.

Iſt T das mte Glied der einen Reihe, und t das mte Glied der folgenden, ſo iſt

$$t = 2^{m-1} A + 2^{m-2} B + 2^{m-3} C \dots$$
$$\dots + 8Q + 4R + 2S + T,$$

da von T bis A m Glieder der Reihe ſind.

Die erſte Reihe der Coefficienten iſt offenbar die geometriſche, 1, 2, 4, 8, ꝛc. In der zweyten Reihe iſt demnach das allgemeine Glied $= m \,.\, 2^{m-1}$, und die Reihe iſt

$$1.1;\ 2.2;\ 3.2^2;\ 4.2^3 \dots m.2^{m-1}; \text{ etc.}$$

Daher iſt das allgemeine Glied der dritten Reihe,

$$t = (1 + 2 + 3 \dots + m)\, 2^{m-1} = \frac{m.\overline{m+1}.}{1.2}\, 2^{m-1},$$

und die Reihe iſt

$$1;\ 3.2;\ 6.2^2;\ 10.2^3 \dots \frac{m.\overline{m+1}.}{1.2}\, 2^{m-1}; \text{ etc.}$$

Nun iſt das allgemeine Glied in der vierten Reihe,

$$t = \left(1 + 3 + 6 + 10 \dots + \frac{m.\overline{m+1}.}{1.2}\right) 2^{m-1}$$
$$= \frac{m.\overline{m+1}.\overline{m+2}.}{1.2.3}\, 2^{m-1}$$ (arithm. Reihen höh. Ordn. 12. 13. oder Binomialcoefficienten, 6.), und die Reihe iſt

$$1;\ 4.2;\ 10.2^2;\ 20.2^3 \ldots;\ \frac{m.m+1.m+2}{1.2.3}.\ 2^{m-1} \text{ etc.}$$

Daraus iſt das allgemeine Glied der fünften Reihe

$$t = \left(1+4+10+20 \ldots \frac{m.m+1.m+2.}{1.2.3}\right) 2^{m-1}$$

$$= \frac{m.m+1.m+2.m+3.}{1.2.3.4}.\ 2^{m-1}.$$

In der erſten Reihe iſt $m = n$; in der zweyten iſt $m = n - 2$; in der dritten $m = n - 4$; in der vierten $m = n - 6$, u. ſ. f. Setzt man dieſe Werthe für m in den gefundenen allgemeinen Ausdrücken, ſo wird die allgemeine Formel für $\sin n\varphi$ erhalten.

86. Wenn n eine ungerade Zahl iſt, ſo läßt ſich $\sin . n\varphi$ durch Potenzen von $\sin\varphi$ oder y allein ohne den $\cos\varphi$ oder x ausdrücken, weil die Potenzen von x alsdann gerade Exponenten haben, und alſo ganze Potenzen von $1 - y^2$ geben. Man ſetze in (58.) den Winkel $a = \varphi$; $b = 2\varphi$, ſo iſt

$$\sin(2n+1)\varphi = 2\cos 2\varphi . \sin(2n-1)\varphi - \sin(2n-3)\varphi,$$

oder, weil $\cos 2\varphi = 1 - 2\sin\varphi^2$ iſt,

$$\sin(2n+1)\varphi = (2 - 4\sin\varphi^2) . \sin(2n-1)\varphi$$
$$- \sin(2n - 3)\varphi.$$

Die Sinus ungerader Vielfachen von φ machen alſo eine rücklaufende Reihe aus, deren Verhältnißſcale iſt $+(2 - 4y^2)$; -1. Demnach iſt

$$\sin\varphi = y$$
$$\sin 3\varphi = 3y - 4y^3$$
$$\sin 5\varphi = 5y - 20y^3 + 16y^5$$
$$\sin 7\varphi = 7y - 56y^3 + 112y^5 - 64y^7$$
$$\sin 9\varphi = 9y - 120y^3 + 432y^5 - 576y^7 + 256y^9$$
$$\sin 11\varphi = 11y - 220y^3 + 1232y^5 - 2816y^7 + 2816y^9$$
$$- 1024y^{11}$$

und allgemein, für ein ungerades n,

$$\sin n\varphi = \frac{n}{1} y - \frac{n.nn-1.}{1.2.3} y^3 +$$

$$\frac{n.nn-1.nn-9.}{1.2.3.4.5} y^5 - \frac{n.nn-1.nn-9.nn-25.}{1.2.3.4.5.6.7} y^7$$

$$\ldots \pm 2^{n-1} y^n.$$

87. Man bezeichne die Coefficienten in einer Verticalreihe, oder diejenigen, welche zu derſelben Potenz von y gehören, durch A, B, C, D, ... P, Q, R, S, T, etc. und die in der nächſtfolgenden durch a, b, c, d ... p, q, r, s, t, etc. ohne Rückſicht auf die Vorzeichen. Die gleichnamigen Coefficienten haben einerley Stellen in ihren Reihen. Es iſt

$$t = 2s - r + 4T; \quad s = 2r - q + 4S;$$
$$r = 2q - p + 4R; \text{ etc.}$$

alſo $t = 3r - 2q + 8S + 4T = 4q - 3p + 12R + 8S + 4T$. Auf dieſe Art wird zuletzt erhalten das mte Glied

$$t = 4(mA + (m-1)B + (m-2)C \ldots\ldots$$
$$\ldots + 3R + 2S + T).$$

In dem Artikel, arithmetiſche Reihen höherer Ordnungen (17.), iſt die Summirung dieſer Reihe gewieſen. Das erſte Glied der erſten Unterſchiede der Reihe A, B, C, D, etc. ſey ΔA; das erſte der zweyten Unterſchiede $= \Delta^2 A$; der dritten $\Delta^3 A$, u. ſ. f. ſo iſt

$$t = 4\left(\frac{m+1.m}{1.2} A + \frac{m+1.m.m-1.}{1.2.3} \Delta A\right.$$
$$\left. + \frac{m+1.m.m-1.m-2.}{1.2.3.4} \Delta^2 A + \text{etc.}\right).$$

Die erſte Reihe der Coefficienten iſt offenbar die der ungeraden Zahlen. Alſo iſt $A = 1$; $\Delta A = 2$; $\Delta^2 A = 0$, etc. und

$$t = 4\left(\frac{m+1\,.\,m}{1\,.\,2}\,.\,1 + \frac{m+1\,.\,m\,.\,m-1\,.}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,2\right)$$

$$= 4\,.\,\frac{m\,.\,m+1\,.\,2m+1\,.}{1\,.\,2\,.\,3}\,.$$

Die zweyte Reihe der Coefficienten iſt alſo

$$4\left(1;\ 5;\ 14;\ 30;\ 55 \ldots \frac{m\,.\,m+1\,.\,2m+1\,.}{1\,.\,2\,.\,3};\ \text{etc.}\right).$$

Dieſe Reihe iſt eine arithmetiſche der dritten Ordnung, in welcher nach Abſonderung des Factors 4, iſt $A = 1$; $\Delta A = 4$; $\Delta^2 A = 5$; $\Delta^3 A = 2$. Folglich iſt für die nachſtfolgende Reihe,

$$t = 16\left(\frac{m+1\,.\,m}{1\,.\,2}\,.\,1 + \frac{m+1\,.\,m\,.\,m-1\,.}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,4 + \frac{m+1\ldots m-2\,.}{1\ldots 4}\,.\,5 + \frac{m+1\ldots m-3\,.}{1\ldots 5}\,.\,2\right).$$

Entwickelt man die Producte, ſo iſt

$$t = 16\,.\,\frac{m\,.\,m+1}{1\,.\,2}\,.\,\frac{2m^3+13m^2+27m+18}{3\,.\,4\,.\,5}.$$

Setzt man in dem Zähler des zweyten Bruchs $m = -2$, ſo wird derſelbe $= 0$; ebenfalls, wenn $m = -3$ geſetzt wird. Dieſer Zähler enthält alſo die Factoren $m + 2$ und $m + 3$; daher auch, wegen der Glieder $2m^3$ und $+ 18$, den Factor $2m + 3$, ſo daß

$$t = 16\,.\,\frac{m\,.\,m+1\,.\,m+2\,.\,m+3\,.\,2m+3\,.}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}.$$

Die dritte Reihe der Coefficienten iſt alſo

$$16\left(1;\ 7;\ 27;\ 77;\ \ldots \frac{m\ldots m+3\,.\,2m+3\,.}{1\ldots 4\,.\,5}\right).$$

Dieſes iſt eine arithmetiſche Reihe der fünften Ordnung. Nach abgeſondertem Factor, 16, iſt $\Delta A = 6$; $\Delta^2 A = 14$; $\Delta^3 A = 16$; $\Delta^4 A = 9$; $\Delta^5 A = 2$. Mittelſt dieſer

Differenzglieder findet man auf dieſelbe Art wie vorher das allgemeine Glied der vierten Verticalreihe. Man erkennt aber ſchon in den allgemeinen Gliedern der drey erſten Reihen das Geſetz der Glieder überhaupt. Es iſt nach der Analogie jener das mte Glied der vierten Verticalreihe

$$= 64 \cdot \frac{m \cdot m+1 \ldots m+5 \cdot 2m+5 \cdot}{1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot \cdot 6 \cdot 7};$$

der fünften Verticalreihe

$$= 256 \cdot \frac{m \cdot m+1 \ldots m+7 \cdot 2m+7 \cdot}{1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot \cdot 8 \cdot 9};$$

u. ſ. f.

Da die Reihen alle auf eine gleichförmige Art jede aus der nächſt vorhergehenden hergeleitet werden, ſo iſt das aus einigen Gliedern erkannte Geſetz der Formation zuverläſſig. Die berechneten Glieder der vierten und fünften Reihe beſtätigen es.

88. Für die erſte Reihe iſt $m = \frac{n+1}{2}$, und $t = \frac{2m-1}{1} = n$. Für die zweyte Reihe iſt

$$m = \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}, \text{ alſo}$$

$$t = \frac{n+1 \cdot n-1 \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n \cdot nn-1 \cdot}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$ Für die dritte iſt $m = \frac{n+1}{2} - 2 = \frac{n-3}{2}$, alſo

$$t = \frac{n-3 \cdot n-1 \cdot n+1 \cdot n+3 \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} =$$

$$\frac{n \cdot nn-1 \cdot nn-9 \cdot}{1 \cdot \cdot \cdot 5}; \text{ u. ſ. w.}$$

89. Man ſetze in (58.) den Winkel $a = 0$, und $b = 2\varphi$, ſo iſt
$\sin 2n\varphi = 2\cos 2\varphi . \sin 2(n-1)\varphi - \sin 2(n-2)\varphi$, oder $\sin 2n\varphi = (2 - 4\sin\varphi^2) . \sin 2(n-1)\varphi - \sin 2(n-2)\varphi$. Die Sinus der geraden Vielfachen von φ machen eine rücklaufende Reihe, deren Verhältniß-Scale iſt $+ 2\cos 2\varphi; -1$, oder $(+2 - 4\sin\varphi^2); -1$, das iſt, $+(2-4yy); -1$. Demnach iſt, wenn $\cos\varphi = x$ geſetzt wird,

$$\sin 2\varphi = 2yx$$
$$\sin 4\varphi = (4y - 8y^3)x$$
$$\sin 6\varphi = (6y - 32y^3 + 32y^5)x$$
$$\sin 8\varphi = (8y - 80y^3 + 192y^5 - 128y^7)x$$
$$\sin 10\varphi = (10y - 160y^3 + 672y^5 - 1024y^7 + 512y^9)x$$

etc. etc.

und allgemein, für ein gerades n,

$$\sin n\varphi = \Big(\frac{n}{1}y - \frac{n.nn-4.}{1.2.3}y^3 + \frac{n.nn-4.nn-16.}{1.2.3.4.5}y^5 + \frac{n.nn-4.nn-16.nn-36.}{1.2.3.4.5.6.7}y^7 \ldots \pm 2^{n-1}y^{n-1}\Big)\sqrt{(1-yy)}.$$

90. Die Herleitung der allgemeinen Formel iſt wie in (87.). Das mte Glied der erſten Verticalreihe iſt $= 2m$; das mte der zweyten iſt $= 4.\frac{m.m+1.2m+4.}{1.2.3}$; das mte der dritten iſt $= 16.\frac{m.m+1.m+2.m+3.2m+8.}{1.2.3.4.5}$; u. ſ. f.

In der erſten Reihe iſt $m = \frac{n}{2}$; in der zweyten iſt $m = \frac{n}{2} - 1$; in der dritten iſt $m = \frac{n}{2} - 2$; u. ſ. f. Setzt man für m dieſe Werthe, ſo wird die allgemeine Formel für $\sin n\varphi$ erhalten.

91. Das letzte Glied in $\sin n\varphi$ iſt das erſte Glied einer Verticalreihe. Für daſſelbe iſt $m = 1$; und der Coefficient iſt für ein ungerades n eine Potenz von 4, deren Exponent die Zahl der Glieder in $\sin n\varphi$ weniger Eins iſt; für ein gerades n eben die Potenz mit 2 multiplicirt. Für ein ungerades n iſt die Anzahl der Glieder $= \frac{n+1}{2}$, alſo iſt jener Coefficient $= 4^{(n-1):2} = 2^{n-1}$. Für ein gerades n iſt die Anzahl der Glieder $= \frac{1}{2} n$, und der Coefficient des letzten Gliedes $= 2 \times 4^{(n-2):2} = 2 \times 2^{n-2} = 2^{n-1}$.

92. In der Formel (84.) ſetze man $2 \cos \varphi = z$, ſo iſt die Scale der Relation $+ z; - 1$; und es iſt

$$\sin \varphi = y$$
$$\sin 2\varphi = zy$$
$$\sin 3\varphi = (z^2 - 1)y$$
$$\sin 4\varphi = (z^3 - 2z)y$$
$$\sin 5\varphi = (z^4 - 3z^2 + 1)y$$
$$\sin 6\varphi = (z^5 - 4z^3 + 3z)y$$
$$\sin 7\varphi = (z^6 - 5z^4 + 6z^2 - 1)y$$
$$\sin 8\varphi = (z^7 - 6z^5 + 10z^3 - 4z)y$$

u. ſ. f.

Die Zuſammenſetzung dieſer Formeln zeigt ſogleich, daß die Coefficienten die figurirten Zahlen ſind, oder daß die zu einer Verticalreihe gehörigen die Binomial-Coeffi-

cienten in derjenigen Stelle ſind, deren Ordnungszahl dieſelbe wie für die Verticalreihe iſt. Es iſt $z = \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi}$.

93. Man ſetze in (60.) den Winkel $a = \varphi$, und $b = \varphi$, ſo iſt $\cos(1+n)\varphi = 2\cos\varphi \,.\, \cos n\varphi - \cos(n-1)\varphi$. Die Coſinus der Vielfachen von φ machen eine rücklaufende Reihe aus, deren Verhältniß-Scale iſt $2\cos\varphi; -1$. Es iſt alſo

$$\begin{array}{lllll}
\cos\varphi = & x & & & \\
\cos 2\varphi = & 2x^2 - & 1 & & \\
\cos 3\varphi = & 4x^3 - & 3x & & \\
\cos 4\varphi = & 8x^4 - & 8x^2 + & 1 & \\
\cos 5\varphi = & 16x^5 - & 20x^3 + & 5x & \\
\cos 6\varphi = & 32x^6 - & 48x^4 + & 18x^2 - 1 & \\
\cos 7\varphi = & 64x^7 - & 112x^5 + & 56x^3 - 7x & \\
\cos 8\varphi = & 128x^8 - & 256x^6 + & 160x^4 - 32x^2 & + 1
\end{array}$$

etc.

Allgemein

$$\cos n\varphi = 2^{n-1}x^n - \frac{n}{1}\,2^{n-3}x^{n-2}$$

$$+ \frac{n \,.\, n-3 \,.}{1 \,.\, 2}\,2^{n-5}x^{n-4} - \frac{n \,.\, n-4 \,.\, n-5 \,.}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\,2^{n-7}x^{n-6}$$

$$+ \frac{n \,.\, n-5 \,.\, n-6 \,.\, n-7 \,.}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}\,2^{n-9}x^{n-8}$$

$-$ etc.

Das letzte Glied iſt $\pm\, n x$ oder ± 1, nachdem n ungerade oder gerade iſt.

Die allgemeine Formel für $\cos n\varphi$ wird aus der für $\sin n\varphi$ in (84.) hergeleitet, vermittelſt der Formel $\sin(n+1)\varphi = \sin n\varphi \,.\, \cos\varphi + \cos n\varphi \,.\, \sin\varphi$ in (24.). Dieſe giebt

$$\text{coſ}\, n\,\varphi = \frac{\text{ſin}\,(n+1)\,\varphi}{\text{ſin}\,\varphi} - \frac{\text{ſin}\, n\,\varphi}{\text{ſin}\,\varphi}\,\text{coſ}\,\varphi.$$

Aus der allgemeinen Formel für ſin n φ in (84) wird der Quotient $\frac{\text{ſin}\, n\,\varphi}{\text{ſin}\,\varphi}$ durch eine nach Potenzen von coſ φ geordnete Reihe gegeben, und eben ſo $\frac{\text{ſin}\,(n+1)\,\varphi}{\text{ſin}\,\varphi}$, wenn daſelbſt n + 1 ſtatt n geſetzt wird. Dieſer letztere Quotient iſt =

$$2^n x^n - (n-1)\, 2^{n-2} x^{n-2} + \frac{n-2\,.\,n-3\,.}{1\,.\,2} 2^{n-4} x^{n-4}$$

$$- \frac{n-3\,.\,n-4\,.\,n-5\,.}{1\,.\,2\,.\,3} 2^{n-6} x^{n-6} + \frac{n-4\,..\,n-7}{1\,..\,4} 2^{n-8} x^{n-8}$$

— etc.

Der zweyte Theil von coſ n φ iſt

$$2^{n-1} x^n - (n-2)\, 2^{n-3} x^{n-2} + \frac{n-3\,.\,n-4\,.}{1\,.\,2} 2^{n-5} x^{n-4}$$

$$- \frac{n-4\,.\,n-5\,.\,n-6\,.}{1\,.\,2\,.\,3} 2^{n-7} x^{n-6} + \frac{n-5\,..\,n-8\,.}{1\,..\,4} 2^{n-9}\,.\,x^{n-8}$$

— etc.

Durchs Abziehen dieſes Theils von dem erſten wird ganz leicht die allgemeine Formel erhalten. Man dividire nur in dem erſten Theile jede Potenz von 2 durch 2, und ſetze dem erſten Factor der Coefficienten 2 als Factor zu.

94^a. Da $1 - \text{coſ}\, 2\,\varphi = 2\,\text{ſin}\,\varphi^2$, alſo $2\,\text{ſin}\, n\,\varphi^2 = 1 - \text{coſ}\, 2\, n\,\varphi$ iſt, ſo wird $\text{ſin}\, n\,\varphi^2$ durch eine nach geraden Potenzen von coſ φ geordnete Reihe erhalten.

94[b]. Für ein ungerades n iſt

$$\pm \sin n\varphi = 2^{n-1} y^n - \frac{n}{1} 2^{n-3} y^{n-2}$$

$$+ \frac{n.n-3.}{1.2} 2^{n-5} y^{n-4} - \frac{n.n-4.n-5.}{1.2.3} 2^{n-7} y^{n-6}$$

$$+ \frac{n.n-5.n-6.n-7.}{1.2.3.4} 2^{n-9} y^{n-8} - \text{etc.}$$

wo das obere Vorzeichen für ein ungerades n von der Form $4m + 1$ gilt.

Die Formel entſteht aus der in (93.), wenn darin $\cos(2n + 1)\varphi$ mit $\pm \sin(2n + 1)(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$ vertauſcht, und dann φ ſtatt $\frac{1}{2}\pi - \varphi$ geſetzt wird, wodurch auch x mit y zu vertauſchen iſt.

Denn es ſey $(2n + 1)\varphi = 2m\pi + \omega$, und ω ſo wie φ kleiner als ein Quadrant. Es iſt

$\cos(2m\pi + \omega) = \cos\omega = + \sin(\frac{1}{2}\pi - \omega)$

$= \pm \sin((n - 2m)\pi + \frac{1}{2}\pi - \omega)$

$= \pm \sin(2n + 1)(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$, wo das obere Vorzeichen für ein gerades n gilt.

Iſt der Überſchuß von $(2n + 1)\varphi$ über ein Vielfaches von vier Rechten ein ſtumpfer Winkel, ſo ſetze man $(2n + 1)\varphi = (2m + 1)\pi - \omega$, wo ω ein ſpitzer Winkel iſt. Es iſt

$\cos((2m + 1)\pi - \omega) = \cos(\pi - \omega)$

$= - \cos\omega = - \sin(\frac{1}{2}\pi + \omega)$

$= \mp \sin((n - 2m)\pi + \frac{1}{2}\pi + \omega)$

$= \pm \sin((n - 2m - 1)\pi + \frac{1}{2}\pi + \omega)$

$= \pm \sin(2n + 1)(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$.

Auf ähnliche Art wird die Vertauſchung erwieſen, wenn $(2n + 1)\varphi = (2m + 1)\pi + \omega$, oder $= 2m\pi - \omega$ iſt, und ω hier ebenfalls einen ſpitzen Winkel bedeutet.

Die Formel des Satzes iſt die in (86.) rückwärts geleſen.

Zweyte Formel für den Sinus und den Coſinus des Vielfachen eines Winkels.

95. Den Sinus und Coſinus des Vielfachen eines Winkels kann man noch auf eine andere Art aus den Sinus und Coſinus des einfachen zuſammen ſetzen, nämlich durch die Zuſetzung des einfachen Winkels, vermittelſt der erſten und dritten Formel in (24.).

Es ſey der einfache Winkel $= \varphi$, deſſen Sinus $= y$; Coſinus $= x$, ſo iſt

I. $\sin 2\varphi = 2yx$; $\cos 2\varphi = x^2 - y^2$.

II. $\sin 3\varphi = \sin 2\varphi \,.\, \cos\varphi + \cos 2\varphi \,.\, \sin\varphi$
$= 3yx^2 - y^3$.
$\cos 3\varphi = \cos 2\varphi \,.\, \cos\varphi - \sin 2\varphi \,.\, \sin\varphi$
$= x^3 - 3xy^2$.

III. $\sin 4\varphi = \sin 3\varphi \,.\, \cos\varphi + \cos 3\varphi \,.\, \sin\varphi$
$= 4yx^3 - 4y^3x$.
$\cos 4\varphi = \cos 3\varphi \,.\, \cos\varphi - \sin 3\varphi \,.\, \sin\varphi$
$= x^4 - 6x^2y^2 + y^4$.

u. ſ. w.

96. Man bemerkt leicht, daß ſich die Sinus und Coſinus der Vielfachen eines Winkels in die Binomial-Coefficienten aus der Potenz, deren Exponent das Vielfache des Winkels iſt, theilen. Es ſey

$$(x + y)^n = x^n + \mathfrak{A}x^{n-1}y + \mathfrak{B}x^{n-2}y^2 + \mathfrak{C}x^{n-3}y^3 + \mathfrak{D}x^{n-4}y^4 + \mathfrak{E}x^{n-5}y^5 + \text{etc.}$$

Man ſetze, zufolge des an den entwickelten Sinus und Coſinus bemerkten Geſetzes, daß allgemein ſey

$$\sin n\varphi = \mathfrak{A}yx^{n-1} - \mathfrak{C}y^3x^{n-3} + \mathfrak{E}y^5x^{n-5} - \mathfrak{G}y^7x^{n-7} + \text{etc.}$$

$$\cos n\varphi = x^n - \mathfrak{B}\,x^{n-2}\,y^2 + \mathfrak{D}\,x^{n-4}\,y^4 - \mathfrak{F}\,x^{n-6}\,y^6 + \mathfrak{H}\,x^{n-8}\,y^8 - \text{etc.}$$

ſo iſt

$$\sin(n+1)\varphi = (1+\mathfrak{A})\,y\,x^n - (\mathfrak{B}+\mathfrak{C})\,y^3\,x^{n-2} + (\mathfrak{D}+\mathfrak{E})\,y^5\,x^{n-4} - (\mathfrak{F}+\mathfrak{G})\,y^7\,x^{n-6} + \text{etc.}$$

$$\cos(n+1)\varphi = x^{n+1} - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\,x^{n-2}\,y^2 + (\mathfrak{C}+\mathfrak{D})\,x^{n-3}\,y^4 - (\mathfrak{E}+\mathfrak{F})\,x^{n-5}\,y^6 + \text{etc.}$$

Nun iſt die Summe zweyer auf einander folgenden Binomial-Coefficienten, des mten und (m + 1)ten, in der nten Potenz, der (m + 1)te Coefficient in der (n + 1)ten Potenz (Binom. Coeff. 5.). Die Coefficienten in den Formeln für ſin (n + 1) φ und coſ (n + 1) φ ſind daher eben ſo die Binomialcoefficienten aus der (n + 1)ten Potenz von (x + y), wie in den Formeln für ſin n φ und coſ n φ aus der nten Potenz des Binomium. Die Vorzeichen wechſeln in jenen Formeln eben ſo ab, wie in dieſen, und die Folge der Exponenten von y und x wird dort wie hier nach demſelben Geſetze beſtimmt. Die Formeln ſind alſo für (n + 1) φ richtig, wenn ſie für n φ gelten. Nun gelten ſie für n = 2; n = 3; n = 4, alſo auch für n = 5; folglich für n = 6, und ſo ferner für alle ganze Zahlen-Werthe von n.

97. Es iſt alſo allgemein für ganze Zahlenwerthe von n,

$$\sin n\varphi = n \sin\varphi \,.\, \cos\varphi^{n-1}$$

$$- \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3} . \sin\varphi^3 . \cos\varphi^{n-3} + \frac{n.n-1..n-4.}{1.2..5} \sin\varphi^3 . \cos\varphi^{n-6}$$

$$- \frac{n.n-1....n-6.}{1.2....7} \sin\varphi^7 . \cos\varphi^{n-7} + \text{etc.}$$

$$\cos n\varphi = \cos\varphi^n - \frac{n.n-1.}{1.2}.\cos\varphi^{n-2}\sin\varphi^2$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4}\cos\varphi^{n-4}.\sin\varphi^4$$
$$- \frac{n.n-1\ldots n-5.}{1.2\ldots 6}\cos\varphi^{n-6}.\sin\varphi^6 + \text{etc.}$$

Dieſe Formeln gelten aber auch für gebrochne Werthe von n, wie nun gezeigt werden wird.

98. Es ſey $\sin\varphi = y$, $\cos\varphi = x$, und die Binomialcoefficienten in der nten Potenz, von dem Coefficienten n an, ſeyn 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, 𝔈, ꝛc. ſo iſt

I. $\frac{1}{2}(x+y)^n - \frac{1}{2}(x-y)^n = \mathfrak{A}x^{n-1}y + \mathfrak{C}x^{n-3}y^3 + \mathfrak{E}x^{n-5}y^5 + \mathfrak{G}x^{n-7}y^7 + \text{etc.}$

II. $\frac{1}{2}(x+y)^n + \frac{1}{2}(x-y)^n = x^n + \mathfrak{B}x^{n-2}y^2 + \mathfrak{D}x^{n-4}y^4 + \mathfrak{F}x^{n-6}y^6 + \mathfrak{H}x^{n-8}y^8 + \text{etc.}$

Dieſe Formeln unterſcheiden ſich von denen für $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$ in (97.) nur in den Vorzeichen der Glieder mit geraden Stellenzahlen.

99. Es iſt

I. $\frac{1}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^n - \frac{1}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1})^n = \sin n\varphi.\sqrt{-1}.$

II. $\frac{1}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^n + \frac{1}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1})^n = \cos n\varphi.$

Denn man ſetze in den Formeln (98.) ſtatt y die unmögliche $y\sqrt{-1}$, ſo iſt

für y^2, y^3, y^4, y^5, y^6, etc.

zu ſetzen $-y^2$, $-y^3\sqrt{-1}$; $+y^4$, $+y^5\sqrt{-1}$, $-y^6$, etc. ſo daß je zwey — — und + + abwechſeln. Dadurch wird der zweyte Theil in (98. I.) der Werth von $\sin n\varphi$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt, der zweyte Theil in II. aber $\cos n\varphi$.

100. Es iſt

III. $(\text{coſ}\,\varphi + \text{ſin}\,\varphi . \sqrt{-1})^n = \text{coſ}\,n\varphi + \text{ſin}\,n\varphi . \sqrt{-1}$.

IV. $(\text{coſ}\,\varphi - \text{ſin}\,\varphi . \sqrt{-1})^n = \text{coſ}\,n\varphi - \text{ſin}\,n\varphi . \sqrt{-1}$.

Dieſe Formeln folgen aus (99.) unmittelbar durch Addition und Subtraction.

101. Es iſt

$$\text{V. } \tfrac{1}{2}(\text{coſ}\,\varphi + \text{ſin}\,\varphi . \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} - \tfrac{1}{2}(\text{coſ}\,\varphi - \text{ſin}\,\varphi . \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$
$$= \text{ſin}\,\frac{m}{n}\varphi . \sqrt{-1}.$$

$$\text{VI. } \tfrac{1}{2}\,\text{coſ}\,\varphi + \text{ſin}\,\varphi . \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} + \tfrac{1}{2}(\text{coſ}\,\varphi - \text{ſin}\,\varphi . \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$
$$= \text{coſ}\,\frac{m}{n}\,\varphi.$$

Denn $\text{coſ}\,m\,\varphi \pm \text{ſin}\,m\varphi . \sqrt{-1} = (\text{coſ}\,\varphi \pm \text{ſin}\,\varphi . \sqrt{-1})^m$ $= (\text{coſ}\,n\,\varphi \pm \text{ſin}\,n\,\varphi)^{\frac{m}{n}}$. Aus den beiden Formeln in dieſer Doppelformel wird durch Subtraction und Diviſion erhalten,

$$2\,\text{ſin}\,m\varphi . \sqrt{-1} = (\text{coſ}\,n\varphi + \text{ſin}\,n\varphi)^{\frac{m}{n}}$$
$$- (\text{coſ}\,n\,\varphi - \text{ſin}\,n\varphi)^{\frac{m}{n}}.$$

$$2\,\text{coſ}\,m\varphi = (\text{coſ}\,n\,\varphi + \text{ſin}\,n\,\varphi)^{\frac{m}{n}}$$
$$+ (\text{coſ}\,n\varphi - \text{ſin}\,n\,\varphi)^{\frac{m}{n}}.$$

Setzt man $\varphi = \frac{\omega}{n}$, und vertauſcht darauf das Symbol ω mit φ, ſo werden die Formeln V. VI. erhalten.

102. Es ſeyn A, B, C, D, ꝛc. die Binomial-Coefficienten für den Exponenten $\frac{m}{n}$, ſo iſt

VII. $\sin \frac{m}{n} \varphi = \mathfrak{A} \sin \varphi . \cos \varphi^{m:n-1}$

$- \mathfrak{C} \sin \varphi^3 . \cos \varphi^{m:n-3} + \mathfrak{E} \sin \varphi^5 . \cos \varphi^{m:n-5}$

$- \mathfrak{G} \sin \varphi^7 . \cos \varphi^{m:n-7} + \text{etc.}$

VIII. $\cos \frac{m}{n} = \cos \varphi^{m:n} - \mathfrak{B} \cos \varphi^{m:n-2} . \sin \varphi^2$

$+ \mathfrak{D} \cos \varphi^{m:n-4} . \sin \varphi^4 - \mathfrak{F} \cos \varphi^{m:n-6} . \sin \varphi^6$

$+ \text{etc.}$

Dieſe Formeln entſtehen vermittelſt Evolution der Wurzelgrößen in V. VI. und Addition der beiden in Reihen aufgelöſeten Wurzeln, in den erſtern Formeln noch durch Diviſion beider Theile durch $\sqrt{-1}$.

103. Es iſt $(\sqrt{(1+y^2)}+y)^n =$

$$1 + ny + \frac{nn}{1.2} y^2 + \frac{n.nn-1.}{1.2.3} y^3$$

$$+ \frac{nn.nn-4.}{1.2.3.4} y^4 + \frac{n.nn-1.nn-9.}{1.2.3.4.5} y^5$$

$$+ \frac{nn.nn-4.nn-16.}{1.2.3.4.5.6} y^6 + \frac{n.nn-1.nn-9.nn-25.}{1.2.3.4.5.6.7} y^7$$

$$+ \text{etc.}$$

und, wenn y negativ genommen wird,

$$(\sqrt{(1+y^2)^2} - y)^n = 1 - ny + \frac{nn}{1.2} y^2$$

$$- \frac{n.nn-1.}{1.2.3} y^3 + \frac{nn.nn-4.}{1.2.3.4} y^4$$

$$- \frac{n.nn-1.nn-9.}{1.2.3.4.5} y^5 + \text{etc.}$$

Dieſe Formeln zu finden, ſetze man $\sqrt{(1+y^2)} = z$, und entwickele nach dem binomiſchen Lehrſatze, ſowohl

$(z+y)$, als die Potenzen von $(1+yy)^{\frac{1}{2}}$, worauf man die Glieder, welche dieſelbe Potenz von y enthalten, zuſammen nimmt. Das Geſetz der Reihe iſt offenbar, und wegen der beſtimmten Formation, ſowohl von $(z+y)^n$ als der Potenzen von $(1+yy)$ allgemein. Euler hat die Formel leichter, aber durch die Differentio-Differentialrechnung erwieſen, in den Inſtitt. Calculi integr. T. I. §. 179.

104. Es iſt

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{(1+y^2)}+y)^n+\tfrac{1}{2}(\sqrt{(1+y^2)}-y)^n$$
$$=1+\frac{nn}{1.2}y^2+\frac{nn.nn-4.}{1.2.3.4}y^4$$
$$+\frac{nn.nn-4.nn-16.}{1.2.3.4.5.6}y^6+\text{etc.}$$

und

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{(1+y^2)}+y)^n-\tfrac{1}{2}(\sqrt{(1+y^2)}-y)^n$$
$$=\frac{n}{1}y+\frac{n.nn-1.}{1.2.3}y^3+\frac{n.nn-1.nn-9.}{1.2.3.4.5}y^5$$
$$+\frac{n.nn-1.nn-9.nn-25.}{1.2.3.4.5.6.7}y^7+\text{etc.}$$

105. Setzt man $y=\sin\varphi.\sqrt{-1}$, ſo iſt $\sqrt{(1+y^2)}=\cos\varphi$, und zufolge (99.),

$$\sin n\varphi=n\sin\varphi-\frac{n.nn-1.}{1.2.3}\sin\varphi^3$$
$$+\frac{n.nn-1.nn-9.}{1.2.3.4.5}\sin\varphi^5-\frac{n.nn-1.nn-9.nn-25.}{1.2.3.4.5.6.7}\sin\varphi^7$$
$$+\text{etc.}$$

$$\cos n\varphi=1-\frac{nn}{1.2}\sin\varphi^2+\frac{nn.nn-4.}{1.2.3.4}\sin\varphi^4$$
$$-\frac{nn.nn-4.nn-16.}{1.2.3.4.5.6}\sin\varphi^6+\frac{nn\ldots nn-36.}{1.2\ldots7.8}\sin\varphi^8$$
$$-\text{etc.}$$

Dieſe Formeln ſind allgemein für jeden Werth von n, da die Formeln in (99.) allgemein gültig ſind. Die erſtere bricht nur für ein ungerades n ab, die zweyte für ein gerades n.

106. Es ſey der Sinusverſus (Querſinus) von $\varphi = z$, ſo iſt

$$\text{ſin verſ. } n\varphi = \frac{2nn}{1.2} z - \frac{4nn.nn-1.}{1.2.3.4} z^2$$
$$+ \frac{8nn.nn-1.nn-4.}{1.2.3.4.5.6} z^3 - \frac{16nn.nn-1.nn-4.nn-9.}{1.2.3.4.5.6.7.8} z^4$$
— etc.

Dieſe, wie es ſcheint, noch nicht bekannte Formel wird erhalten, wenn man den Sinusverſus von φ, oder $1 - \text{coſ}\,\varphi$ in die Formel (97; 102.) für $\text{coſ}\,n\varphi$ einführt. Es iſt $\text{coſ}\,\varphi = 1 - z$; $\text{ſin}\,\varphi^2 = 2z - zz$, und $\text{coſ}\,n\varphi = 1 - \text{ſin verſ. } n\varphi$. Die Rechnung, dieſe Formel zu finden iſt etwas weitläufig; ſie beruht inzwiſchen auf bloßen Multiplicationen und Aggregationen. Die Formel kann zur Berechnung der Sinus über 45° gut angewandt werden.

107. Es ſey $2\,\text{coſ}\,\varphi = u + \frac{1}{u}$, ſo iſt

$$2\,\text{coſ}\,n\varphi = u^n + \frac{1}{u^n}.$$

Denn man ſetze in der Formel III. 100.

$$(\text{coſ}\,\varphi + \text{ſin}\,\varphi.\sqrt{-1})^n = \text{coſ}\,n\varphi + \text{ſin}\,n\varphi.\sqrt{-1},$$

die Wurzel, $\text{coſ}\,\varphi + \text{ſin}\,\varphi.\sqrt{-1} = u$, ſo iſt

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\text{coſ}\,\varphi + \text{ſin}\,\varphi.\sqrt{-1}} = \text{coſ}\,\varphi - \text{ſin}\,\varphi.\sqrt{-1},$$

alſo $2\,\text{coſ}\,\varphi = u + \frac{1}{u}$. Da $u^n = \text{coſ}\,n\varphi + \text{ſin}\,n\varphi.\sqrt{-1}$, ſo iſt

$$\frac{1}{u^n} = \frac{1}{\cos n\varphi + \sin n\varphi . \sqrt{-1}} = \cos n\varphi$$

$- \sin n\varphi . \sqrt{-1}$, alſo iſt $u^n + \frac{1}{u^n} = 2\cos n\varphi$.

108ᵃ. Dieſe beiden Gleichungen ſind einerley mit den beiden,

I. $u^2 - 2\cos\varphi . u + 1 = 0$,

II. $u^{2n} - 2\cos n\varphi . u^n + 1 = 0$.

In dem folgenden Abſchnitte wird gezeigt, daß aus einem gegebenen Werthe von $\cos n\varphi$ erhalten werden n verſchiedene Werthe von $\cos\varphi$. Jeder derſelben kann in der erſtern Gleichung für $\cos\varphi$ geſetzt werden, daher aus der gegebenen Gleichung II. n verſchiedene Gleichungen wie I. folgen. Das Product dieſer n Gleichungen enthält alle Arten, wie aus einem mittelſt ſeines Coſinus gegebenen Winkel $n\varphi$ der Werth von u beſtimmt werden kann. Die Gleichung II. enthält ebenfalls alle dieſe Arten; alſo iſt dieſe Gleichung identiſch mit jenem Producte, oder die Gleichung I. iſt ein Factor von der Gleichung II. — Die Werthe von u ſind alle unmögliche Größen, ſ. unten Abſchnitt VIII.

Zu vergleichen iſt in dem Artikel, Anwendung der Geometrie auf die Algebra, der VII. Abſchnitt, und der Artikel, Coteſiſcher Lehrſatz.

108ᵇ. Wenn man aus der Gleichung, $2x = u + \frac{1}{u}$ ſucceſſiv die Werthe von $u^2 + \frac{1}{u^2}$; von $u^3 + \frac{1}{u^3}$; von $u^4 + \frac{1}{u^4}$, u. ſ. f. herleitet, ſo erhält man nach der Reihe die Werthe von $2\cos 2\varphi$; $2\cos 3\varphi$; $2\cos 4\varphi$, u. ſ. f. in (93.).

Nämlich, da

I. $2x = u + \frac{1}{u}$, ſo iſt

$4x^2 = u^2 + 2 + \frac{1}{u^2}$, alſo

II. $4x^2 - 2 = u^2 + \frac{1}{u^2} = 2 \cos 2 \varphi$.

Hieraus iſt

$8x^3 - 4x = u^3 + u + \frac{1}{u} + \frac{1}{u^3}$, oder

III. $8x^3 - 6x = u^3 + \frac{1}{u^3} = 2 \cos 3 \varphi$.

Hieraus ferner

$16x^4 - 12x^2 = u^4 + u^2 + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^4}$, oder

IV. $16x^4 - 16x^2 + 2 = u^4 + \frac{1}{u^4} = 2 \cos 4 \varphi$.

u. ſ. f.

Es iſt allgemein $\left(u^n + \frac{1}{u^n}\right) \left(u + \frac{1}{u}\right)$ $= u^{n+1} + u^{n-1} + \frac{1}{u^{n-1}} + \frac{1}{u^{n+1}}$, ſo wie $2 \cos n \varphi \times 2 \cos \varphi = 2 \cos (n+1) \varphi + 2 \cos (n-1) \varphi$ iſt.

108ᶜ. Gleichfalls iſt $u - \frac{1}{u} = 2 \sin \varphi . \sqrt{-1}$, und $u^n - \frac{1}{u^n} = 2 \sin n \varphi \sqrt{-1}$. Aus der erſtern Gleichung werden vermittelſt der Formel, $2x = u + \frac{1}{u}$ ſucceſſiv die Werthe von $u^2 - \frac{1}{u^2}$, von $u^3 - \frac{1}{u^3}$, von $u^4 - \frac{1}{u^4}$, u. ſ. f. hergeleitet, woraus dieſelben Werthe von $2 \sin 2 \varphi$, $2 \sin 3 \varphi$, $2 \sin 4 \varphi$, u. ſ. f. folgen, wie in (92.).

Nämlich da

I. $2y\sqrt{-1} = u - u^{-1}$, und

$2x = u + u^{-1}$, ſo iſt

II. $4xy\sqrt{-1} = u^2 - u^{-2}$, das iſt

$4xy\sqrt{-1} = 2\sin 2\varphi . \sqrt{-1}$.

oder $2xy = \sin 2\varphi$.

Aus II. iſt durch die Multiplication mit $2x = u + u^{-1}$,

$8x^2y\sqrt{-1} = u^3 + u - u^{-1} - u^{-3}$, das iſt

III. $8x^2y\sqrt{-1} - 2y\sqrt{-1} = 2\sin 3\varphi . \sqrt{-1}$,

oder $4x^2y - y = \sin 3\varphi$.

u. ſ. f.

Es iſt allgemein $(u^n - u^{-n})(u + u^{-1}) = u^{n+1} + u^{n-1} - u^{-n+1} - u^{-n-1} = 2\sin(n+1)\varphi . \sqrt{-1} + 2\sin(n-1)\varphi . \sqrt{-1}$, eben ſo wie $2\sin n\varphi . 2\cos\varphi = 2\sin(n+1)\varphi + 2\sin(n-1)\varphi$.

Formeln für die Tangenten der Vielfachen eines Winkels, und der aus ungleichen Winkeln zuſammen geſetzten Winkel.

109. Aus den beiden Formeln (97. 102.) für $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$ folgt, mit Anwendung der Zeichen für die Binomial-Coefficienten in der nten Potenz, durch die Diviſion,

$$\tan n\varphi = \frac{\mathfrak{A}\,\mathrm{tg}\,\varphi - \mathfrak{C}\,\mathrm{tg}\,\varphi^3 + \mathfrak{E}\,\mathrm{tg}\,\varphi^5 - \mathfrak{G}\,\mathrm{tg}\,\varphi^7 + \text{etc.}}{1 - \mathfrak{B}\,\mathrm{tg}\,\varphi^2 + \mathfrak{D}\,\mathrm{tg}\,\varphi^4 - \mathfrak{F}\,\mathrm{tg}\,\varphi^6 + \text{etc.}}$$

Es ſind Zähler und Nenner durch $\cos\varphi^n$ dividirt, und für $\frac{\sin}{\cos}$ iſt tang geſetzt.

110. Man ſetze tang $\varphi = t$, ſo iſt

$$\tan \varphi = t$$

$$\tan 2\varphi = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$\tan 3\varphi = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$$

$$\tan 4\varphi = \frac{4t - 4t^3}{1 - 6t^2 + t^4}$$

$$\tan 5\varphi = \frac{5t - 10t^3 + t^5}{1 - 10t^2 + 5t^4}$$

etc.

111. Es ſey irgend eine Anzahl Winkel, α, β, γ, δ, ε, etc. gegeben; ihre Tangenten ſeyn a, b, c, d, e, etc. Die Summe dieſer Tangenten, als Unionen, ſey A; die Summe ihrer Binionen B; ihrer Ternionen C; ihrer Quaternionen D; ihrer Quinionen E, u. ſ. f; ſämtlich ohne Wiederholungen. Es iſt

$$\tan(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \text{etc.}) = \frac{A - C + E - G + \text{etc.}}{1 - B + D - F + H - \text{etc.}}.$$

Denn $\tan(\alpha + \beta) = \frac{a + b}{1 - ab}$, (33.). Dieſe nenne man p, ſo iſt

$$\tan(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{p + c}{1 - pc} = \frac{(1 - ab)p + (1 - ab)c}{1 - ab - (1 - ab)pc}$$

$= \frac{a + b + c - abc}{1 - ab - ac - bc}$. Gebraucht man für die drey Größen a, b, c, die angegebenen Bezeichnungen ihrer Combinationen, ſo iſt $\tan(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{A - C}{1 - B}$.

An

Es ſey $\frac{A - C}{1 - B} = q$, ſo iſt $\tan(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$

$$= \frac{q + d}{1 - qd} = \frac{(1 - B)q + (1 - B)d}{1 - B - (1 - B)qd}$$

$$= \frac{A - C + d - Bd}{1 - B - Ad - Cd}.$$

Hier iſt A + d die Summe der Unionen, a, b, c, d; B + Ad die Summe der Binionen, nämlich B derer ohne d, und Ad derer mit d. Gleichfalls iſt C + Bd die Summe der Ternionen, nämlich C derer ohne d, und Bd derer mit d. Endlich iſt Cd die einzige Quaternion. Erſtreckt man nun die Bezeichnungen, A, B, C, D, auf alle vier Größen, a . . d, ſo iſt

$$\tan(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = \frac{A - C}{1 - B + D}.$$

Es ſey

$\frac{A - C}{1 - B + D} = r$, ſo iſt $\tan(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon)$,

$$= \frac{r + e}{1 - re} = \frac{A - C + (1 - B + D)e}{1 - B + D - (A - C)e}.$$

Hier iſt A + e die Summe der Unionen a ... e; B + Ae der Binionen; C + Be der Ternionen; D + Ce der Quaternionen; De die Quinion. Bezeichnet man dieſe Combinationen aus allen fünf Größen durch A, B, C, D, E, ſo iſt

$$\tan(\alpha \ldots + \varepsilon) = \frac{A - C + E}{1 - B + D}.$$

Hieraus erhellt das Geſetz der Fortſchreitung hinlänglich.

112. Sind alle die einzelnen Winkel ſich gleich, jeder = φ, ſo ſind die einzelnen Unionen = t, Binionen = t^2, Ternionen = t^3, u. ſ. f. Die Mengen derſelben nach ihrer Folge ſind die Binomial-Coefficienten für den Exponenten n, wenn nφ der vielfache Winkel iſt.

— Joh. Bernoulli hat dieſe Sätze gefunden. Operum T. II. nr. CXXVII.

113. Aus (99.) iſt, wenn tang $\varphi = t$ geſetzt wird,

$$\operatorname{tang} n\varphi . \sqrt{-1} = \frac{(1+t\sqrt{-1})^n-(1-t\sqrt{-1})^n}{(1+t\sqrt{-1})^n+(1-t\sqrt{-1})^n},$$

Von einer ſolchen, etwas verſchiedenen Formel kam Bernoulli zuerſt auf den Satz in (109.) Opp. T. I. nr. LXXXIX. Er hat ihn aber noch etwas unbequem ausgedruckt. Für gerade Vielfache iſt eine Unrichtigkeit, da nach ſeiner Regel die Tangente negativ wird.

Wie ſich die gebrochene Function für tang n φ auf eine rationale ganze bringen, und von dieſer das allgemeine mte Glied in einer brauchbaren combinatoriſch-analytiſchen, nach Potenzen von n geordneten Formel, mit Beyhülfe der Bernoulliſchen Zahlen darſtellen laſſe, hat Profeſſor Hindenburg (Leipz. Mag. der Math. S. 270; vergl. Arch. der Math. H. VII. S. 343. 344.) gezeigt.

V. Wie viele verſchiedene Werthe der Sinus und Coſinus des aliquoten Theils eines Winkels erhalten, wenn der Winkel durch ſeinen Sinus oder Coſinus gegeben wird.

114. Ein Winkel der durch ſeinen Sinus oder Coſinus gegeben wird, hat unendlich viele Werthe, (16.17.). Soll derſelbe in n gleiche Theile getheilt werden, ſo iſt jeder ſeiner Werthe in n gleiche Theile zu theilen. Daraus entſtehen inzwiſchen nicht unendlich viele Sinus und Coſinus der aliquoten Theile, weil wiederum derſelbe Sinus und Coſinus eines ſolchen Theils zu unendlich vielen Winkeln gehört.

115. Es ſeyn alle verſchiedene Sinus des nten Theils der zu dem Sinus a gehörigen Winkel anzugeben: der kleinſte dieſer Winkel ſey $= \omega$. Die Anzahl der Theile ſey ungerade, ſo ſind alle folgende Winkel in n Theile zu theilen.

I. $\omega, \pi - \omega. 2\pi + \omega, 3\pi - \omega \ldots (n-1)\pi + \omega; n\pi - \omega.$

II. $(n+1)\pi + \omega \ldots (2n-2)\pi + \omega, (2n-1)\pi - \omega.$

III. $2n\pi + \omega \ldots\ldots 3n\pi - \omega.$

IV. $(3n+1)\pi + \omega \ldots\ldots (4n-1)\pi - \omega.$

u. ſ. f.

Die Sinus des nten Theils jedes Winkels in der dritten und jeder folgenden Claſſe kommen unter den Sinus des nten Theils der beiden erſten Claſſen vor. In der erſten Claſſe ſind die Sinus des nten Theils derer Winkel, die vom Anfange und Ende gleich weit abſtehen, einander gleich und gleichnamig, da die Summe eines ſolchen Paars in I. $= n\pi$, und der nte Theil der Summe zweyer ſolchen Winkel $= \pi$ iſt. In der zweyten Claſſe iſt die Summe je zweyer Winkel, die vom Anfange und Ende gleich weit abſtehen, $= 3n\pi$, und der nte Theil der Summe zweyer ſolcher Winkel $= 3\pi$. Die Sinus dieſer Theile ſind daher auch einander gleich und gleichnamig. Nämlich zwey Winkel wie $\pi + \alpha$ und $2\pi - \alpha$, haben einerley Sinus. Der nte Theil der Winkel in I. iſt kleiner als zwey Rechte, in II. aber größer als zwey und kleiner als vier Rechte. Daher ſind die Sinus des nten Theils von Ang ſin ω in I. poſitiv, in II. negativ.

Die erſte Claſſe liefert $\frac{n+1}{2}$ verſchiedene Sinus, die zweyte $\frac{n-1}{2}$ Sinus.

116. Folglich ſind die Werthe von

$\sin \frac{1}{n}$ Ang. ſin a, für ein ungerades n, folgende:

I. $\sin \frac{\omega}{n}$; $\sin \frac{2\pi + \omega}{n}$; $\sin \frac{4\pi + \omega}{n}$ ....

...., $\sin \frac{(n-1)\pi + \omega}{n}$;

II. $\sin\frac{(n+1)\pi+\omega}{n}\ldots\sin\frac{(2n-2)\pi+\omega}{n}$.

Nimmt man von den ſtumpfen Winkeln ihre Nebenwinkel, von den letzten zuerſt, und ſtatt der Winkel über zwey Rechte ihre Überſchüſſe über zwey Rechte, wogegen aber der Sinus negativ genommen wird, ſo ſind jene Werthe,

$$+\sin\frac{\omega}{n};\ +\sin\frac{\pi-\omega}{n};\ +\sin\frac{2\pi+\omega}{n};$$

$$+\sin\frac{3\pi-\omega}{n};\ldots+\sin\frac{\frac{1}{2}(n-3)\pi\mp\omega}{n};$$

$$+\sin\frac{\frac{1}{2}(n-1)\pi\pm\omega}{n};\qquad -\sin\frac{\pi+\omega}{n};$$

$$-\sin\frac{2\pi-\omega}{2};\ -\sin\frac{3\pi+\omega}{n}\ldots\ldots$$

$$-\sin\frac{\frac{1}{2}(n-3)\pi\pm\omega}{n};\ -\sin\frac{\frac{1}{2}(n-1)\pi\mp\omega}{n}.$$

Das obere Vorzeichen von ω gilt für einen geraden Werth von $\frac{1}{2}(n-1)$; das untere für einen ungeraden.

117. Exempel. Es ſey $A = \mathrm{Ang.}\sin a$, und ω der kleinſte Werth von A, ſo ſind die verſchiedenen Werthe von

$$\sin\frac{A}{3}\ldots+\sin\frac{\omega}{3};\ +\sin\frac{\pi-\omega}{3};\ -\sin\frac{\pi+\omega}{3}$$

$$\sin\frac{A}{5}\ldots+\sin\frac{\omega}{5};\ +\sin\frac{\pi-\omega}{5};\ +\sin\frac{2\pi+\omega}{5}$$

$$-\sin\frac{\pi+\omega}{5};\ -\sin\frac{2\pi-\omega}{5}$$

$$\sin\frac{A}{7}\ldots+\sin\frac{\omega}{7};\ +\sin\frac{\pi-\omega}{7};\ +\sin\frac{2\pi+\omega}{7}$$

$$+\sin\frac{3\pi-\omega}{7}$$

$$-\sin\frac{\pi+\omega}{7};\ -\sin\frac{2\pi-\omega}{7};\ -\sin\frac{3\pi+\omega}{7}$$

118. Der Winkel zu dem Sinus a ſey in eine gerade Anzahl gleicher Theile, n, zu theilen, und ω ſey der kleinſte unter den zu dem Sinus a gehörigen Winkeln. Die beiden erſten Claſſen der zu theilenden Winkel ſind nun folgende.

I. $\omega,\ \pi-\omega,\ 2\pi+\omega;\ 3\pi-\omega\ldots(n-1)\pi-\omega;$

II. $n\pi+\omega,\ (n+1)\pi-\omega\ldots\ldots(2n-1)\pi-\omega.$

Die übrigen Claſſen liefern keine Winkel, deren nter Theil einen Sinus hätte, welcher nicht ſchon dem nten Theile eines der Winkel in I. und II. angehörte. Die Sinus des nten Theils derer Winkel, welche in beiden Claſſen gleich weit vom Anfange abſtehen, ſind ſich gleich aber entgegengeſetzt, weil ihre Winkel um π oder zwey Rechte unterſchieden ſind. Die Sinus des nten Theils jedes der Winkel in jeder der beiden Claſſen ſind alle von einander verſchieden. Die Theilung des Winkels zum ſin a in eine gerade Anzahl Theile, n, giebt alſo n Paare gleicher und entgegengeſetzter Sinus des nten Theils:

$$\pm\sin\frac{\omega}{n};\ \pm\sin\frac{\pi-\omega}{n};\ \pm\sin\frac{2\pi+\omega}{n}\ \ldots\ldots$$

$$\ldots\pm\sin\frac{(\frac{1}{2}n-1)\pi\mp\omega}{n},\ \pm\sin\frac{\frac{1}{2}n\pi\pm\omega}{n};\ \ldots$$

$$\ldots\pm\sin\frac{(n-2)\pi+\omega}{n};\ \pm\sin\frac{(n-1)\pi-\omega}{n}.$$

119. Oder es ſind für ein gerades n die Werthe von $\sin \frac{1}{n}$ Ang. $\sin \omega$ folgende.

$$\pm \sin \frac{\omega}{n};\ \pm \sin \frac{\pi - \omega}{n};\ \pm \sin \frac{\pi + \omega}{n};\ \pm \sin \frac{2\pi - \omega}{n}$$

$$\pm \sin \frac{2\pi + \omega}{n};\ \pm \sin \frac{3\pi - \omega}{n};\ \pm \sin \frac{3\pi + \omega}{n} \ldots$$

$$\ldots\ldots \pm \sin \frac{\frac{1}{2} n \pi - \omega}{n},$$

indem anſtatt der Winkel in der zweyten Hälfte, weil es ſtumpfe ſind, ihre Nebenwinkel genommen ſind, die an der gehörigen Stelle zwiſchen die Winkel der erſtern Hälfte geſetzt worden.

120. Exempel. Es ſey A = Ang. ſin a und ω der kleinſte Werth von A, ſo ſind die verſchiedenen Werthe von

$$\sin \frac{A}{2} \ldots \pm \sin \frac{\omega}{2};\ \pm \sin \frac{\pi - \omega}{2}.$$

$$\sin \frac{A}{4} \ldots \pm \sin \frac{\omega}{4};\ \pm \sin \frac{\pi - \omega}{4};\ \pm \sin \frac{\pi + \omega}{4}$$

$$\pm \sin \frac{2\pi - \omega}{4};$$

$$\sin \frac{A}{6} \ldots \pm \sin \frac{\omega}{6};\ \pm \sin \frac{\pi - \omega}{6};\ \pm \sin \frac{\pi + \omega}{6}$$

$$\pm \sin \frac{2\pi - \omega}{6};\ \pm \sin \frac{2\pi + \omega}{6};\ \pm \sin \frac{3\pi - \omega}{6}.$$

121. Die hier gefundenen Werthe von $\sin \frac{1}{n}$ Ang. ſin a ſind die Wurzeln der Gleichungen in (86. und 89.), wo y der Sinus des einfachen, und

ſin n φ der Sinus des vielfachen iſt. Es iſt daſelbſt n φ was hier ω iſt, alſo φ was hier $\frac{1}{n}$ ω iſt. Die Gleichung in (86.) für ein ungerades Vielfaches von φ ſteigt auf den nten Grad, daher der Sinus des nten Theils eines durch ſeinen Sinus gegebenen Winkels n Werthe hat, wie hier gefunden iſt. Werden alle Glieder auf eine Seite gebracht, ſo daß y^n das Vorzeichen + hat, und werden die fehlenden Glieder durch ± o erſetzt, ſo hat die Gleichung $\frac{1}{2}(n + 1)$ Abwechslungen und $\frac{1}{2}(n - 1)$ gleichnamige Folgen der Vorzeichen, daher $\frac{1}{2}(n + 1)$ poſitive Wurzeln, und $\frac{1}{2}(n - 1)$ negative, indem hier alle Wurzeln möglich ſind, (Gleichung 146.)

Weil das Glied mit der Potenz y^{n-1} fehlt, ſo iſt die Summe der Wurzeln = o, oder die Summe der Sinus in (114.) iſt = o.

Wenn die allgemeine Gleichung (86.) durch 2^{n-1} dividirt wird, ſo iſt in der Gleichung, $y^n \ldots \pm \frac{\sin n\varphi}{2^{n-1}} = 0$, das gegebene Glied das Product aus allen, den Wurzeln entgegengeſetzten Größen, oder von den entgegengeſetzten der Sinus in (116.), wenn n φ = ω iſt. Das obere Vorzeichen gilt für n = 4m — 1, das untere für n = 4m + 1. In jenem Falle iſt die Anzahl der poſitiven Wurzeln = 2m, der negativen = 2m — 1; in dem zweyten iſt jene Anzahl = 2m + 1, die andere = 2m. Daher iſt in dem erſtern Falle das Product der Sinus $= -\frac{\sin n\varphi}{2^{n-1}}$, in dem andern $= +\frac{\sin n\varphi}{2^{n-1}}$.

Bringt man die Gleichung (86.) auf die Form, $\sin n\varphi - ny \ldots \pm 2^{n-1} y^n = 0$, und dividirt darauf alle Glieder durch ſin n φ, ſo iſt der Coefficient von y, die Summe von den entgegengeſetzten der reciproken Wurzeln, oder $\frac{n}{\sin n\varphi}$ iſt die Summe der reciproken Wur-

zeln (zufolge Gleichung, 212.). Oder, nach dem y^n den Coëfficienten + 1 durch die Diviſion der ganzen Gleichung mit 2^{n-1} erhalten hat, iſt der Coefficient von y das Aggregat aller Combinationen der den Wurzeln entgegengeſetzten Größen nach (n — 1), und das gegebene Glied, auf derſelben Seite der Gleichung, das Product aller dieſer Größen. Jener durch dieſes dividirt iſt das Aggregat von den reciproken dieſer Größen. Folglich iſt

$$\frac{n}{\sin n\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi} + \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}+\varphi\right)}$$

$$+ \frac{1}{\sin\left(\frac{4\pi}{n}+\varphi\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{6\pi}{n}+\varphi\right)} \cdots\cdot$$

$$\cdots\cdots\cdots \frac{1}{\sin\left(\frac{2n-2}{n}\pi+\varphi\right)}.$$

Da die Coſecante das reciproke des Sinus iſt (14), ſo iſt

$$n \operatorname{coſec} n\varphi = \operatorname{coſec}\varphi + \operatorname{coſec}\left(\frac{2\pi}{n}+\varphi\right)$$

$$+ \operatorname{coſec}\left(\frac{4\pi}{n}+\varphi\right)\cdots\cdot + \operatorname{coſec}\left(\frac{2n-2}{n}\pi+\varphi\right).$$

Die Winkel über einen Rechten werden wie in (116.) in ſpitze verwandelt, mit gehöriger Veränderung des Vorzeichens, wo es nöthig iſt.

122. Exempel. Es ſey A = Ang. ſin $\frac{1}{2}$, und A ſoll in 5 gleiche Theile getheilt werden, ſo ſind die Sinus dieſes fünften Theils folgende:

+ ſin 6°; + ſin 30°; + ſin 78°; — ſin 42°; — ſin 66°, nämlich

+ 0,1045285	− 0,6691306
+ 0,5000000	− 0,9135454
+ 0,9781476	− 1,5826760
+ 1,5826761	

Die Sinus ſind die Wurzeln der Gleichung

$$16y^5 - 20y^3 + 5y - 0,5 = 0.$$

Ihre Summe iſt wegen des fehlenden zweyten Gliedes = 0, wie eben gefunden iſt. Ihr Product iſt $= \frac{0,5}{16} = \frac{1}{32}$. Es iſt

$$\begin{aligned} l \sin 6° &= 9,0192346 - 10 \\ l \sin 36° &= 9,6989700 - 10 \\ l \sin 78° &= 9,9904044 - 10 \\ l \sin 42° &= 9,8255109 - 10 \\ l \sin 66° &= 9,9607302 - 10 \\ \hline & 8,4948501 - 10 \end{aligned}$$

Complement 1,5051499 = log 32.

Die Coſecanten dieſer Winkel ſind

+ 9,5667722	− 1,4944765
+ 2,0000000	− 1,0946363
+ 1,0223406	− 2,5891128
+ 12,5891128	

Das Aggregat iſt $= + 10 = \frac{5}{0,5}$, als dem Werthe von $\frac{n}{\sin n\varphi}$ für $n = 5$, und $n\varphi = 30°$.

123. Die $2n$ verſchiedenen Werthe von $\sin \frac{1}{n}$ Ang sin a für ein gerades n in (119.) ſind die n Paare der gleichen und entgegengeſetzten Wurzeln y

in der Gleichung (89.), wenn ſie auf beiden Seiten quadrirt iſt, um die Irrationalität wegen des Factors $\sqrt{(1-yy)}$ zu heben. Alsdann ſind in derſelben bloß die geraden Potenzen von y vorhanden, und die höchſte Potenz iſt y^{2n}. Sie hat alſo 2n Wurzeln, welche n Paare gleicher entgegengeſetzter geben, wodurch die Summe aller = 0 iſt, wie das zweyte Glied der Gleichung. Das Product aller Wurzeln iſt $= \frac{\sin n\varphi^2}{2^{2n-2}}$, alſo das Product der poſitiven oder der negativen für ſich allein genommen $= \frac{\sin n\varphi}{2^{n-1}}$, wie für ein gerades n in (121.), was die abſolute Größe betrifft.

124. Wenn ein Winkel, der durch ſeinen Coſinus gegeben iſt, in gleiche Theile getheilt werden ſoll, und der kleinſte zu demſelben gehörige Winkel durch ω bezeichnet wird, ſo ſind alle Winkel, die mit dieſem ein gerades Vielfaches von π (zwey Rechten) ausmachen, oder von ihm um ein ſolches unterſchieden ſind, in n gleiche Theile zu theilen, zufolge 17; alſo die Winkel,

I. $\omega;\ 2\pi-\omega;\ 2\pi+\omega;\ 4\pi-\omega;\ 4\pi+\omega;$
$\ldots (2n-2)\pi+\omega;\ 2n\pi-\omega;$

II. $2n\pi+\omega;\ (2n\pi+2)\pi-\omega;\ \ldots\ 4n\pi-\omega;$

III. $4n\pi+\omega\ \ldots\ldots,\ 6n\pi-\omega;$

u. ſ. f.

Die zweyte Claſſe nebſt allen folgenden giebt bey der Theilung keine Coſinus, die nicht ſchon aus der erſten Claſſe entſtehen. In dieſer Claſſe, welche 2n Winkel enthält, ſind die Coſinus des nten Theils derer Winkel, welche vom Anfange und Ende gleich weit abſtehen, einander gleich und gleichnamig. Nimmt man die Winkel wechſelsweiſe einen um den andern, ſo ſind die verſchiede=

nen Werthe von coſ $\frac{1}{n}$ Ang. coſ a folgende, wenn ω der kleinſte zu coſ a gehörige Winkel iſt.

$$\cos\frac{\omega}{n};\ \cos\frac{2\pi+\omega}{n};\ \cos\frac{4\pi+\omega}{n};\ \cos\frac{6\pi+\omega}{n};$$

$$\ldots\ \cos\frac{(2n-4)\pi+\omega}{n};\ \cos\frac{(2n-2)\pi+\omega}{n},$$

deren Anzahl n iſt.

125. Nimmt man aus der erſten Claſſe die erſten n Winkel, ſo ſind die verſchiedenen Werthe von coſ $\frac{1}{n}$ Ang. coſ a, für ein ungerades n folgende,

$$\cos\frac{\omega}{n};\ \cos\frac{2\pi-\omega}{n};\ \cos\frac{2\pi+\omega}{n};\ \cos\frac{4\pi-\omega}{n};$$

$$\cos\frac{4\pi+\omega}{n}\ \ldots\ \cos\frac{(n-1)\pi-\omega}{n};\ \cos\frac{(n-1)\pi+\omega}{n}.$$

In dieſer Reihe ſind die Winkel von

$\frac{(n+1)\cdot\frac{1}{2}\pi-\omega}{n}$ oder von $\frac{(n+3)\cdot\frac{1}{2}\pi-\omega}{n}$ an größer als $\frac{1}{2}\pi$ oder als ein Rechter, alſo ſind ihre Coſinus negativ. Nimmt man ihre Nebenwinkel, von dem letzten zuerſt, und ſetzt den Coſinus das Zeichen — vor, ſo ſind die verſchiedenen Werthe der Coſinus,

$$+\cos\frac{\omega}{n};\ -\cos\frac{\pi-\omega}{n};\ -\cos\frac{\pi+\omega}{n};\ +\cos\frac{2\pi-\omega}{n};$$

$$+\cos\frac{2\pi-\omega}{n};\ -\cos\frac{3\pi-\omega}{n};\ -\cos\frac{3\pi+\omega}{n};$$

$$\ldots\ \pm\cos\frac{\frac{1}{2}(n-1)\pi-\omega}{n};\ \pm\cos\frac{\frac{1}{2}(n-1)\pi+\omega}{n},$$

wo das obere Vorzeichen gilt, wenn $\frac{1}{2}(n-1)$ gerade, oder $n-1$ durch 4 theilbar iſt.

126. Für ein gerades n iſt die Reihe der verſchiedenen Coſinus,

$$\cos\frac{\omega}{n};\ \cos\frac{2\pi-\omega}{n},\ \cos\frac{2\pi+\omega}{n};\ \cos\frac{4\pi-\omega}{n};$$

$$\cos\frac{4\pi+\omega}{n}\ \ldots,\ \cos\frac{(n-2)\pi+\omega}{n};\ \cos\frac{n\pi-\omega}{n}.$$

In dieſer ſind die Winkel von $\frac{n.\frac{1}{2}\pi+\omega}{n}$, oder von $\frac{(n+2).\frac{1}{2}\pi-\omega}{n}$ an größer als $\frac{1}{2}\pi$, alſo ihre Coſinus negativ. Die Winkel der Coſinus, welche vom Anfange und Ende gleich weit abſtehen, machen die Summe π oder von zwey Rechten; daher ſind ihre Coſinus gleich und entgegengeſetzt. Die Folge der Coſinus iſt

$$\pm\cos\frac{\omega}{n};\ \pm\cos\frac{2\pi-\omega}{n};\ \pm\cos\frac{2\pi+\omega}{n};$$

$$\pm\cos\frac{4\pi-\omega}{n};\ \pm\cos\frac{4\pi+\omega}{n};\ \text{etc.}$$

bis $\frac{1}{2}n$ Paare Coſinus genommen ſind.

127. Exempel. Es ſey $A = \text{Ang.}\cos a$, und ω der kleinſte Werth von $\frac{1}{n}A$, ſo ſind die Werthe von

$$\cos\tfrac{1}{2}A\ \ldots\ldots \pm\cos\frac{\omega}{2}.$$

$$\cos\tfrac{1}{3}A\ \ldots\ldots +\cos\frac{\omega}{3};\ -\cos\frac{\pi-\omega}{3};\ -\cos\frac{\pi+\omega}{3}.$$

$$\cos\tfrac{1}{4}A\ \ldots\ldots \pm\cos\frac{\omega}{4};\ \pm\cos\frac{2\pi-\omega}{4}.$$

$$\cos\tfrac{1}{5}A \ldots + \cos\frac{\omega}{5}; -\cos\frac{\pi-\omega}{5}; -\cos\frac{\pi+\omega}{5};$$
$$+\cos\frac{2\pi-\omega}{5}; +\cos\frac{2\pi+\omega}{5}.$$

$$\cos\tfrac{1}{6}A \ldots \pm\cos\frac{\omega}{6}; \pm\cos\frac{2\pi-\omega}{6}; \pm\cos\frac{2\pi+\omega}{6}.$$

$$\cos\tfrac{1}{7}A \ldots + \cos\frac{\omega}{7}; -\cos\frac{\pi-\omega}{7}; -\cos\frac{\pi+\omega}{7};$$
$$+\cos\frac{2\pi-\omega}{7}; +\cos\frac{2\pi+\omega}{7}; -\cos\frac{3\pi-\omega}{7};$$
$$-\cos\frac{3\pi+\omega}{7}.$$

u. ſ. f.

128. Die Coſinus von $\frac{1}{n}$ Ang. coſ a ſind die Wurzeln der Gleichung in (93.), wenn coſ a = coſ n φ daſelbſt iſt, oder ω = n φ. Für ein ungerades n von der Form 4 m — 1 haben die Vorzeichen (nachdem der coſ n φ auf dieſelbe Seite mit den andern Gliedern gebracht iſt, und die fehlenden Glieder durch ± o erſetzt worden) eine gleichnamige Folge mehr als Abwechslungen, alſo eine negative Wurzel mehr als poſitive; hingegen für ein n von der Form 4 m + 1 iſt eine Abwechslung mehr als gleichnamige Folgen, daher eine poſitive Wurzel mehr als negative. Eben das ergiebt ſich aus den Werthen der Coſinus mit Rückſicht auf ihre Vorzeichen in (127.) Die Gleichungen für ein gerades n haben ½ n Paare gleicher und entgegengeſetzter Wurzeln, übereinſtimmig mit dem, was für die Coſinus bey der Theilung durch ein gerades n gefunden iſt.

Die Summe der Coſinus von $\frac{1}{n}$ Ang. coſ a iſt = o, entweder weil ſie ſich paarweiſe oder im ganzen auf=

heben. Das letzte erhellt daher, weil das zweyte Glied in den Gleichungen (93.) fehlt.

Für ein ungerades n iſt in (93.) das gegebene Glied der allgemeinen Gleichung $= - \cos n\varphi$, nachdem es zu den übrigen auf dieſelbe Seite gebracht iſt. Dividirt man alle Glieder durch 2^{n-1}, ſo iſt $- \frac{\cos n\varphi}{2^{n-1}}$ das Product aller den Wurzeln der Gleichung entgegengeſetzten Größen. Da die Anzahl der negativen Wurzeln gerade iſt, ſo iſt, für ein ungerades n, das Product der Coſinus des nten Theils von Ang. $\cos n\varphi = + \frac{\cos n\varphi}{2^{n-1}}$.

Für $n = 4m$ iſt das Product der Coſinus von $\frac{1}{n}$ Ang. $\cos n\varphi = \frac{1 - \cos n\varphi}{2^{n-1}} = \frac{\sin \frac{1}{2} n\varphi^2}{2^{n-2}}$; für $n = 4m + 2$ iſt das Product $= - \frac{1 + \cos n\varphi}{2^{n-1}}$ $= - \frac{\cos \frac{1}{2} n\varphi^2}{2^{n-2}}$.

Für ein ungerades n werde die Gleichung in (93.) auf die Form, $\cos n\varphi \mp nx \ldots - 2^{n-1} x^n = 0$, gebracht, und darauf durch $\cos n\varphi$ dividirt, ſo iſt $\mp \frac{n}{\cos n\varphi}$ die Summe von den entgegengeſetzten der reciproken Wurzeln, oder $\pm \frac{n}{\cos n\varphi}$ iſt die Summe von den reciproken Coſinus des nten Theils von Ang. $\cos n\varphi$. Das obere Vorzeichen gilt für $n = 4m - 1$. So iſt

$$\pm \frac{n}{\cos n\varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} + \frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{n} + \varphi\right)} + \text{etc.}$$

oder, wenn man für die reciproken Coſinus die Secanten ſetzt, da $\frac{1}{\cos A} = \sec A$ iſt,

$$\pm n \sec n\varphi = \sec\varphi + \sec\left(\frac{2\pi}{n} + \varphi\right)$$

$$+ \sec\left(\frac{4\pi}{n} + \varphi\right) + \sec\left(\frac{6\pi}{n} + \varphi\right)$$

$$+ \text{etc.}$$

oder

$$\pm n \sec n\varphi = \sec\varphi - \sec\left(\frac{\pi}{n} - \varphi\right)$$

$$- \sec\left(\frac{\pi}{n} + \varphi\right) + \sec\left(\frac{2\pi}{n} - \varphi\right)$$

$$+ \sec\left(\frac{2\pi}{n} + \varphi\right) - \text{etc.}$$

bis n Secanten genommen ſind.

Exempel. Für $n\varphi$ oder ω = Ang. ſin $\frac{1}{2}$ und $n = 5$, iſt

ſec 6° = 1,0055083	ſec. 30° = 1,1547005
ſec. 66° = 2,4585933	ſec. 42° = 1,3456327
ſec. 78° = 4,8097343	— 2,5003332
+ 8,2738359	
— 2,5003332	
+ 5,7735027	

Dieſer Unterſchied iſt = 5 ſec. 30°, bis auf 2 in der letzten Stelle.

VI. Chorden der Vielfachen eines Kreisbogens durch die Chorde des einfachen.

129. In dem Halbkreiſe ADB (Fig. 60.), deſſen Mittelpunct C iſt, iſt $\frac{AD}{AB} = \sin ABD = \sin \frac{1}{2} ACD$. Man ſetze $ACD = \omega$, $AB = 2r$, $AD = u$, ſo iſt $\frac{u}{2r} = \sin \frac{1}{2}\omega$, oder $\frac{ch.\omega}{2r} = \sin \frac{1}{2}\omega$. Eben ſo iſt $\frac{ch.n\omega}{2r} = \sin \frac{1}{2} n\omega$.

Die Chorde des Complements des Bogens AD zum Halbkreiſe, oder die Chorde BD ſey $= v$, ſo iſt $\frac{v}{2r} = \cos \frac{1}{2}\omega$, oder $\frac{chc.\omega}{2r} = \cos \frac{1}{2}\omega$, und eben ſo $\frac{chc.n\omega}{2r} = \cos \frac{1}{2} n\omega$.

129*. In den Formeln (84, 86, 89.) ſetze man $\varphi = \frac{1}{2}\omega$, ſo erhält man mittelſt der Vertauſchungen der Chorden mit den Sinus, wenn alle Glieder mit 2r multiplicirt werden,

$$ch.n\omega = \frac{chc.\omega}{r} \times ch.(n-1)\omega - ch.(n-2)\omega,$$

und

$$ch.n\omega = \left(2 - \frac{ch.\omega^2}{rr}\right) ch.(n-2)\omega - ch.(n-4)\omega.$$

In der letzten Formel iſt n ſowohl ſtatt 2n + 1 als 2n in (86, 89.) geſetzt.

130. Man ſetze $r = 1$, ſo verwandeln ſich die allgemeinen Formeln daſelbſt, da $y = \frac{u}{2r}$, und $x = \frac{v}{2r}$ iſt, in folgende:

Da

$$\text{I. } \mathrm{ch}.n\omega = \left(v^{n-1} - \frac{n-2}{1}v^{n-3} + \frac{n-3.n-4.}{1\,.\,2}v^{n-5} - \frac{n-4.n-5.n-6.}{1\,.\,2\,.\,3}v^{n-7} + \text{etc.}\right)u.$$

$$\text{II. } \mathrm{ch}.(2n+1)\omega = (2n+1)\left(u - \frac{n+1.n}{2\,.\,3}u^3 + \frac{n+2.n+1.n.n-1.}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}u^5 - \frac{n+3.n+2\ldots n-2.}{2\,.\,3\ldots 7}u^7 + \frac{n+4\ldots\ldots n-3.}{2\ldots\ldots 9}u^9 - \text{etc.}\right).$$

$$\text{III. } \mathrm{ch}.2n\omega = \left(nu - \frac{n+1.n.n-1.}{1\,.\,2\,.\,3}u^3 + \frac{n+2\ldots n-2.}{1\ldots 5}u^5 - \frac{n+3\ldots\ldots n-3.}{1\ldots\ldots 7}u^7 + \frac{n+4\ldots\ldots n-4.}{1\ldots\ldots 9}u^9 - \text{etc.}\right)\sqrt{(4-uu)}.$$

Die Formel in (93.) verwandelt ſich durch die gebrauchten Subſtitutionen in folgende,

$$\text{IV. } \mathrm{chc}.n\omega = v^n - \frac{n}{1}v^{n-2} + \frac{n.n-3.}{1\,.\,2}v^{n-4} - \frac{n.n-4.n-5.}{1\,.\,2\,.\,3}v^{n-6} + \frac{n.n-5.n-6.n-7.}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}v^{n-8} - \frac{n.n-6\ldots n-9.}{1\,.\,2\ldots 5}v^{n-10} + \text{etc.}$$

Für ein ungerades n iſt durch dieſelben Subſtitutionen aus (94[b].),

$$\text{V.}\ \pm ch.n\omega = u^n - \frac{n}{1} u^{n-2} + \frac{n.n-3.}{1\ .\ 2} u^{n-4}$$

$$- \frac{n.n-4.n-5.}{1\ .\ 2\ .\ 3} u^{n-6} + \frac{n.n-5.n-6.n-7.}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4} u^{n-8}$$

$$- \text{etc.}$$

Es iſt dieſelbe Formel mit II. rückwärts geleſen.

Man ſetze wiederum den Halbmeſſer $= r$, und $ch.2\omega = z$, ſo iſt $2rz = 2vu$, oder $rz = vu$, nach (25.), wenn in Fig. 58. die Chorden AB, AD gleich groß genommen werden. In der Formel I. iſt nun ſtatt v wieder zu ſetzen $\frac{v}{r}$, das iſt, $\frac{z}{u}$. Nimmt man die Chorde des einfachen Bogens u zur Einheit, ſo wird

$$\text{VI.}\ ch.n\omega = z^{n-1} - \frac{n-2.}{1} z^{n-3}$$

$$+ \frac{n-3.n-4.}{1\ .\ 2} z^{n-5} - \frac{n-4.n-5.n-6.}{1\ .\ 2\ .\ 3} z^{n-7}$$

$$+ \text{etc.}$$

131. Wenn das Vielfache von ω der ganze Umkreis oder ein Vielfaches deſſelben iſt, ſo iſt $ch.n\omega = 0$, oder, wenn die geraden und ungeraden Vielfachen in der Bezeichnung unterſchieden werden, $ch.(2n+1)\omega = 0$, und $ch.2n\omega = 0$. Der kleinſte Werth von u in den Gleichungen für u, (nachdem dieſe durch die allen Gliedern gemeinſchaftlichen Factoren dividirt ſind) iſt die Seite eines ordentlichen Vielecks von n Seiten, wenn n überhaupt das Vielfache anzeigt.

Die Gleichungen für u ſind bis zu der für das Zwölfeck, den Halbmeſſer des Kreiſes $r = 1$ geſetzt, folgende:

$n = 3$	$u^2 - 3 = 0$
$n = 5$	$u^4 - 5u^2 + 5 = 0$
$n = 7$	$u^6 - 7u^4 + 14u^2 - 7 = 0$
$n = 9$	$u^8 - 9u^6 + 27u^4 - 30u^2 + 9 = 0$
$n = 11$	$u^{10} - 11u^8 + 44u^6 - 77u^4 + 55u^2 - 11 = 0.$
	etc.
$n = 4$	$u^2 - 2 = 0$
$n = 6$	$u^4 - 4u^2 + 3 = 0$
$n = 8$	$u^6 - 6u^4 + 10u^2 - 4 = 0$
$n = 10$	$u^8 - 8u^6 + 21u^4 - 20u^2 + 5 = 0$
$n = 12$	$u^{10} - 10u^8 + 36u^6 - 56u^4 + 35u^2 - 6 = 0.$
	etc. etc.

132. Die Wurzeln dieſer Gleichungen ſind die Seiten und die Diagonalen des ordentlichen Vielecks, wozu ſie gehören, doch mit Ausſchluß des Durchmeſſers in Vielecken von einer geraden Anzahl Seiten. Dieſe Vieldeutigkeit der Wurzel u hat eben den Grund, welchen die Vieldeutigkeit des Sinus eines Theils von einem Winkel hat, der durch ſeinen Sinus gegeben wird. Die Chorde AB (Fig. 58.) gehört nicht bloß zu dem Bogen AB, ſondern auch auch zu dem Bogen BECDA, dem Complement des AB zum ganzen Umfange, und auch zu der Summe eines dieſer Bogen und eines Vielfachen des Umfanges. Man laſſe den Punct B von A aus ſich auf dem Umfange herum bewegen, und einen Umfang nach dem andern beſchreiben. Die Chorde wächſt von Null an bis zum Durchmeſſer, nimmt darauf ab, wird Null, und erneuert dann in Perioden ohne Ende dieſelben Veränderungen des Wachsthums und Abnehmens. In dem zweyten Umlaufe iſt ſie negativ, weil der Sinus des halben beſchriebenen Bogens negativ iſt. In dem dritten Umlaufe und in jedem von einer ungeraden Ordnungszahl iſt die Chorde poſitiv, ſo wie ſie in jedem Umlaufe von einer geraden

Ordnungszahl negativ iſt, alles zufolge der Formel,
$\frac{\text{chord}.n\omega}{2r} = \sin\frac{1}{2}n\omega.$

133. Soll nun ein Bogen oder Winkel, der durch ſeine Chorde gegeben wird, in n gleiche Theile getheilt werden, ſo müſſen alle zu derſelben gleichnamigen Chorde gehörige Bogen oder Winkel in n Theile getheilt werden. Dadurch werden n verſchiedene Bogen oder Winkel erhalten, eben ſo wie für den Sinus des nten Theils eines Winkels, deſſen Sinus gegeben wird.

134. Die gegebene Chorde ſey = o, ſo ſind wenn P den Umfang des Kreiſes oder die Summe von vier Rechten bedeutet, die zu dieſer Chorde gehörigen Bogen,

I. o, P, 2P, 3P.... (n—2) P, (n—1) P,

II. nP, (n+1)P..... (2n—2)P, (2n—1)P

III. 2nP, (2n+1)P....

etc.

Alle dieſe Bogen ſind in n Theile zu theilen. Die Chorden des nten Theils der zweyten Claſſe ſind den Chorden des nten Theils in der erſten Claſſe gleich aber entgegengeſetzt; die von der dritten Claſſe ſind denen von der erſten gleich und gleichnamig; die von der vierten Claſſe denen von der zweyten und ſo ferner abwechſelnd. Daher hat man die verſchiedenen Chorden nur in den beiden erſten Claſſen auszuſuchen. Die Chorden, deren Bogen zuſammen P ausmachen, ſind nicht verſchieden. Daher ſind für ein ungerades n die verſchiedenen Werthe der Chorde von dem nten Theile des Bogens, deſſen Chorde = o iſt, aus den beiden erſten Claſſen,

$$o, \pm ch.\frac{1}{n}P;\ \pm ch.\frac{2}{n}P;\ \pm ch.\frac{3}{n}P\ .....$$

$$....\pm ch.\frac{n-3}{2n}P \pm ch.\frac{n-1}{2n}P.$$

Für ein gerades n ſind die n verſchiedenen Werthe der Chorden des nten Theils von dem Bogen, deſſen Chorde = o iſt,

$$0, \pm ch. \frac{1}{n} P; \pm ch. \frac{2}{n} P; \pm ch. \frac{3}{n} P \ldots .$$

$$\ldots\ldots \pm ch. \frac{n-2}{2n} P; \; ch. \frac{n}{2n} P.$$

Dieſe Chorden ſind die Diagonalen eines ordentli- chen Vielecks von n Seiten, wenn man nämlich unter Diagonale jede der Linien verſteht, die aus einem Winkel- puncte an alle übrigen Winkelpuncte gezogen werden, alſo auch die beiden jenem Puncte anliegenden Seiten. Die Chorden in der einen Hälfte des Kreiſes ſind die poſitiven Werthe, in der andern Hälfte die negativen; denn die letztern, da ſie als poſitive Chorden nicht wiederholt wer- den können, ſind als Chorden von der Summe ihrer ein- fachen Bogen und des ganzen Umfangs negativ.

135 Die beiden Gleichungen II. III. für die Chor- de u des nten Theils des Bogens zur ch. nω in (130.) enthalten den Factor u. Daher wird ch. nω = o, wenn u = o iſt. Dieſer Factor iſt in den Gleichungen (131.) weggelaſſen. Sie ſteigen daher für ein Vieleck von 2n + 1 Seiten nur auf den 2nten Grad. Für ein ge- rades n wird ch. nω = o, wenn der in dem Werthe von ch. nω enthaltene Factor, $\sqrt{(4 - uu)}$, Null, das iſt, wenn u = 2, dem Durchmeſſer gleich iſt. Dieſer Factor iſt in den Gleichungen für ein gerades n in (131.) weggelaſſen, welche daher nur auf den (2n — 2)ten Grad ſteigen. Jener Factor mag poſitiv oder negativ ſeyn, nur nicht beides zugleich, da er nur einfach vorhan- den iſt, und ſo auch in der Reihe der Chorden für ein ge- rades n der Durchmeſſer.

136. Wird der Halbmeſſer eines Kreiſes = 1 ge- ſetzt, ſo iſt das Product aller n — 1 Diagonalen in ei- nem ordentlichen Vielecke von n Seiten gleich der Zahl n.

Denn für ein gerades n kommt zu dem gegebenen Gliede in den Gleichungen (131.) noch der Durchmeſſer der = 2 iſt.

VII. Formeln für die Potenzen der Sinus und Coſinus eines Winkels ausgedruckt durch die Sinus und Coſinus der Vielfachen jenes Winkels.

137. Man multiplicire in der Formel $2\sin\varphi^2 = 1 - \cos 2\varphi$ aus (36.) beide Theile mit $2\sin\varphi$, und löſe das Product $2\cos 2\varphi \,.\, \sin\varphi$ in die Theile, $\sin 3\varphi - \sin\varphi$ auf, nach (27.) ſo iſt

$$4\sin\varphi^3 = 3\sin\varphi - \sin 3\varphi.$$

In dieſer Formel multiplicire man beide Theile mit $2\sin\varphi$, und löſe die Producte $6\sin\varphi^2$ und $2\sin 3\varphi \,.\, \sin\varphi$ auf, jenes in $3 - 3\cos 2\varphi$, dieſes in $\cos 2\varphi - \cos 4\varphi$, ſo iſt

$$8\sin\varphi^4 = 3 - 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi.$$

So erhält man folgende Formeln:

$$\sin\varphi = \sin\varphi$$
$$2\sin\varphi^2 = 1 - \cos 2\varphi$$
$$4\sin\varphi^3 = 3\sin\varphi - \sin 3\varphi$$
$$8\sin\varphi^4 = 3 - 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi$$
$$16\sin\varphi^5 = 10\sin\varphi - 5\sin 3\varphi + \sin 5\varphi$$
$$32\sin\varphi^6 = 10 - 15\cos 2\varphi + 6\cos 4\varphi - \cos 6\varphi$$
$$64\sin\varphi^7 = 35\sin\varphi - 21\sin 3\varphi + 7\sin 5\varphi - \sin 7\varphi$$
$$128\sin\varphi^8 = 35 - 56\cos 2\varphi + 28\cos 4\varphi - 8\cos 6\varphi + \cos 8\varphi$$

etc.

Man bemerkt leicht das Geſetz der Coefficienten, daß es die Binomial-Coefficienten aus derjenigen Potenz ſind, deren Exponent derſelbe iſt mit dem des Sinus,

in den ungeraden Potenzen bis zu dem erſten der beiden mittelſten ſich gleichen, und in den geraden bis zu dem einzelnen mittelſten halb genommen, mit abwechſelnden Vorzeichen, von dem Sinus oder Coſinus des höchſten Vielfachen an. Die Allgemeinheit des Geſetzes wird auf folgende Art bewieſen.

Es ſey

$$2^{2n-2} \sin \varphi^{2n-1} = A \sin \varphi - B \sin 3\varphi + C \sin 5\varphi - D \sin 7\varphi + \text{etc.}$$

ſo iſt durch Multiplication mit $2 \sin \varphi$ und gehörige Reduction,

$$2^{2n-1} \sin \varphi^{2n} = A - (A+B) \cos 2\varphi + (B+C) \cos 4\varphi - (C+D) \cos 6\varphi + \text{etc.}$$

Ferner

$$2^{2n} \sin \varphi^{2n+1} = (3A+B) \sin \varphi - (A+2B+C) \sin 3\varphi + (B+2C+D) \sin 5\varphi - (C+2D+E) \sin 7\varphi + \text{etc.}$$

Es ſeyn nun in der $(2n-1)$ten Potenz eines Binomium die Coefficienten, von den beiden mittelſten ſich gleichen nach beiden Seiten hin genommen,

$$\ldots\ldots \varepsilon,\ \delta,\ \gamma,\ \beta,\ \alpha,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon \ldots$$

Hieraus werden die Coefficienten in der $2n$ten Potenz, von dem einzelnen mittelſten an, nach der einen oder andern Seite hin,

$$2\alpha;\ \alpha+\beta;\ \beta+\gamma;\ \gamma+\delta;\ \delta+\varepsilon;\ \ldots$$

Aus dieſen entſtehen die Coefficienten der $(2n+1)$ten Potenz, von dem einen der beiden gleichen mittelſten an,

$$3\alpha+\beta;\ \alpha+2\beta+\gamma;\ \beta+2\gamma+\delta;\ \gamma+2\delta+\varepsilon;\ \ldots$$

Hieraus erhellt, daß die Coefficienten in der Potenz, $\sin \varphi^{2n}$, eben ſo aus denen in der Potenz, $\sin \varphi^{2n-1}$, gebildet werden, wie die Binomialcoefficienten in der $2n$ten Potenz aus denen in der $(2n-1)$ten, von demjenigen an, der die eine Hälfte ſchließt, außer daß A nicht doppelt

genommen wird, wie der Coefficient α aus der $(2n-1)$ten Potenz. Die Coefficienten in der $(2n+1)$ten Potenz des $\sin\varphi$ entſtehen aber ganz ſo aus denen in der $(2n-1)$ten Potenz, wie die Binomial-Coefficienten in denſelben Potenzen auseinander entſtehen. Das Geſetz, welches nun für die berechneten Coefficienten gefunden iſt, bis zu der 7ten und 8ten Potenz des $\sin\varphi$, gilt daher auch für die 9te und 10te Potenz, dadurch auch für die 11te und 12te, u. ſ. f.

Zugleich erhellt, wie die geraden Potenzen durch Coſinus, die ungeraden durch Sinus der Vielfachen, jene der geraden, dieſe der ungeraden, entwickelt werden, und wie die Potenzen der 2 mit denen der Sinus fortſchreiten.

139. In der Formel,

$$2^{2n-2}\sin\varphi^{2n-1} = A\sin\varphi - B\sin 3\varphi + C\sin 5\varphi - D\sin 7\varphi + E\sin 9\varphi - \text{etc.}$$

iſt $A = \frac{2n-1 \, . \, 2n-2 \ldots n+1.}{1 \, . \, 2 \ldots n-1.}$, da A der $(n-1)$te Binomial-Coefficient in der $(2n-1)$ten Potenz iſt, den Coefficienten $2n-1$ des zweyten Gliedes für den erſten genommenen. Dieſe Potenz hat $2n$ Glieder, von welchen das $n$te und $(n+1)$te einerley Coefficienten haben. Ferner $B = \frac{n-1}{n+1} A$; $C = \frac{n-2}{n+2} B$; $D = \frac{n-3}{n+3} C$, $E = \frac{n-4}{n+4} D$, u. ſ. f. (Binomial-Coefficienten, 8.). Man dividire beide Theile der Formel durch 2^{n-2}, und ſetze

$$\sin\varphi^{2n-1} = P\sin\varphi - Q\sin 3\varphi + R\sin 5\varphi - S\sin 7\varphi + T\sin 9\varphi - \text{etc.}$$

ſo bleibt $Q = \frac{n-1}{n+1} P$; $R = \frac{n-2}{n+2} Q$;

$S = \frac{n-3}{n+3} R$; $T = \frac{n-4}{n+4} S$, u. ſ. f.

Nun iſt $2n \,.\, 2n - 1 \ldots\ldots n + 2 \,.\, n + 1 \,. = 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots\ldots 2n - 1 \,.\, 2^n$ (Facultät, numeriſche, 7. oder Binomial-Coeff. 12.), alſo iſt

$$A = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots 2n - 1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\, 2 - 1} \,.\, \frac{2^n}{2n} = \tfrac{1}{2} \,.\, \frac{2 \,.\, 6 \,.\, 10 \ldots 4n - 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\, n}.$$

und $P = \dfrac{1}{2^{n2-1}} : \dfrac{2 \,.\, 6 \,.\, 10 \ldots 4n - 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\, n}$

140. In der Formel,

$$2^{2n-1} \sin \varphi^{2n} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A} - \mathfrak{B} \cos 2\varphi + \mathfrak{C} \cos 4\varphi - \mathfrak{D} \cos 6\varphi + \mathfrak{E} \cos 8\varphi - \text{etc.}$$

iſt $\mathfrak{A} = \dfrac{2n \,.\, 2n - 1 \ldots n + 1}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots n}$, da $\mathfrak{A}$ der nte Binomial-Coefficient in der 2nten Potenz iſt. Ferner

$\mathfrak{B} = \dfrac{n}{n+1}\mathfrak{A}$; $\mathfrak{C} = \dfrac{n-1}{n+2}\mathfrak{B}$; $\mathfrak{D} = \dfrac{n-2}{n+3}\mathfrak{C}$;

$\mathfrak{E} = \dfrac{n-3}{n+4}\mathfrak{D}$, u. ſ. f.

Man dividire beide Theile der Formel durch 2^{2n-1}, und ſetze

$$\sin \varphi^{2n} = \mathfrak{P} - \mathfrak{Q} \cos 2\varphi + \mathfrak{R} \cos 4\varphi - \mathfrak{S} \cos 6\varphi + \mathfrak{T} \cos 8\varphi - \text{etc.}$$

ſo iſt $\mathfrak{P} = \tfrac{1}{2} \,.\, \dfrac{\mathfrak{A}}{2^{2n-1}}$; $\mathfrak{Q} = \dfrac{\mathfrak{B}}{2^{2n-1}}$ u. ſ. f.

alſo $\mathfrak{Q} = \dfrac{2n}{n+1}\mathfrak{P}$; $\mathfrak{R} = \dfrac{n-1}{n+2}\mathfrak{Q}$; $\mathfrak{S} = \dfrac{n-2}{n+3}\mathfrak{R}$;

$\mathfrak{T} = \dfrac{n-3}{n+4}\mathfrak{S}$; u. ſ. f.

Durch die in (139.) gebrauchte Subſtitution iſt

$$\mathfrak{A} = \frac{1.3.5..2n-1.}{1.2.3...n} . 2^n = \frac{2.6.10..4n-2.}{1.2.3..\ n},$$

alſo $\mathfrak{P} = \frac{1}{2^{2n}} . \frac{2.6.10...4n-2.}{1.2.3...\ n}$.

141. Auf gleiche Art werden die Werthe der Potenzen des Coſinus eines Winkels durch die Coſinus der Vielfachen ausgedruckt, und zwar die geraden ſowohl als die ungeraden bloß durch dieſe Coſinus.

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &= \cos\varphi \\
2\cos\varphi^2 &= 1 + \cos 2\varphi \\
4\cos\varphi^3 &= 3\cos\varphi + \cos 3\varphi \\
8\cos\varphi^4 &= 3 + 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi \\
16\cos\varphi^5 &= 10\cos\varphi + 5\cos 3\varphi + \cos 5\varphi \\
32\cos\varphi^6 &= 10 + 15\cos 2\varphi + 6\cos 4\varphi + \cos 6\varphi \\
64\cos\varphi^7 &= 35 + 21\cos 3\varphi + 7\cos 5\varphi + \cos 7\varphi \\
128\cos\varphi^8 &= 35 + 56\cos 2\varphi + 28\, c 4\varphi + c 8\, c 6\varphi \\
&\quad + \cos 8\varphi.
\end{aligned}$$

etc.

Das Geſetz der Coefficienten iſt ganz daſſelbe, wie für die Potenzen des Sinus, und wird auf gleiche Art erwieſen. Es kommen hier bloß Coſinus der Vielfachen vor, weil das Product zweyer Coſinus in zwey Coſinus zerlegt wird, nach (27.). Das Product $2\cos n\varphi . \cos\varphi$ iſt $= \cos(n-1)\varphi + \cos(n+1)\varphi$. Auch ſind die Vorzeichen der Glieder durchgängig $+$.

142. Die Formeln für die Potenzen der Sinus und Coſinus ſind erforderlich zur Integration ſolcher Differentiale, die dieſe Potenzen enthalten. Auch für praktiſche Rechnungen iſt es bequem, Potenzen der Sinus und Coſinus durch die Sinus und Coſinus der Vielfachen ihrer Winkel auszudrucken. In der Aſtronomie kommt dies häufig vor.

143. Ähnliche Formeln werden für Potenzen der Sinus und Coſinus mit negativen Exponenten gefunden. Es iſt

$$\frac{1}{\sin\varphi} = 2(\sin\varphi + \sin 3\varphi + \sin 5\varphi + \sin 7\varphi + \text{etc})$$

$$\frac{1}{\sin\varphi^2} = -4(\cos 2\varphi + 2\cos 4\varphi + 3\cos 6\varphi + 4\cos 8\varphi + 5\cos 10\varphi + \text{etc.})$$

$$\frac{1}{\sin\varphi^3} = -8(\sin 3\varphi + 3\sin 5\varphi + 6\sin 7\varphi + 10\sin 9\varphi + 15\sin 11\varphi + \text{etc.})$$

$$\frac{1}{\sin\varphi^4} = +16(\cos 4\varphi + 4\cos 6\varphi + 10\cos 8\varphi + 20\cos 10\varphi + 35\cos 12\varphi + \text{etc.})$$

etc.

144. Die erſte Formel fließt aus der in (72.) gefundenen Summe einer unendlichen Reihe Sinus, wenn daſelbſt $a = \varphi$; $b = 2\varphi$ geſetzt wird. Die Reihe für $\frac{1}{\sin\varphi^2}$ muß ſo beſchaffen ſeyn, daß ſie mit $\sin\varphi$ multiplicirt die erſte Reihe gebe. Darum muß ſie bloß die Coſinus der geraden Vielfachen von φ enthalten, da $\cos 2m\varphi . \sin\varphi = \frac{1}{2}\sin(2m+1)\varphi - \frac{1}{2}\sin(2m-1)\varphi$ iſt. Sie muß mit $\cos 2\varphi$ anfangen, da $\cos 2\varphi . \sin\varphi = \frac{1}{2}(\sin 3\varphi - \sin\varphi)$ iſt, alſo dadurch das Glied $\sin\varphi$ in der erſten Reihe hervorgebracht wird, ohne daß es nöthig iſt, noch $\cos 0\varphi$ oder 1 zu Hülfe zu nehmen. Die dritte Reihe muß die Sinus der ungeraden Vielfachen von $\sin 3\varphi$ an enthalten, damit daraus, durch die Multiplication mit $\sin\varphi$ die zweyte Reihe erhalten werde, indem $\sin(2n+1)\varphi . \sin\varphi = \frac{1}{2}(\cos 2n\varphi - \cos(2n+2)\varphi)$ iſt. Da $\sin 3\varphi . \sin\varphi = \frac{1}{2}(\cos 2\varphi - \cos 4\varphi)$ iſt, ſo braucht die Reihe erſt mit $\sin 3\varphi$ anzufangen. So iſt es auch mit den Formen der folgenden Reihen beſchaffen.

145. Man ſetze für ein ungerades n

$$\sin\varphi^{-n} = \pm 2^n (\sin n\varphi + A \sin (n+2)\varphi + B \sin (n+4)\varphi + C \sin (n+6)\varphi + D \sin (n+8)\varphi + \text{etc.})$$

Der Factor 2^n iſt beygefügt, weil bey der Multiplication der Reihe durch $\sin\varphi$, und Zerlegung der Producte in zwey Coſinus, die Reihe zugleich den Factor $\frac{1}{2}$ erhält. Multiplicirt man nun die hierdurch entſtandene Reihe für $\sin\varphi^{-n+1}$ wieder mit $\sin\varphi$, und zerlegt die Producte der Sinus und Coſinus in zwey Sinus, ſo entſteht wieder der Factor $\frac{1}{2}$, und ſo ferner bey jeder Multiplication. Da die erſte Reihe, die für $\sin\varphi$, den Factor 2 hat, ſo muß die nte Reihe, die für $\sin n\varphi^{-1}$, den Factor 2^n haben.

Man multiplicire die angenommene Reihe mit $\sin\varphi$, ſo wird durch die Zerlegung der Producte,

$$\sin\varphi^{-n+1} = \pm 2^{n-1} (\cos(n-1)\varphi + (A-1)\cos(n+1)\varphi + (B-A)\cos(n+3)\varphi + (C-B)\cos(n+5)\varphi + (D-C)\cos(n+7)\varphi + \text{etc.}).$$

Die Coefficienten dieſer Reihe, den Factor 2^{n-1} abgeſondert, ſind die Differenzen von denen in der Reihe für $\sin\varphi^{-n}$. Man ſetze

$$\sin\varphi^{-n+1} = \pm 2^{n-1} (\cos(n-1)\varphi + \mathfrak{A}\cos(n+1)\varphi + \mathfrak{B}\cos(n+3)\varphi + \mathfrak{C}\cos(n+5)\varphi + \mathfrak{D}\cos(n+7)\varphi + \text{etc.}),$$

ſo iſt

$$\sin\varphi^{-n+2} = \mp 2^{n-2} (\sin(n-2)\varphi + (\mathfrak{A}-1)\sin n\varphi + (\mathfrak{B}-\mathfrak{A})\sin(n+2)\varphi + (\mathfrak{C}-\mathfrak{B})\sin(n+4)\varphi + \text{etc.}$$

Dieſe Reihe, nach Abſonderung des Factors 2^{n-2}, hat zu Coefficienten die Differenzen von denen in der Reihe für $\sin\varphi^{-n+1}$. So erhellt, daß die Coefficienten in jeder

vorhergehenden Reihe die Differenzen derer in der nächſt höhern oder folgenden ſind. Da der erſte Coefficient derſelbe, nämlich 1 iſt, ſo iſt der mte in einer Reihe die Summe von m Coefficienten der nächſt niedrigern, vom Anfange an. Dadurch wird jede folgende Reihe aus der vorhergehenden leicht berechnet. Es iſt in irgend einer Reihe, 1, a, b, c, d ... p, q, r, das Glied r die Summe aller Glieder der Differenzreihe,

$1;\ a-1;\ b-a;\ c-b;\ d-c, \ldots q-p;\ r-q,$

deren Anzahl der Stellenzahl von r gleich iſt.

146. Die Coefficienten in den Reihen, ohne die Potenz von 2, ſind die Binomial-Coefficienten in $(1-z)^{-n}$. In dieſer Potenz iſt der Unterſchied des mten und $(m+1)$ten Coefficienten gleich dem $(m+1)$ten Coefficienten in $(1-z)^{-n+1}$, der abſoluten Quantität nach. Denn es iſt, wenn n als der erſte gezählt wird,

der mte Coefficient $= \dfrac{n.n+1 \ldots . n+m-1.}{1\ .\ 2 \ldots\ m}$;

der $(m+1)$te $= \dfrac{n.n+1 \ldots . n+m.}{1\ .\ 2 \ldots\ m+1.}$;

der Unterſchied $= \dfrac{n-1.n \ldots . n+m-1.}{1\ .\ 2 \ldots\ m+1.}$,

welches der $(m+1)$te Coefficient in $(1-z)^{-n+1}$ iſt. (S. Binom. Coeffic. 5. wo nur der zweyte Theil des Binomium additiv geſetzt iſt). Der Unterſchied des erſten Coefficienten n und des Anfangsgliedes, 1, iſt der erſte Coefficient, $n-1$, in $(1-z)^{-n+1}$. Solchergeſtalt iſt die Reihe der Coefficienten in jeder vorhergehenden Potenz die Differenzreihe der folgenden; und die letzte Differenzreihe iſt die in der Potenz $(1-z)^{-1}$, das iſt,

$$1+z+z^2+z^3+z^4+\text{etc.}$$

Die Coefficienten in dieſer Reihe ſind dieſelben mit denen in der Reihe für $\dfrac{1}{\sin\varphi}$, den Factor 2 abgeſondert.

Dadurch kommen die Coeſſicienten in allen folgenden Reihen für die reciproken Potenzen von $\sin\varphi$, ohne die Potenz von 2, mit jenen Binomialcoeſſicienten überein.

147. Auf gleiche Weiſe iſt

$$\frac{1}{\cos\varphi} = 2(\cos\varphi - \cos 3\varphi + \cos 5\varphi - \cos 7\varphi + \text{etc.})$$

$$\frac{1}{\cos\varphi^2} = 4(\cos 2\varphi - 2\cos 4\varphi + 3\cos 6\varphi - 4\cos 8\varphi + \text{etc.})$$

$$\frac{1}{\cos\varphi^3} = 8(\cos 3\varphi - 3\cos 5\varphi + 6\cos 7\varphi - 10\cos 9\varphi + \text{etc.})$$

$$\frac{1}{\cos\varphi^4} = 16(\cos 4\varphi - 4\cos 6\varphi + 10\cos 8\varphi - 20\cos 10\varphi + \text{etc.})$$

etc.

Der Beweis iſt derſelbe wie für die Potenzen der Sinus. Die Coeſſicienten ſind, ohne die Potenzen der 2, die Coeſſicienten in $(1+z)^{-n}$.

148. Wenn $\varphi = 90°$, ſo iſt $\sin\varphi = 1$, und $\sin(4n-1).90° = -1$; $\sin(4n+1).90° = +1$; $\cos(4n-2).90° = -1$; $\cos 4n.90° = +1$; und der Werth von $\frac{1}{\sin\varphi^n}$ iſt $= 2^n(1+1)^{-n} = 1$.

Iſt $\varphi = 0$, ſo iſt $\cos\varphi = +1$, und es iſt $\frac{1}{\cos\varphi^n} = 2^n(1+1)^{-n} = 1$.

VIII. Analogie der Theilung eines Kreisſectors und eines hyperboliſchen Sectors.

149. Die gleichſeitige Hyperbel hat eine beſondere Ähnlichkeit mit dem Kreiſe durch ihre Gleichung. Wenn a die halbe Axe dieſer Hyperbel iſt, und die Abſciſſe von dem Mittelpuncte aus genommen $= x$, die Ordinate $= y$, ſo iſt ihre Gleichung, $aa = xx - yy$, da für den Kreis die Gleichung iſt $aa = xx + yy$, wenn der Halbmeſſer $= a$ iſt, und die Abſciſſen von dem Mittelpuncte aus genommen werden. Die Ordinaten der Hyperbel ſind unmöglich, wenn die Abſciſſe kleiner als a iſt, und die Ordinaten des Kreiſes ſind unmöglich, wenn die Abſciſſe größer als a iſt. Dennoch kann man die Gleichung zwiſchen einer der Coordinaten an der Hyperbel und dem zugehörigen Sector auch auf den Kreis übertragen, nur daß unmögliche Formen hineinkommen. Die Formeln für die Vervielfachung der Sectoren mittelſt der Coordinaten an einem einfachen ſind für beide Linien entweder ganz dieſelben, oder nur in den Vorzeichen verſchieden.

150. Wenn ein Winkel durch ſeinen Kreisbogen φ, für den Halbmeſſer als Einheit, ausgedruckt wird, ſo iſt der zugehörige Kreisſector $= \frac{1}{2}\varphi$. Alle die obigen Formeln für die Vervielfachung und Theilung eines Winkels gelten auch für die Kreisſectoren, wenn man unter φ den doppelten Sector verſteht.

151. Es ſey (Fig. 61.) CX die Axe einer gleichſeitigen Hyperbel, wovon AMN ein Zweig iſt; C iſt der Mittelpunct, A der Scheitel, $CP = x$ eine Abſciſſe, $PM = y$ eine Ordinate, und $CA = a$. Es iſt der Sector $ACM = \frac{1}{2} aa \log nat \frac{x+y}{a}$, ſ. Quadratur.

152. Nun ſey $a = 1$, und Sector $ACM = \frac{1}{2}\omega$ (zur Beobachtung der Ähnlichkeit mit dem Kreiſe), ſo iſt

$\omega = \log \text{nat} (x + y)$, und auch $\omega = \log \text{nat} \frac{1}{x-y}$.
Denn es iſt für die Hyperbel, $xx - yy = 1$, oder $(x + y)(x - y) = 1$, alſo $x + y = \frac{1}{x-y}$. Es ſey die Baſis der natürlichen Logarithmen $= e$, ſo iſt (ſ. Logarithmen)

$$e^\omega = x + y, \text{ und } e^\omega = \frac{1}{x-y},$$

$$\text{oder } e^{-\omega} = x - y.$$

Folglich iſt

$$e^\omega + e^{-\omega} = 2x,$$

$$e^\omega - e^{-\omega} = 2y.$$

153. Hieraus ergiebt ſich eine leichte Art die hyperboliſche Form auf einen Kreisſector überzutragen. Es iſt $\partial . e^\omega = e^\omega \partial \omega$, und $\partial . e^{-\omega} = -e^{-\omega} \partial \omega$ (Differentialformeln, 14.), alſo iſt

$$(e^\omega - e^{-\omega}) \partial \omega = 2 \partial x,$$

$$(e^\omega + e^{-\omega}) \partial \omega = 2 \partial y,$$

und durch Verbindung mit jenen beiden Formeln,

$$\partial \omega = \frac{\partial x}{y}; \qquad \partial \omega = \frac{\partial y}{x}.$$

Setzt man $y \sqrt{-1}$ ſtatt y, und $\varphi \sqrt{-1}$ ſtatt ω, ſo verwandeln ſich dieſe beiden Differentialformeln in die zwiſchen einem Kreisbogen und den Coordinaten (Differentialformeln, 29, 30.), oder zwiſchen dem doppelten Kreisſector und den Coordinaten. Es iſt alſo, wenn x und y die Coordinaten am Kreiſe, und $\frac{1}{2}\varphi$ den zugehörigen Sector bedeuten,

$$e^{\varphi \sqrt{-1}} + e^{-\varphi \sqrt{-1}} = 2x,$$

$$e^{\varphi \sqrt{-1}} - e^{-\varphi \sqrt{-1}} = 2y\sqrt{-1}.$$

Zwiſchen der Coordinate x oder y und dem Sector $\frac{1}{2}\varphi$ oder Bogen φ (für den Halbmeſſer als Einheit) findet keine endliche Gleichung anders als mit unmöglichen Formen Statt. Werden die Exponentialgrößen zu einer Reihe entwickelt, ſo geht das Unmögliche heraus. (S. Differenzenrechnung, 25, wo für a, c, u, zu ſetzen ſind e, 1, $\pm\varphi\sqrt{-1}$.)

Hingegen ſind die Gleichungen zwiſchen ω und x oder y an der Hyperbel zweyerley Formen fähig, durch Potentialausdrücke, und durch Reihen.

154. Es ſey ACN (Fig. 61.) ein Vielfaches des Sectors ACM in dem Verhältniſſe n : 1; und CQ die dazu gehörige Abſciſſe, QN die Ordinate, ſo iſt

$$\tfrac{1}{2}(e^{n\omega}+e^{-n\omega}) = CQ,$$

$$\tfrac{1}{2}(e^{n\omega}-e^{-n\omega}) = NQ.$$

Man ſetze S ſtatt $\frac{1}{2}\omega$, und CQ = coſ hyp. nS; NQ = ſin hyp. nS, oder kürzer CQ = coſ h. nS; NQ = ſin h. nS.

I. Man multiplicire die beiden Theile der Gleichung, $\frac{1}{2}(e^{\omega}+e^{-\omega}) = x$, mit den beiden Theilen von $e^{\omega}+e^{-\omega} = 2x$, ſo entſteht $\frac{1}{2}(e^{2\omega}+1+1+e^{-2\omega}) = 2x^2$, das iſt, $\frac{1}{2}(e^{2\omega}+e^{-2\omega} = 2x^2-1$, oder

$$\text{coſ h. } 2S = 2x^2-1.$$

II. Die beiden Theile der gefundenen Gleichung multiplicire man wieder mit $e^{\omega}+e^{-\omega} = 2x$, ſo erhält man

$$\tfrac{1}{2}(e^{3\omega}+e^{\omega}+e^{-\omega}+e^{-3\omega}) = 4x^3-2x,$$

oder $\frac{1}{2}(e^{3\omega}+e^{-3\omega}) = 4x^3-3x$,

das iſt, coſ h. $3S = 4x^3-3x$.

III. Auf gleiche Art wird erhalten

$$\tfrac{1}{2}(e^{4\omega}+e^{2\omega}+e^{-2\omega}+e^{-4\omega}) = 8x^4-6x^2,$$

oder $\frac{1}{2}(e^{4\omega}+e^{-4\omega}) = 8x^4-8x^2+1$,

das iſt, coſ h. $4S = 8x^4-8x^2+1$.

IV. Ferner iſt

$$\cos h\ 5S = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$
$$\cos h.\ 6S = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1.$$
$$\cos h.\ 7S = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x,$$

u. ſ. f.

Dieſe Formeln für die Coſinus der Vielfachen eines hyperboliſchen Sectors ſtimmen völlig mit den Formeln für die Coſinus der Vielfachen eines Winkels (oder circularen Sectors) in (93.) überein. Die Herleitung der Coſinus eines Vielfachen aus denen der beiden nächſt vorhergehenden iſt beiderſeits dieſelbe.

155. Man multiplicire die beiden Theile der Gleichung, $\frac{1}{2}(e^{w} - e^{-w}) = y$, mit den beiden Theilen von $e^{w} + e^{-w} = 2x$, ſo iſt

$$\tfrac{1}{2}(e^{2w} - e^{-2w}) = 2xy,$$

oder $\sin h.\ 2S = 2xy.$

II. Die gefundene Gleichung behandle man auf dieſelbe Art, ſo iſt

$$\tfrac{1}{2}(e^{3w} + e^{w} - e^{-w} - e^{-3w}) = 4x^2y,$$

oder $\frac{1}{2}(e^{3w} - e^{-3w}) = 4x^2y - y,$

das iſt, $\sin h.\ 3S = 4x^2y - y.$

III. Durch daſſelbe Verfahren wird erhalten

$$\sin h.\ 4S = 8x^3y - 4xy.$$
$$\sin h.\ 5S = 16x^4y - 12x^2y + y.$$
$$\sin h.\ 6S = 32x^5y - 32x^3y + 6xy.$$
$$\sin h.\ 7S = 64x^6y - 80x^4y + 24x^2y - y.$$

u. ſ. f.

Auch dieſe Formeln ſtimmen mit den Formeln für die Sinus der Vielfachen eines Winkels (oder Kreisſectors) in (84.) vollkommen überein. Da in den Formeln bloß die erſte Potenz des Sinus des einfachen Sectors vor-

kommt, ſo hebt ſich der unmögliche Factor bey der Vertauſchung der circularen und hyperboliſchen Sectoren.

Zu vergleichen die Rechnung in 108[b], f.

156. Um die Sinus der ungeraden Vielfachen eines hyperboliſchen Sectors durch den Sinus des einfachen auszudrucken, multiplicire man die beiden Werthe des Sinus eines Vielfachen durch die beiden Theile der Gleichung, $e^{2\omega} + e^{-2\omega} = 4yy + 2$, $(= 4xx - 2)$, den erſten durch den erſten, den zweyten durch den zweyten, und addire oder ſubtrahire dasjenige, was nöthig iſt, um den Werth des Sinus eines vielfachen Sectors, $\frac{1}{2}(e^{n\omega} - e^{-n\omega})$, zu erhalten. Solchergeſtalt iſt

$$\sin h.\ S = y.$$
$$\sin h.\ 3S = 4y^3 + 3y.$$
$$\sin h.\ 5S = 16y^5 + 20y^3 + 5y.$$
$$\sin h.\ 7S = 64y^7 + 112y^5 + 56y^3 + 7y.$$

u. ſ. f.

Dieſe Formeln ſind bloß in den Vorzeichen von denen in (86.) verſchieden. Setzt man hier $y\sqrt{-1}$ für y, und alſo für den Sinus des vielfachen Sectors ebenfalls eine unmögliche Größe, ſo geht der unmögliche Factor zwar durch die Diviſion wieder heraus, aber die ungeraden Potenzen von y^2 werden negativ. Auf gleiche Art werden die Formeln für Sinus am Kreiſe in hyperboliſche verwandelt.

157. Durch daſſelbe Verfahren findet man die hyperboliſchen Sinus gerader Vielfachen eines Sectors, nämlich

$$\sin h.\ 2S = 2yx.$$
$$\sin h.\ 4S = (8y^3 + 4y)x.$$
$$\sin h.\ 6S = (32y^5 + 32y^3 + 6y)x.$$
$$\sin h.\ 8S = (128y^7 + 192y^5 + 80y^3 + 8y)x.$$

u. ſ. w.

Die Formeln ſind dieſelben wie die für Winkel oder Kreisſectoren in (89.) außer daß alle Glieder einerley Vorzeichen haben, aus demſelben Grunde wie in (156).

158. Ein hyperboliſcher Sinus und Coſinus gehört nur zu einem einzigen Sector. Daher haben die Gleichungen für x und y, wenn der vielfache Sector gegeben wird, nur einen einzigen Werth, oder die Gleichungen für x und y haben alle nur eine einzige mögliche Wurzel. Die Formeln für den Sinus eines geraden Vielfachen des einfachen Sectors geben zwar, quadrirt, Gleichungen mit geraden Potenzen von y, daher die Wurzeln paarweiſe von entgegengeſetzten Werthen, allein die negativen Wurzeln beziehen ſich nur auf den negativen Werth des Sinus des vielfachen Sectors, der durch das Quadriren mit in die Gleichung gezogen wird.

159. Es ſey $\sin h.\, 3S = f$, ſo iſt $f = 4y^3 + 3y$ (156.). Man führe wieder die halbe Axe, a, ein, ſo hat man für f zu ſetzen $\frac{f}{a}$, und $\frac{y}{a}$ für y. Dadurch iſt

$$4y^3 + 3a^2y - a^2f = 0.$$

Dieſe Gleichung hat nur eine mögliche Wurzel (Gleichung, 69.). Ihre Geſellſchafterinn am Kreiſe, $4y^3 - 3a^2y + a^2f = 0$, hat drey mögliche Wurzeln. Denn die Gleichung, $x^3 - bx + c = 0$, hat drey mögliche Wurzeln, wenn $4b^3 > 27c^2$ iſt (Gleichung 70.). Da am Kreiſe iſt $a > f$, ſo wird die Bedingung wegen der drey möglichen Wurzeln erfüllt.

160. Es ſey $\cos h.\, 3S = g$, ſo iſt $g = 4x^3 - 3x$ (154. II.). Wird die halbe Axe, a, eingeführt, ſo iſt $4x^3 - 3a^2x - a^2g = 0$. Eine cubiſche Gleichung, $x^3 - bx - c = 0$, hat nur eine mögliche Wurzel, wenn $4b^3 < 27c^2$ iſt. Das iſt hier der Fall, da $a < g$ iſt.

161. Es ſey $\sin h.\, nS = f$, ſo iſt $\frac{1}{2}(e^{n\omega} - e^{-n\omega}) = f$, und $\frac{1}{4}(e^{2n\omega} - 2 + e^{-2n\omega}) = f^2$. Daraus iſt $\frac{1}{4}(e^{2n\omega} + 2 + e^{-2n\omega}) = f^2 + 1$, woraus iſt

$\frac{1}{2}(e^{n\omega} + e^{-n\omega}) = \sqrt{(f^2 + 1)}$. Dieſe Gleichung auf gedoppelte Art mit der erſten für f verbunden, giebt

$$e^{n\omega} = \sqrt{(f^2 + 1)} + f,$$
$$e^{-n\omega} = \sqrt{(f^2 + 1)} - f.$$

Daraus iſt

$$e^{\omega} = \sqrt[n]{(\sqrt{(f^2 + 1)} + f)},$$
$$e^{-\omega} = \sqrt[n]{(\sqrt{(f^2 + 1)} - f)}.$$

Da $e^{\omega} - e^{-\omega} = 2y = 2 \sin h. S$, ſo iſt

$$2y = \sqrt[n]{(\sqrt{(f^2 + 1)} + f)} - \sqrt[n]{(\sqrt{(f^2 + 1)} - f)}.$$

162. Es ſey $\cos h.\, nS = g$, ſo iſt $\frac{1}{2}(e^{n\omega} + e^{-n\omega}) = g$, und daraus auf ähnliche Art wie in (161.)

$$e^{\omega} = \sqrt[n]{(g + \sqrt{(g^2 - 1)})},$$
$$e^{-\omega} = \sqrt[n]{(g - \sqrt{(g^2 - 1)})}.$$

Da $e^{\omega} + e^{-\omega} = 2x = 2 \cos h. S$, ſo iſt

$$2x = \sqrt[n]{(g + \sqrt{(g^2 - 1)})} + \sqrt[n]{(g - \sqrt{(g^2 - 1)})}.$$

Aus den Gleichungen für y und x laſſen ſich rückwärts f und g durch y und x darſtellen.

163. Der hyperboliſche Sinus und Coſinus des Theils eines Sectors läßt ſich alſo durch den Sinus und Coſinus des vielfachen Sectors mittelſt einer endlichen, zweymahl zweytheiligen, nur irrationalen, Formel darſtellen. Der Sinus und Coſinus eines Kreisſectors behält zwar dieſelbe Form, die beiden Wurzelgrößen aber ſind unmögliche Größen, weil f in $f\sqrt{-1}$ verwandelt wird, und g^2 kleiner als 1 iſt. Die mehreren Werthe des Sinus und Coſinus des Theils laſſen ſich in einem endlichen algebraiſchen Ausdrucke mit möglichen Größen nicht begreifen. Bey der Entwickelung der irrationalen Größen zu Reihen verſchwindet das Unmögliche in dem Aggregat.

Die nte Wurzel aus einer möglichen Größe hat nur einen einzigen möglichen Werth; aber die nte Wurzel aus einer unmöglichen Größe hat n unmögliche Werthe. In dem gegenwärtigen Falle läßt ſich eine unmögliche Wurzel aus dem einen Theile der Formel für y oder x mit einer unmöglichen Wurzel aus dem andern Theile derſelben verbinden, ſo daß das Aggregat möglich wird. Dieſes muß auf n Arten thunlich ſeyn, damit y oder x dadurch n verſchiedene Werthe erhalte, und bey einer Section in eine gerade Anzahl Theile für die Sinus auf 2n Arten, die aber nur in den Vorzeichen einen Unterſchied geben.

164. Wenn $n = 3$ iſt, ſo ſind die Formeln für $2y$ und $2x$ die Ausdrücke der Wurzeln einer cubiſchen Gleichung, wie ſie die Cardaniſche Regel für eine cubiſche Gleichung mit einer einzigen möglichen Wurzel giebt. Die Formel für $2y$ gilt für die Gleichung $z^3 + bz - c = 0$, die für $2x$ gilt für die Gleichung $z^3 - bz - c = 0$. Hat c das Vorzeichen +, ſo ſind die Wurzeln jenen Werthen entgegengeſetzt. Man hat nur in jenen Formeln für y, x, f, g zu ſetzen $\frac{y}{a}$, $\frac{x}{a}$, $\frac{f}{a}$, $\frac{g}{a}$, um die Formeln denen in dem Artikel, Gleichung (62. 73.) analog zu machen. Alsdann iſt $2y$ oder $2x$ das dortige x.

165. Lambert hat in einer Abhandlung, Obſervations trigonometriques, Mem. de l'Acad. de Berlin, 1768, eine Tafel von 90 hyperboliſchen Sectoren mit ihren Sinus und Coſinus nebſt deren Logarithmen berechnet, welche Tafel auch in ſeinen Zuſätzen zu den ... Tabellen, Berlin 1770, Tab. XXXII. enthalten iſt. Wenn dieſe weiter ausgedehnt würde, könnte ſie nicht allein zur Auflöſung mancher Gleichungen, ſondern auch zur Abkürzung trigonometriſcher Rechnungen dienen.

166. Exempel. Es ſey die Gleichung, $x^3 - 13{,}3592\,x - 24{,}6377 = 0$, aufzulöſen. Sie

iſt nach Cardans Regel, im Artikel Gleichung, 75, aufgelöſet. Es iſt an der Hyperbel die Gleichung, $4x^3 - 3a^2x - a^2g = 0$ aus (160.). Folglich iſt

$\frac{3}{4} a^2 = 13,3592$ | $la = 0,62536$
$\frac{1}{4} a^2 g = 24,6377$ | $lg = 0,74294$
$a = 4,2204$ | $l\,\mathrm{coſ\,h.}\,3S = 0,11758$

$\mathrm{coſ\,h.}\,3S = \frac{g}{a}$ | $3S = 0,3314+$
(aus der Tafel.)

$x = a\,\mathrm{coſ\,h.}\,S$ | $S = 0,1105+$
$= 4,368$ | $\mathrm{coſ\,h.}\,S = 1,035 -$

Am a. O. iſt gefunden $x = 4,36004$. Die Rechnung iſt hier ohne ſorgfältige Interpolation gemacht.

167. Die Formeln für die Zuſammenſetzungen der Winkel mittelſt der Functionen der ihnen zugeordneten Linien gelten auch für die hyperboliſchen Sectoren. Nur muß $\sin\alpha$ mit $\sin\alpha\sqrt{-1}$, und $\tan\alpha$ mit $\tan\alpha.\sqrt{-1}$ vertauſcht werden. So iſt $\mathrm{coſ\,hyp}(A+B) = \mathrm{coſ\,h.}\,A.\mathrm{coſ\,h.}\,B + \mathrm{ſin\,h.}\,A.\mathrm{ſin\,h.}\,B$, welcher Werth von dem $\mathrm{coſ}(A+B)$ am Kreiſe in dem Vorzeichen des zweyten Gliedes verſchieden iſt, weil $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$ iſt. S. Lambert a. a. O. in den Tafeln. Tab. XVIII.

IX. Analytiſche Werthe der Sinus von 3 zu 3 Graden.

168. Die analytiſchen Werthe der Sinus ſind vollſtändige, wenn gleich bis auf zwey derſelben, den ſin 90° und ſin 30°, irrationale, und daher bey analytiſchen Rechnungen brauchbar; auch können ſie, wo die Irrationalität nicht zu verwickelt wird, zur Berechnung der numeriſchen Werthe als Fundamentalwerthe dienen.

Hier folgen dieſe Werthe in einer gewiſſen ſyſtematiſchen Abtheilung.

I.

$\sin 90^\circ = 1.$

$\sin 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}.$

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$

$\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$

$\sin 15^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})} = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}.$

$\sin 75^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})} = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}.$

II.

$\sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}.$

$\sin 54^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(6+2\sqrt{5})} = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$

$\sin 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(6-2\sqrt{5})} = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$

$\sin 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}.$

III.

$\sin 81^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$

$\sin 9^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})} - \frac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$

$\sin 63^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{(3-\sqrt{5})}.$

$\sin 27^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} - \frac{1}{4}\sqrt{(3-\sqrt{5})}.$

IV.

$\sin 66^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(30-6\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{(6+2\sqrt{5})}.$

$\sin 24^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(18+6\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}.$

$\sin 6^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(30-6\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{(6+2\sqrt{5})}.$

$\sin 84^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(18+6\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}.$

$\sin 48^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{(18-6\sqrt{5})}.$

$\sin 42^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(30+6\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{(6-2\sqrt{5})}.$

$\sin 12^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{(18-6\sqrt{5})}.$

$\sin 78^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(30+6\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{(6-2\sqrt{5})}.$

V.

$$\sin 51° = \tfrac{1}{8}\sqrt{(9+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(3+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$$

$$\sin 39° = \tfrac{1}{8}\sqrt{(3+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(9+3\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})}.$$

$$\sin 21° = \tfrac{1}{8}\sqrt{(3+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(9+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})}.$$

$$\sin 69° = \tfrac{1}{8}\sqrt{(9+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(3+\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$$

$$\sin 33° = \tfrac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(9-3\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(3-\sqrt{5})}.$$

$$\sin 57° = \tfrac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(3-\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(9-3\sqrt{5})}.$$

$$\sin 3° = \tfrac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(3-\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(9-3\sqrt{5})}.$$

$$\sin 87° = \tfrac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(9-3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(3-\sqrt{5})}.$$

Die Wurzelgrößen, in welchen die Größe unter dem Wurzelzeichen den Factor $3 \pm \sqrt{5}$ hat, laſſen ſich in zwey Wurzeln zerlegen, da $\sqrt{(3 \pm \sqrt{5})} = \sqrt{\tfrac{5}{2}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{10} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$ iſt.

169. Die Herleitung dieſer Formeln beruht auf den Werthen von ſin 45°, ſin 30°, ſin 36°, und den Formeln von der Zuſammenſetzung der Sinus. Daß $\sin 45° = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, und $\sin 30° = \tfrac{1}{2}$ iſt, iſt offenbar. Der ſin 15° und ſin 75° (= coſ 15°) werden entweder durch die Formeln in (36.) aus coſ 30° oder ſin 60° gefunden, oder durch die in (24.), da $15° = 45° - 30°$, und $75° = 45° + 30°$. Aus dem Binomium $2 \pm \sqrt{3}$ läßt ſich die Quadratwurzel in der angegebenen Form ausziehen, ſ. Wurzel.

170. Der Sinus von 36° iſt die halbe Seite des ordentlichen Fünfecks, und kann aus einer geometriſchen Conſtruction hergeleitet werden. (S. Vieleck). Oder man ſetze in (65.) den Winkel $\varphi = \frac{180^\circ}{5}$, ſo iſt $\sin 5\varphi = 0$, alſo $0 = 5y - 20y^3 + 16y^5$, wo y die Werthe der Sinus von $\frac{180}{5}$ Gr. ſind. Es müſſen hier alle Winkel, deren Sinus o iſt, in 5 Theile getheilt werden Die Werthe von $\sin\varphi$ oder y ſind demnach, o, $\sin 36^\circ$, $\sin 72^\circ$, $\sin 108^\circ$ ($= \sin 72^\circ$), $\sin 144^\circ$ ($= \sin 72^\circ$); $\sin 180^\circ$; $\sin 216^\circ$ ($= - \sin 36^\circ$); $\sin 252^\circ$ ($= - \sin 72^\circ$). So ſind die Wurzeln jener Gleichung, o: $\pm \sin 36^\circ$; $\pm \sin 72^\circ$. Nun iſt, nachdem ſie mit y dividirt iſt, $16y^4 - 20y^2 + 5 = 0$, alſo (Gleichung, 33.) $y^2 = \frac{5}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{5}$, und $y = \frac{1}{4}\sqrt{(10 \pm 2\sqrt{5})}$. Das obere Vorzeichen giebt den $\sin 72^\circ$, das untere den $\sin 36^\circ$. Dieſe Werthe ſind auch negativ zu nehmen, da die Wurzel aus y^2 beide Vorzeichen erhalten muß. Zu gegenwärtiger Abſicht werden ſie nicht gebraucht.

Der $\sin 54^\circ$ iſt der $\cos 36^\circ$, und $\sin 18^\circ = \cos 72$. Sie werden durch die Formel $\cos A = \sqrt{(1 - \sin A^2)}$ gefunden. Aus dem Binomium $6 \pm 2\sqrt{5}$ iſt die Quadratwurzel $\sqrt{5} \pm 1$, da 5 das Product zweyer Zahlen 1 und 5 iſt, deren Summe = 6. Oder aus $\cos 36^\circ = \sin 54^\circ$ werden $\sin 18^\circ$ und $\cos 18^\circ = \sin 72^\circ$ durch die Formeln in (36.) hergeleitet.

171. Die Formeln in dem Abſchnitte III. werden mittelſt der Verbindung der Winkel 36° und 18° mit 45° gefunden; die Formeln in IV. mittelſt der Verbindung der Winkel in II. mit 30°, und 18° mit 60°; die Formeln in V. mittelſt der Zuſammenſetzung der Winkel in III. mit 30° oder 60°. Es iſt nämlich $81 - 30 = 51$; $30 + 9 = 39$; $30 - 9 = 21$; $63 - 30 = 33$; $30 + 27 = 57$; $30 - 27 = 3$; $60 + 27 = 87$; $60 + 9 = 69$.

172. Die analytiſchen Werthe der Sinus der Winkel von der Form $\frac{3(2m+1)}{2}$ in Graden werden zum

Theil ſehr zuſammengeſetzt. Die einfachern mögen hier noch Platz finden.

$\sin 22^\circ\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})}$.

$\sin 67^\circ\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})}$.

$\sin 7^\circ\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{(8-2\sqrt{2}-2\sqrt{6})}$
$= \frac{1}{4}\sqrt{(2+\sqrt{2})} - \frac{1}{4}\sqrt{(6-3\sqrt{2})}$.

$\sin 82^\circ\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{(8+2\sqrt{2}+2\sqrt{6})}$
$= \frac{1}{4}\sqrt{(6+3\sqrt{2})} + \frac{1}{4}\sqrt{(2-\sqrt{2})}$.

$\sin 37^\circ\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{(8+2\sqrt{2}-2\sqrt{6})}$
$= \frac{1}{4}\sqrt{(6+3\sqrt{2})} - \frac{1}{4}\sqrt{(2-\sqrt{2})}$.

$\sin 52^\circ\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{(8-2\sqrt{2}+2\sqrt{6})}$
$= \frac{1}{4}\sqrt{(2+\sqrt{2})} + \frac{1}{4}\sqrt{(6-3\sqrt{2})}$.

Die Sinus von $22^\circ\frac{1}{2}$ und $67^\circ\frac{1}{2}$ werden aus dem coſ 45° durch die Formeln (36.) gefunden. Die zuerſt geſetzten Werthe der übrigen vier Sinus werden mittelſt derſelben Formeln aus dem coſ 15° und coſ 75° erhalten, die beygefügten Werthe aber aus der Verbindung des Winkels $\pm 22^\circ\frac{1}{2}$ mit 30° und 60°.

173. Wallis hat in ſeinem tractatus de ſectionibus angularibus Opp. Th II. die analytiſchen Werthe der Chorden von $1\frac{1}{2}$ zu $1\frac{1}{2}$ Grad berechnet. Das Verzeichniß derſelben ſteht daſelbſt pag. 586 — 589. Die Chorden ſind alle als Quadratwurzeln dargeſtellt. Es iſt nämlich $4\sin A^2 = 2 - 2\cos A = 2 - 2\sin(90^\circ - A)$, das iſt, $(\text{chord } A)^2 = 2 - \text{chord compl. } A$.

X. Formeln für die Sinus und Coſinus der Winkel von der Form $\frac{A}{2^n}$.

174. Es ſey der Sinus eines Bogens $= a$, der Sinus der Hälfte $= b$; des Viertheils $= c$; des Acht-

theils $= d$, u. ſ. w. Ferner ſeyn die Coſinus dieſer Bogen $= \alpha; \beta; \gamma; \delta;$ etc. Nun iſt $2b^2 = 1 - \sqrt{(1-a^2)}$ aus (36), oder $4b^2 = 2 - \sqrt{(4-4a^2)}$; und $4c^2 = 2 - \sqrt{(4-4b^2)}$; $4d^2 = 2 - \sqrt{(4-4c^2)}$; u. ſ. f. Daher iſt

$$2b = \sqrt{(2-\sqrt{(4-4a^2)})}.$$

$$2c = \sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(4-4a^2)})})}.$$

$$2d = \sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(4-4a^2)})})})}.$$

$$2e = \sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(4-4a^2)})})})})}.$$

etc.

175. Ferner iſt $4\beta^2 = 2 + 2\alpha$; $4\gamma^2 = 2 + 2\beta$; $4\delta^2 = 2 + 2\gamma$; u. ſ. f. alſo

$$2\beta = \sqrt{(2+2\alpha)}.$$

$$2\gamma = \sqrt{(2+\sqrt{(2+2\alpha)})}.$$

$$2\delta = \sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+2\alpha)})})}.$$

$$2\varepsilon = \sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+2\alpha)})})})}.$$

u. ſ. f.

176. Die doppelten Sinus, $2a$, $2b$, $2c$, etc. ſind die Chorden des doppelten von den Winkeln, wozu die Sinus a, b, c, etc. gehören. Vermittelſt dieſer ſehr beſchwerlichen Formeln hat Ludolph von Ceulen den Umfang des Kreiſes berechnet. Es ſey $a = \sin 45^\circ$, alſo $2a = \text{chord } 90^\circ$, ſo iſt die Seite des eingeſchriebenen 64 Ecks, $2e = \sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})}$. Ludolph berechnete nach einer ſolchen Formel die Seite des eingeſchriebenen Vielecks von 1073741824 Seiten, wozu 28 Halbirungen erforderlich ſind.

177. Es ſey $a = \frac{1}{2}$, nämlich die halbe Seite des Sechsecks, ſo iſt die Seite des eingeſchriebenen 96 Ecks $2e = \sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{3})})})}$. Das iſt die von Archimedes berechnete Seite. Ludolph hat durch fortgeſetzte Halbirung des Bogens von 60 Gr. die Seite des eingeſchriebenen Vielecks von 6442450944 Seiten

durch 30 Halbirungen mittelſt einer ſolchen Formel berechnet. Endlich berechnete er durch die fortgeſetzte Halbirung des Bogens von 6 Gr. die Seite des eingeſchriebenen Vielecks von 32212254720 Seiten durch 29 Theilungen. Hier iſt $a = \sin 3^\circ$; und $4(1 - a^2) = (4 \cos 3^\circ)^2$ $= 2 + 2 \cos 6^\circ = 2 + \sqrt{(2 + 2 \cos 12^\circ)}$. Es iſt $2 \cos 12^\circ = 2 \sin 78^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{(30 + 6\sqrt{5})}$ $+ \frac{1}{4}\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})} = \frac{1}{4}\sqrt{(30 + 6\sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}$; alſo $2 + 2 \cos 12^\circ = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{(30 + 6\sqrt{5})}$, ſo daß $\sqrt{(4 - 4a^2)} = \sqrt{(2 + \sqrt{(\frac{7}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{(30 + 6\sqrt{5})}))}$. Dieſen Ausdruck hat Ludolph in ſeinen Formeln für die Chorden bey dieſer Rechnung.

178. Vieta hat aus den Formeln für die Coſinus der Winkel von der Form $\frac{A}{2^n}$ einen Ausdruck des Inhalts des Kreiſes hergeleitet. Opp. p. 400. Es ſey der Centriwinkel eines regulären eingeſchriebenen Vielecks $= A$; die Anzahl der Seiten $= n$, der Halbmeſſer $= r$, ſo iſt der Inhalt $= n \cdot r \sin \frac{1}{2} A \cdot r \cos \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} n r^2 \sin A$. Der Inhalt des eingeſchriebenen Vielecks von $2n$ Seiten iſt demnach $= n r^2 \sin \frac{1}{2} A$. Es verhält ſich alſo der Inhalt des Vielecks von n Seiten zu dem von $2n$ Seiten wie $\cos \frac{1}{2} A : 1$; das von $2n$ Seiten zu dem von $4n$ Seiten wie $\cos \frac{1}{4} A : 1$; das von $4n$ Seiten zu dem von $8n$ Seiten wie $\cos \frac{1}{8} A : 1$; u. ſ. f. Daher verhält ſich das Vieleck von n Seiten zu dem von $2^p n$ Seiten wie das Product $\cos \frac{1}{2} A . \cos \frac{1}{4} A . \cos \frac{1}{8} A \ldots \cos \frac{A}{2^p} : 1$.

Da der Kreis die Gränze der Vielecke iſt, ſo verhält ſich das Vieleck von n Seiten zu der Kreisfläche wie das Product $\cos \frac{1}{2} A . \cos \frac{1}{4} A . \cos \frac{1}{8} A$, etc. in infin. : 1.

Es ſey $n = 4$, ſo iſt $A = 90^\circ$ und $\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1}{2}}$. In den Formeln für die Coſinus der ſucceſſiv halbirten Winkel iſt nun

$\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$; $\beta = \sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})}$;

$\gamma = \sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})})}$;

$\delta = \sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})})})}$;

$\varepsilon = \sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})})})})}$.

etc.

und das eingeſchriebene Viereck ($= 2$) verhält ſich zu der Kreisfläche wie $\alpha . \beta . \gamma . \delta . \varepsilon$. etc. : 1.

Bey Vieta fehlt durchgehends der Factor $\tfrac{1}{2}$ vor den Wurzelzeichen. Für den Durchmeſſer $= 2$ findet er die Chorde des Complements von $45^{\circ} = \sqrt{(2 + \sqrt{2})}$; von $22^{\circ}\tfrac{1}{2} = \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{2})})}$; von $11^{\circ}\tfrac{1}{4} = \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{2})})})}$, u. ſ. f. Für den Durchmeſſer $= 1$ ſind dieſe Chorden durch 2 zu dividiren, das iſt, unter jedem Wurzelzeichen durch 4. So iſt $\tfrac{1}{2}\sqrt{(2 + \sqrt{2})} = \sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2})} = \sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})}$, und ſo mit den übrigen allen. Dieſe Chorden ſind alsdann Coſinus in einem Kreiſe, der den Durchmeſſer ihres Kreiſes zum Halbmeſſer hat. Montucla hat (Hiſt. des Mathem. T. I. p. 611.) die Formel ſo abgeſchrieben wie ſie bey Vieta ſteht.

X. Zugabe einiger geometriſchen Conſtructionen.

179. Zur Verſinnlichung geometriſch-analytiſcher Formeln iſt es dienlich ſie, wo es bequem angeht, bloß durch die Geometrie zu finden. Zu dieſem Zwecke, und auch zur Übung in der Geometrie ſind hier die Conſtructionen von einigen der obigen Formeln beygefügt.

180. Es iſt (Fig. 62.) AB der Durchmeſſer eines Kreiſes, CD, EF ſind zwey parallele Chorden, und DE die Chorde von dem Bogen DAE, als der Summe von DAC und CE. Der Durchmeſſer AB ſey auf dieſe beiden parallelen Chorden ſenkrecht, daher er ſie in G und H halbirt. Man nehme den Bogen AK = CE oder DF, welche ſich gleich ſind, und ziehe BK und AK. Die Chorde DE ſchneide GH in L, ſo ſind die Dreyecke

DGL, EHL dem BKA ähnlich, wegen der rechten Winkel bey G, H, K, und der gleichen ſpitzen bey D, E, B, die auf gleich großen Bogen ſtehen. Es iſt alſo

$$BK : AB = GD : DL = EH : EL,$$

und daher

$$BK \times DL = AB \times GD,$$

$$BK \times EL = AB \times EH.$$

Daraus iſt durch Addition, und Multiplication mit 2,

$$2\,BK \times ED = AB(CD + EF).$$

Dieſe Formel iſt dieſelbe mit der erſten in (129*). Daſelbſt iſt ω, was hier der Bogen AK oder EC iſt.

Nimmt man die Hälften der Chorden CD und EF, ſo iſt

$$BK \times ED = AB(CG + EH).$$

Dieſes iſt die Formel in (58.). Denn CG, $\frac{1}{2}$ED, EH, ſind die Sinus der Bogen, AC, $\frac{1}{2}$DAE, AE, für den Halbmeſſer AO oder $\frac{1}{2}$AB. Der Unterſchied des erſten und zweyten dieſer Bogen, ſo wie des zweyten und dritten, iſt $= \frac{1}{2}$CE oder $\frac{1}{2}$AK, das Maaß des Winkels B, deſſen Coſinus BK für den Halbmeſſer AB iſt. Es iſt hier der zu AE gehörige Winkel am Mittelpuncte was in (58.) der Winkel $a + nb$ iſt, und B, was daſelbſt b heißt; auch iſt $\cos B = \frac{BK}{AB}$.

181. Man ziehe den Durchmeſſer DOP, und die Chorden PE, PC, von welchen jene auf DE, dieſe auf DC ſenkrecht ſteht. Die Chorde PC ſchneide EF in M. Da EF parallel mit CD iſt, ſo iſt PM ſenkrecht auf EF, da auch Winkel EPC auf dem Bogen EC ſteht, ſo iſt Winkel EPC = ABK, und es iſt

$$AB : AK = EP : EM.$$

Noch ziehe man DN ſenkrecht auf EF, ſo iſt MH = NH,

alſo EM = FN. Nun iſt EM + FN = EF − CD, folglich iſt

$$AB : AK = 2EP : EF - CD,$$

oder

$$2AK . EP = AB (EF - CD).$$

Dieſe Formel giebt den Unterſchied der Chorden mittelſt der Chorde des Complements von dem arithmetiſch mittlern Winkel, ſo wie jene erſtere die Summe durch die Chorde dieſes Winkels ſelbſt.

Nimmt man die Hälften von den beiden Chorden, EF, CD, und von EP, ſo entſteht die Formel in (59.) Es iſt $\frac{AK}{AB}$ = ſin B = Sinus des halben Unterſchiedes der zu CG, EH gehörigen Winkel.

182. Wenn CD, DE, EF als Chorden der Complemente ihrer Bogen zum Halbkreiſe betrachtet werden, ſo werden aus den hier gefundenen Formeln die in (60, 61.) erhalten.

183. Die Secante CF des Bogens AD (Fig. 63.) iſt gleich der Summe von der Tangente AF deſſelben Bogens und der Tangente AG des halben Complements DE oder BE zum Quadranten AB.

Es ſey AB der Quadrant eines Kreiſes, deſſen Mittelpunct C iſt, und DE = EB. Man mache den Winkel ACG = BCE, und ziehe CG an die berührende AG, der Verlängerung von AF in G. Nun iſt GCD + DCE = R, und AGC + GCA = R. Da DCE = GCA, ſo iſt GCD = AGC oder FGC, alſo ſind in dem Dreyeck CFG die Seiten CF, GF gleich groß.

184. Die Summe der Secante und Tangente eines Bogens iſt gleich der Tangente von der Summe des Bogens und des halben Complements.

Es ſey AB (Fig. 64.) der Quadrant eines Kreiſes, deſſen Mittelpunct C iſt. In dieſem nehme man irgend einen Bogen AD, und halbire deſſen Complement DB in E. Die Tangente des Bogens AD iſt AF, des Bo-

Qq

gens AD iſt AF, des Bogens AE iſt AG. Da Winkel AGC = GCB = DCE, ſo iſt CF = FG, alſo AG = AF + FC.

XI. Notizen zur Geſchichte der Goniometrie.

Die Goniometrie iſt ein ſo wichtiges Syſtem von Sätzen aus der analytiſchen Geometrie, daß es der Mühe werth iſt, auch die ältern Formen derſelben und der Methoden aufzuſuchen. Die ganz geometriſche Entwickelung in den frühern Schriften iſt zwar oft etwas umſtändlich und mühſam, man lernt aber doch dabey den wirklichen Gang der Erfindung kennen, und erſieht den unmittelbaren Zuſammenhang der Sätze mit den Elementen der Geometrie. Nach der in dieſem Artikel gebrauchten Methode iſt aus dem einzigen zum Grunde gelegten geometriſchen Satze alles folgende bloß durch Rechnung hergeleitet.

In dem Artikel, Cyklotechnie, iſt ſchon dasjenige, was zur Geſchichte der Berechnung der goniometriſchen Linien gehört, angeführt worden. Hier wird nur ein gleichſam chronologiſches Verzeichniß der wichtigſten goniometriſchen Sätze gegeben werden können. Die Methoden ſelbſt zu ſtudiren, bleibt den Liebhabern der mathematiſchen Archäologie überlaſſen.

Daß Archimedes ſchon die Summe der Chorden in dem ganzen Kreiſe oder einem Abſchnitte deſſelben, wenn die Bogen gleichförmig zunehmen, beſtimmt hat, iſt in (65, 70.) bemerkt.

Ptolemäus hat in dem 1. B. ſeines Almageſts zwey Sätze über die Zuſammenſetzung der Bogen mittelſt ihrer Chorden auf eine Art erwieſen, die leichter iſt als die in neuern Lehrbüchern, z. B. dem Segneriſchen und Käſtneriſchen, angewandte. Es iſt im weſentlichen dieſelbe mit der in dieſem Artikel (26.) gebrauchten. Für die Chorde der Summe zweyer Bogen hat Ptolemäus keine beſondre Formel, ſondern läßt ſie aus der Chorde des Complements der Summe berechnen. Auch für die Chorde des Con-

plements eines Unterſchiedes zweyer Bogen hat er keine beſondere Formel geſucht. Zur Halbirung der Bogen gebraucht er den Satz, daß die Chorde eines Bogens A die mittlere proportionale iſt zwiſchen dem Durchmeſſer und dem halben Unterſchiede des Durchmeſſers von der Chorde des Complements des Bogens 2 A zum Halbkreiſe *). Ptolemäus mag die Sätze von andern genommen haben, da ein älterer Aſtronom, Menelaus, ſechs Bücher von den Chorden im Kreiſe geſchrieben hat.

Regiomontanus giebt in ſeinem Werke über die Dreyecke (de triangulis omnimodis libri quinque) vielerley Auflöſungen (auch einige algebraiſche in beſtimmten Zahlen) die ebenen und ſphäriſchen Dreyecke betreffend. Doch kommt von goniometriſchen Sätzen nur folgendes darin vor: aus dem Sinus eines Bogens und dem Verhältniſſe der Sinus der Bogen, wovon jener Bogen die Summe oder der Unterſchied iſt, die Bogen, das iſt ihre Verhältniſſe zu jenem zu finden. Er zeigt, wie die Rechnung zufolge der geometriſchen Conſtruction angeſtellt wird. (Vergl. 29.)

Rhäticus zeigt in der Fabrica canonis doctrinae triangulorum durch eine geometriſche Conſtruction, wie die Sinus einer arithmetiſchen Reihe von Winkeln nach einander gefunden werden, wenn ſie von den erſten beiden Winkeln bekannt ſind, auf zweyerley Art. Das erſtere Verfahren giebt die Formeln:

$$\text{ſin}\, n\varphi = 2\, \text{coſ}\,\varphi . \text{ſin}\,(n-1)\varphi - \text{ſin}\,(n-2)\varphi;$$
$$\text{coſ}\, n\varphi = \text{coſ}\,(n-2)\varphi - 2\,\text{ſin}\,\varphi . \text{ſin}\,(n-1)\varphi.$$

Er nimmt den erſten Winkel gleich dem Unterſchiede in der Reihe der Winkel. Nach derſelben Art können aber

*) Dieſer Satz wird aus der in (25) angeführten Eigenſchaft des Kreiſes leicht bewieſen. Man nehme in (Fig 59.) die Bogen AB. CD gleich groß, ſo iſt $AB^2 + AD \times BC = BD^2$, und $2\,AB^2 + AD \times BC = AD^2$, alſo $AB^2 = AD \times \frac{1}{2}(AD - BC)$, wo BC die Chorde des Complements von 2 AB zum halben Umfange iſt.

auch die Sinus und Coſinus gefunden werden, wenn der erſte Winkel irgend einer iſt.

Das zweyte Verfahren giebt die Formeln:

$$\sin(A + n\varphi) = \sin(A + (n-2)\varphi) + 2\sin\varphi \,.\, \cos(A + (n-1)\varphi);$$

$$\cos(A + n\varphi) = \cos(A + (n-2)\varphi) - 2\sin\varphi \,.\, \sin(A + (n-1)\varphi).$$

Die zweyte dieſer Formeln iſt von der für $\cos n\varphi$ nicht weiter verſchieden, als daß der erſte Winkel der Reihe nicht mit dem Unterſchiede gleich groß genommen wird. Auf demſelben Wege findet ſich auch die Formel,

$$\cos(A + n\varphi) = 2\cos\varphi \,.\, \cos(A + (n-1)\varphi) - \cos(A + (n-2)\varphi).$$

Die in (180, 181.) gegebenen Beweiſe ſind im weſentlichen mit denen von Rhäticus geführten einerley; aber kürzer gefaßt und deutlicher.

Pitiscus führt in dem 5. Buche ſeiner Trigonometrie (1600.) einige Sätze an, die zur Abkürzung bey der Berechnung und bey dem Gebrauch des trigonometriſchen Canons dienen.

I. $\sin(60^\circ - A) - \sin(60^\circ + A) = \sin A.$

II. $\tang A - \tang B = 2\tang(A - B)$, wenn $A + B = 90^\circ$ ſind.

III. $\sec A = \tang A + \tang(45^\circ - \frac{1}{2}A).$

IV. $\sec A + \tang A = \tang(\frac{1}{2}A + 45^\circ).$

Bey dem erſten und dritten Satze citirt er Fink und Landsberg, bey dem zweyten Adrianus Romanus. Die geometriſchen Beweiſe ſind in (183. 184.) mitgetheilt.

Die Sätze (27.) wurden vor der Einführung der Logarithmen gebraucht, um in trigonometriſchen Rechnungen Producte in Summen oder Unterſchiede zu verwandeln. Man nannte dieſes, proſtaphäretiſch rechnen, welches ſowohl das Addiren als Subtrahiren begriff. Dieſes war zu jener Zeit ein wichtiges Erleichterungsmittel.

Vieta fand die Formeln für die Chorden der Vielfachen eines Bogens und die Chorden der Comple-

mente zum Halbkreiſe durch die Chorde des einfachen oder diejenige des Complements. (Theoremata ad angulares ſectiones in der Ausgabe ſeiner Schriften durch van Schooten, pag. 295. ff.). Er nennt die Chorde perpendiculum, die Chorde des Complements baſis. Beide ſtehen auf einander ſenkrecht. Die Baſis eines vielfachen Bogens anzugeben ſetzt er den Halbmeſſer = 1, die Baſis des einfachen = N (das bedeutet Numerus), und eine Reihe von ſtetigen proportionalen, 1:N:Q:C: QQ: QC:CC:QQC:QCC: CCC; etc. wo $Q = N^2$; $C = N^3$ iſt. Dann ſetzt er aus dieſen Gliedern die Baſis des vielfachen Bogens zuſammen. Z. B. Baſis anguli noncupli iſt (vergl. 130. V.)

$$1CCC - 9QQC + 27QC - 30C + 9N.$$

Ferner ſetzt er die Chorde des einfachen Bogens = 1, des zweyfachen = N, und formirt die geometriſche Reihe, 1:N:Q:C:QQ:QC:CC: etc. Aus den Gliedern dieſer Reihe ſetzt er die Chorden (perpendicula) der vielfachen Bogen zuſammen, z. B. die Chorde des zehnfachen Bogens,

$$1CCC - 8QQC + 21QC - 20C + 5N,$$

übereinſtimmig mit VI. in (130.).

Noch ſetzt Vieta den Durchmeſſer = 2, die Chorde des einfachen Bogens = N, und ſetzt aus den Gliedern der geometriſchen Reihe, 1:N:Q:C; etc. theils die Baſis, theils die Perpendikel oder Chorden der vielfachen Bogen zuſammen, jene bey geraden Vielfachen, dieſe bey ungeraden. Dieſe Formeln beruhen auf den beiden in (58, 61.), nämlich

$$\sin n\varphi = 2\sin\varphi . \cos(n-1)\varphi + \sin(n-2)\varphi;$$
$$\cos n\varphi = \cos(n-2)\varphi - 2\sin\varphi . \sin(n-1)\varphi,$$

woraus erhalten wird,

$$ch. n\omega = ch.\omega . chc.(n-1)\omega + ch.(n-2)\omega;$$
$$chc. n\omega = chc.(n-2)\omega - ch.\omega . ch.(n-1)\omega.$$

Setzt man in der Formel für die Chorde ſucceſſiv die ungeraden Zahlen, und in der Formel für die Chorde des Complements die geraden Zahlen, ſo ergeben ſich die

Formeln bey Vieta. Montucla führt in ſeiner Geſchichte der Mathematik, Th. I. S. 608. 2te Ausg. dieſe Formeln an, als wenn ſie alle für die Chorde des vielfachen Winkels gehörten, und macht wegen der, zum Theil unrichtig gedruckten Vorzeichen, eine nicht zutreffende Bemerkung.

Die Formel für ſin n φ führt auf die Werthe in (86 und 89.), wenn für n alle ganze Zahlen geſetzt werden. Die Formel für coſ n φ giebt, wenn n gerade genommen wird, Werthe, die in der allgemeinen Formel für coſ n φ in (105.) enthalten ſind.

Vieta fand auch die Formeln (97.) für die Zuſammenſetzung des Sinus und Coſinus eines vielfachen Winkels aus den Potenzen des Sinus und Coſinus des einfachen. Wie ſehr er dieſe ſchätzte, zeigt die Überſchrift des dritten Theorems in dem Reſponſo ad Adriani Romani problema, Opp. p. 315. Sie lautet ſo: Cujus inventi laetitia adfectus, o Diva Meluſinis, tibi oves centum pro una Pythagoraea immolavi. Er giebt den Sätzen zweyerley Formen, die eine wie die in (97.), nur in Worten mit den ihm eigenen Kunſtausdrücken, die andere durch Verhältniſſe der Sinus und Coſinus des vielfachen Winkels.

Vieta hat zwar eingeſehen, daß die poſitiven Wurzeln der Gleichung für die Chorde des einfachen Bogens, wenn die Chorde des vielfachen gegeben wird, Chorden von Winkeln ſind, die durch Theilung des mittelbar durch die Chorde gegebenen Winkels entſtehen, allein die negativen Wurzeln, die auf gleiche Art ſich finden, hat er aus der Acht gelaſſen. So giebt er (Opp. p. 320.) den Gleichungen für die Chorde des dritten, fünften und ſiebenten Theils eines durch die Chorde gegebenen Winkels nur zwey drey, vier Wurzeln. S. Algebra, Th. I. S. 46.

Jacob Bernoulli war von ſeinem Bruder, bey Veranlaſſung einer Unterſuchung über quadrirbare Räume in der Cykloide, aufgefordert worden, eine Formel für den Sinus eines Bogens zu finden, der zu einem andern, durch ſeinen Sinus gegebenen, Bogen das Ver-

hältniß n : 1 hat, wobey n irgend eine Gattung von Zahl bedeutet. Dieſer fand (Mem. de l'Ac. des Sc. 1702. Opp. T. II. nr. 97.) auf eine künſtliche Art, allein nur für ganze Vielfache, wenn x die Chorde des einfachen Bogens, a die Chorde des nfachen, b die Chorde des Complements des vielfachen iſt, für den Durchmeſſer = 2, daß

$$aa = nnxx - \frac{nn \cdot nn-1.}{3 \cdot 4} x^4 + \frac{nn \cdot nn-1 \cdot nn-4.}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^6 - \frac{nn \cdot nn-1 \cdot nn-4 \cdot nn-9.}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} x^8 + \text{etc.}$$

$$bb = 4 - nnx^2 + \frac{nn \cdot nn-1.}{3 \cdot 4} x^4 - \frac{nn \cdot nn-1 \cdot nn-4.}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^6 + \frac{nn \cdot nn-1 \cdot nn-4 \cdot nn-9.}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} x^8 - \text{etc.}$$

und hieraus, durch die Methode der unbeſtimmten,

$$a = nx - \frac{n \cdot nn-1.}{4 \cdot 6} x^3 + \frac{n \cdot nn-1 \cdot nn-9.}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} x^5 - \frac{n \cdot nn-1 \cdot nn-9 \cdot nn-25.}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} x^7 + \text{etc.}$$

$$b = 2 - \frac{nn}{4} x^2 + \frac{nn \cdot nn-4.}{4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 - \frac{nn \cdot nn-4 \cdot nn-16.}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} x^6 + \frac{nn \cdot nn-4 \cdot nn-16 \cdot nn-36.}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16} x^8 - \text{etc.}$$

Bernoulli verwandelt dieſe beiden Formeln in folgende

$$x^n - nx^{n-2} + \frac{n \cdot n-3.}{1 \cdot 2} x^{n-4} - \frac{n \cdot n-4 \cdot n-5.}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-6} + \frac{n \cdot n-5 \cdot n-6 \cdot n-7.}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-8} \ldots$$

$$\ldots \left\{ \begin{matrix} \pm nxa \mp \\ \pm nnxx \mp 2 \pm b \end{matrix} \right\} = 0.$$

Die obere Zeile zwiſchen den Klammern gilt für ein ungerades n, die untere für ein gerades.

Die beiden Formeln ſind einerley mit denen in (105.) gefundenen, wenn die Sinus und Coſinus in Chorden verwandelt werden.

Joh. Bernoulli trägt die Formel (130. I.) für die Relation zwiſchen den Chorden des einfachen und vielfachen Winkels, und die beiden in (97.), worin der Sinus und Coſinus des vielfachen durch Potenzen des Sinus und Coſinus des einfachen ausgedruckt werden, als von ihm erfundene vor, in den Act. Er. 1701. Opp. T. I. nr. 69. Die beiden letztern Formeln hatte aber ja ſchon Vieta gefunden, nur daß dieſer den Exponenten des vielfachen bloß für eine ganze Zahl nahm, dagegen Bernoulli ſagt, daß ſie auch für gebrochne, ja irrationale Vielfache des Winkels gelten, da die erſtere nur für ganze Vielfache anwendbar ſey. Sonſt hatte ja auch Vieta mehrerley Formeln für die Sinus und Coſinus vielfacher Winkel gefunden. In einem Aufſatze, Act. Er. 1722. Opp. T. II. nr. 127. behauptet Bernoulli, daß vor ihm niemand eine allgemeine Formel für die unbeſtimmte Theilung oder Vervielfachung der Winkel nach jedem Exponenten des Verhältniſſes gegeben hätte. Den Beweis habe er aus beſondern Urſachen zurückgehalten. Der Beweis iſt in ſeinen Werken nicht zu finden. In einem nachgelaſſenen Aufſatze, Opp. T. IV. pag. 144. ſagt er, daß er die beiden gedachten Formeln ohne Differentialrechnung, aus der Beſchaffenheit der Bogen (ex ipſis viſceribus et intima natura arcuum) hergeleitet habe.

In den Act. Erud. 1712. Opp. T. I. n. 89. gab Joh. Bernoulli die allgemeine Formel für tang nφ durch tang φ, hergeleitet aus der Verwandlung der Kreisbogen in unmögliche Logarithmen. Die Bemerkung dieſer für manche Fälle zur Abkürzung der Beweiſe dienenden Verwandtſchaft beiderley Größen iſt man Joh. Bernoulli ſchuldig. Mem. de l'Ac. des Sc. 1702. Opp. T. I. nr. 70. Aus der Formel für tang nφ läßt ſich

die Allgemeinheit der Formeln für ſin n φ und coſ n φ herleiten.

Bis noch in das 18te Jahrhundert hinein hatte man die goniometriſchen Lehrſätze nur in Beziehung auf geometriſche Conſtructionen entweder in Worten vorgetragen, oder ſymboliſche Bezeichnungen nur zur Abkürzung des Ausdrucks gebraucht. Friedrich Mayer, Akademiker in Petersburg, zeigte zuerſt, wie die Buchſtabenrechnung auf jene Sätze angewandt werden könnte, um ſie dadurch als analytiſche Formeln zur Auflöſung trigonometriſcher Aufgaben zu gebrauchen. (Comm. vet. Ac. Petrop. T. II. a. a. 1727.). Er fand die Coefficienten in den Formeln für die Chorde des vielfachen Winkels durch die Chorde des einfachen mittelſt der Summirung arithmetiſcher Reihen höherer Ordnungen, aus den berechneten Gliedern in den erſtern Stellen, und ſchloß daraus auf die Allgemeinheit, ſogar für gebrochne Exponenten. Comm. Petr. T. III.

Euler hat in der Folge die Form dieſer analytiſch-goniometriſchen Rechnung ſehr verbeſſert und geſchmeidig gemacht. Zur vollkommenen Anſchaulichkeit dienen die von ihm eingeführten Bezeichnungen, ſin φ, coſ φ, tang φ, ſec φ u. dergl. wodurch man mit dem Symbol zugleich das Bezeichnete unterſcheidend erkennt. Daß man die Verhältniſſe der Winkel dabey zugleich angeben kann, wie in ſin n φ, coſ m φ, u. dergl. erleichtert die Überſicht der Rechnung gar ſehr. Albert Girard im Anfang des XVII. Jahrhunderts hat ſchon zu Formeln der ſphäriſchen Trigonometrie dergleichen Bezeichnungen gebraucht, als tan H, ſec A, tan a, wo H die Hypotenuſe eines ſphäriſchen Dreyecks, A einen Winkel, a deſſen Ergänzung zum Rechten bedeuten (Käſtners Geſch. d. Math. III. S. 109.). Allein Girards Schrift iſt entweder zu wenig bekannt geworden, oder man hat ſeine Bezeichnungen bloß als Abkürzungen angeſehen, dergleichen jeder Geometer nach ſeiner Art macht, was ſie auch in der That nur ſind. Euler aber betrachtete die goniometriſchen Größen als Functionen der Winkel, die wie

andere analytiſche Functionen durch Rechnung mit einander verbunden werden können, die eine Bezeichnung erfordern, wodurch ihre Relation zu den Winkeln deutlich ins Auge fällt, ſo daß man auch die neuen Relationen zwiſchen den Winkeln und ihren zugehörigen Größen, die aus den angenommenen hervorgehen, daraus auf eine gleichmäßige Art herleiten könne. Als Functionen der Winkel müſſen die goniometriſchen Größen durch die Winkel beſtimmte Werthe erhalten. Das geſchieht dadurch, daß der Halbmeſſer zur Einheit genommen wird, oder daß man nur auf die Verhältniſſe zum Halbmeſſer ſieht, nicht auf die abſolute Quantität der lineariſchen Größen. Auch dieſes iſt man Eulern ſchuldig. Nach der alten Anſicht der goniometriſchen Functionen waren es bloße Linien, die man unter ſich und mit dem Halbmeſſer zu Gleichungen verknüpfte, auch mit andern Linien in Verbindung brachte, und hier den Halbmeſſer zur Einheit nehmen, war nur Erſparung im Schreiben, welche die Gleichartigkeit (Homogeneität) der Glieder zerſtörte. Nach der neuen, durch Euler eingeführten, ſind ſie Zahlgrößen, welche die Gleichartigkeit der Glieder nicht aufheben, die mit Beybehaltung ihrer urſprünglichen Form ſehr mannichfaltige Verwandlungen zulaſſen, und durch ſich ſelbſt darbieten. Euler ſelbſt, ſo anſpruchlos er bey allen ſeinen Entdeckungen und Verbeſſerungen in der Mathematik iſt, ſcheint doch auf die von ihm in die Analyſis eingeführte Rechnung mit den Functionen der Winkel einen beſondern Werth zu legen. In der Abhandlung, ſubſidium calculi ſinuum, Comm Petr. novi. T. V. ſagt er, ſo wie Joh. Bernoulli die Logarithmen durch die Exponentialrechnung zu analytiſchen Größen gemacht habe, ſo habe auch er die Sinus und Tangenten der Winkel zuerſt als Rechnungsgrößen behandelt, dergeſtalt daß man mit ihnen wie mit andern Größen ohne Schwierigkeit verfahren könne. Wenn gleich dieſe Sache nicht von großer Wichtigkeit ſcheinen möchte, da ſie größtentheils auf den Bezeichnungen beruhe, deren er ſich für dieſe Größen bediene, und die Regeln ſie ſowohl durch Differentiation als Integration zu

entwickeln, längſt gefunden ſeyn, ſo habe doch eben dieſe Bezeichnungsart hernach der ganzen Analyſis ſehr beträchtliche Hülfsmittel verſchafft, und ein faſt neues Feld eröffnet, welches mit großem Vortheil von den Geometern bearbeitet worden ſey. Da die Analyſis insbeſondere durch ihre Bezeichnungsart ſo viel Großes leiſte, ſo begreife man, wie eine geſchickte Einführung der Sinus in den Algorithmus ſo nützlich geworden ſey. Er führt hierauf noch an, daß durch dieſes Hülfsmittel ſchwere Unterſuchungen ſehr erleichtert werden, beſonders bey Aufgaben aus der Mechanik, und vorzüglich in der theoretiſchen Aſtronomie, wo man ohne die Hülfe der Rechnung mit den Winkel-Functionen gar nicht fertig werden könne.

Eulers Behandlung dieſes Algorithmus lernt man am beſten aus ſeiner Introductio in Analyſin infin. und ſeinen Inſtitt. Calculi differentialis kennen. Der erſte Theil des erſtern Werkes enthält größtentheils Cyklometrie und Goniometrie mit fruchtbaren neuen Anwendungen auf die Analyſis, als Zerlegung einer Function in Factoren, Summirungen von Reihen, Entwickelung gebrochner Functionen. In dem zweyten Theile der Differentialrechnung ſind ebenfalls mancherley Verknüpfungen der höhern Analyſis, und insbeſondere der Lehre von den Reihen mit den circularen Functionen anzutreffen. Die Differenzenrechnung wird auf die Entwickelung dieſer Functionen angewandt. Die Tangente und Cotangente eines Winkels werden durch Reihen mittelſt der Bernoulliſchen Zahlen ausgedruckt.

In den Schriften der Petersburger Akademie der Wiſſenſchaften ſind noch manche hierher gehörige Abhandlungen von Euler anzutreffen. Zur Berechnung des Kreisumfanges in den ältern Comment. T. IX. und in den Novis Actis, T. XI. Zur Berechnung der Sinus und Tangenten, in den ältern Comment. T. XI. den neuern T. V. Über Reihen von Sinus und Coſinus vielfacher Winkel, in den neuern Comment. T. XVIII. in den Novis Actis, T. VII. XI. Über die Werthe von Sinus und Coſinus vielfacher Winkel, in den N. A. T. V. IX.

Über Reihen von Winkeln, deren Tangenten nach einem gewiſſen Geſetze fortſchreiten, in den N. Comm. T. IX. Noch zur Auflöſung der Gleichung, $m : n = \sin m^2 : \sin n^2$, in den N. C. T. XVI.

Die Unterſuchung in der vorletzten Abhandlung von einer Fortſchreitung der Tangenten hat **Pfaff** weiter verfolgt und ſehr allgemein behandelt in ſeinen Disquiſitionibus analyticis, Vol. I. p. 1 — 132.

In der Abhandlung, dilucidationes ſuper formulis, quibus ſinus et coſinus angulorum multiplorum exprimi ſolent, N. A. T. IX. zeigt Euler, daß der vollſtändige Werth von $2 \cos n\varphi$, wenn $2 \cos \varphi = x$ geſetzt iſt

$$2 \cos n\varphi = x^n - \frac{n}{1} x^{n-2} + \frac{n.n-3.}{1.2} x^{n-4} - \frac{n.n-4.n-5.}{1.2.3} x^{n-6} + \text{etc.}$$

$$+ x^{-n} + \frac{n}{1} x^{-n-2} + \frac{n.n+3.}{1.2} x^{-n-4} + \frac{n.n+4.n+5.}{1.2.3} x^{-n-6} + \text{etc.}$$

wo die erſtere Reihe die für ganze n in (93.) gefundene iſt, außer daß $2x$ ſtatt x geſetzt worden. Die Doppelreihe gilt für jede Beſchaffenheit der Zahl n. Sie darf auch für ganze n in beiden Theilen ohne Ende fortgeſetzt werden, indem die Glieder von x^{-1} oder x^{-2}, etc. theils Null ſind, theils gegen die Glieder des zweyten Theils der Doppelreihe ſich heben.

Gleichfalls iſt, wenn $y = 2 \sin \varphi$, und wie vorher, $x = 2 \cos \varphi$, die vollſtändige allgemeine Reihe für $2 \sin. n\varphi$ dieſe,

$$2 \sin. n\varphi = y\left[x^{n-1} - \frac{n-2}{1} x^{n-3} + \frac{n-3.n-4.}{1.2} x^{n-5} - \text{etc.}\right]$$

$$-y\left[x^{-n-1} + \frac{n+2}{1} x^{-n-3} + \frac{n+3.n+4.}{1.2} x^{-n-5} + \text{etc.}\right]$$

Euler hat die Beweiſe dieſer Formeln aus einer ſehr entfernten Quelle geſchöpft, aus der Integration einer Differentialgleichung vom zweyten Grade. Fuß hat einen unmittelbaren Weg dazu gezeigt, in einer Abhandlung deſſelben Jahrgangs der Actorum novorum.

In den Novis Actis Acad. Petrop. T. VII. iſt eine Abhandlung von Euler über die Summen folgender Reihen enthalten:

$$A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi + \text{etc.} \quad \text{und}$$

$$B\sin\varphi + C\sin 2\varphi + D\sin 3\varphi + E\sin 4\varphi + \text{etc.}$$

die ſummirbar ſind, wenn die Reihe

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

es iſt. Es ſeyn A, B, C, D, etc. die Binomial-Coefficienten zu der Potenz $(1 + z)^n$ von 1 an, ſo iſt die Summe der erſtern Reihe $= 2^n \cos\frac{1}{2}\varphi^n . \cos\frac{1}{2} n\varphi$, und die Summe der zweyten $= 2^n \cos\frac{1}{2}\varphi^n . \sin\frac{1}{2} n\varphi$. Die Formeln ſind für jede Beſchaffenheit von n gültig.

Eſchenbach gab im J. 1785. zu Leipzig eine kleine Gelegenheitsſchrift heraus, worin er die Reihe für $\tan n\varphi$ durch $\tan\varphi$ bis zum 13ten Gliede entwickelte. Einen Auszug aus dieſer mit großem Fleiße abgefaßten Schrift hat Hindenburg in dem Leipziger Mag. für Mathematik, 2tem St 1786. geliefert, und daſelbſt noch eine andere (bereits oben Seite 563. erwähnte) Methode als die beiden von Eſchenbach gebrauchten ſind, gezeigt. Nämlich die Tangente von $n\varphi$ wird durch $n\varphi$ nach der Formel (Cyklometrie, 17.) ausgedruckt, und in dieſer der Bogen φ wieder durch ſeine Tangente (a. a. O. 10.). Hier wird es ſogar möglich, ein allgemeines Glied der Reihe anzugeben. Eine kleine Verbeſſerung in der Form des Gliedes iſt in dem Archiv der Mathematik, Heft VII. S. 343. nachgeholt.

Noch eine vierte Methode wäre folgende. In der allgemeinen Gleichung für $\sin n\varphi$ durch $\sin\varphi$ (105.) entwickele man die Potenzen von $\sin\varphi$ in Reihen durch $\tan\varphi$, vermittelſt der Formel, $\sin\varphi = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{(1 + \mathrm{tg}\,\varphi^2)}}$,

(14.). Ferner entwickele man den Werth von tang nφ durch ſin nφ, vermittelſt der Formel,

$$\text{tang}\, n\varphi = \frac{\sin n\varphi}{\sqrt{(1 - \sin n\varphi^2)}}.$$ Aus den beiden Reihen, der für ſin n φ durch tg φ, und der für tang n φ durch ſin nφ wird nach dem in combinatoriſcher Analyſis (39.) gewieſenen Verfahren eine Reihe für tg n φ durch tang φ hergeleitet.

Pfaff zeigt gelegentlich in einer Abhandlung über höhere Differentiale (Hindenburgiſche Sammlung ꝛc. II. S. 173.), wie aus der Formel für ſin n φ (84.), und der für coſ n φ (93.) vier andere Formeln ganz leicht hergeleitet werden können, durch Vertauſchung von φ mit $\frac{1}{2}\pi - \zeta$. Dadurch erhält man aus der für coſ n φ die Formeln in (105.), von welchen die zweyte mit der in (86.) dieſelbe iſt. Aus der für ſin n φ entſteht ſolchergeſtalt die in (89.), und noch folgende,

$$\cos n\zeta = \cos\zeta\left(1 - \frac{nn-1}{1.2}\sin\zeta^2 + \frac{nn-1.nn-9.}{1.2.3.4}, \sin\zeta^4 - \text{etc.}\right)$$

Der Verfaſſer beſchränkt ſich auf ganze Zahlwerthe von n. Da die Formeln (105.) allgemein für jede Beſchaffenheit von n gelten, ſo ſind auch jene erſtern (84. und 93.) allgemein. Das ſchließt aber nicht die von Euler und Fuß gefundene Ergänzung aus. Die Form der Reihen in (105.) iſt von der Form der Reihen (84. 93.) verſchieden. Jene geben den Quotienten ſin n φ : ſin φ, und coſ n φ : ſin φ für ein verſchwindendes φ vollſtändig durch das erſte Glied an; dieſe aber jenen Quotienten, und den, coſ n φ : coſ φ, durch eine unendliche Reihe, die divergirend ſeyn, und dadurch einer ebenfalls divergirenden Ergänzung bedürfen mag.

Goniometriſches Inſtrument, Goniometer, iſt überhaupt ein Werkzeug Winkel zu meſſen, insbeſondere die Neigung zweyer Ebenen gegen einander zu erfahren, als zu mineralogiſchen Unterſuchungen die Winkel der Flächen an Kryſtallen.

Goldne Regel (regula aurea) heißt bey den Rechenmeiſtern die Vorſchrift, wie aus drey Gliedern einer geometriſchen Proportion das vierte gefunden wird, ſ. Proportion.

Grad iſt für Kreisbogen und Winkel der 360ſte Theil des Kreisumfanges an jenen, von vier Rechten an dieſen. Die Eintheilung des Kreisumfanges in 360 Theile iſt uralt, vermuthlich daher entſtanden, daß man die Sonnenbahn in 360 Theile eintheilte, ſo wie man das Jahr in den älteſten Zeiten zu 360 Tagen rechnete. Ptolemäus nennt den 360ſten Theil des Kreiſes einen Theil (μοιρα); der ältere Plinius gebraucht auch allenthalben das Wort partes, wo wir gradus ſetzen würden. Die neulateiniſche Bedeutung des Wortes gradus (eigentlich Schritt und Stuffe) iſt aus der arabiſchen Sprache entſtanden. In dieſer heißt Dergeh eine Stuffe von einer Treppe oder Leiter, und dann auch ein aſtronomiſcher Grad. Als in dem mittlern Zeitalter die ſpaniſchen Mauren ihre Kenntniſſe dem öſtlichern Europa mittheilten, ward das lateiniſche Wort gradus wegen der Ähnlichkeit mit dem arabiſchen gebraucht, um aſtronomiſche Grade zu bezeichnen. Das franzöſiſche degré und das engliſche degree, ſind das arabiſche Wort noch deutlicher. Die Spanier haben das Wort grado in ihrer Sprache eingeführt, vermuthlich als ein arabiſch-lateiniſches Kunſtwort, noch früher als andere Völker. S. Käſtners geometriſche Abhandlungen. I. Samml. S. 458. Die hier angeführte Etymologie iſt demſelben von Tychſen zu Göttingen mitgetheilt.

Grad bey Potenzen iſt ihr Exponent.

Grad bey algebraiſchen Gleichungen iſt der Exponent der höchſten Potenz, ihrer unbekannten Größe.

La Grange's Lehrſatz iſt eine Formel, aus irgend einer Function einer veränderlichen Größe x jede Function von x durch jene Function, vermittelſt einer Reihe, auszudrucken, das iſt, aus der Function,

$$y = x - z\varphi x,$$

irgend eine Function ψx durch Functionen von y darzuſtellen. Die Symbole, φx, ψx, bedeuten irgend welche Functionen von x, oder Zuſammenſetzungen aus x und gegebenen Größen. Die Größe z iſt von x und y ganz unabhängig, eine beliebig zu beſtimmende Größe, die hier nur durch ein Zeichen für veränderliche Größen angedeutet wird, um ſie von den gegebenen Größen in der Function φx zu unterſcheiden. Sie iſt auch die Progreſſionalgröße, nach welcher die Reihe für ψx geordnet wird, weswegen ſie auch durch ein Symbol für veränderliche Größen bezeichnet werden mag.

Die Formel iſt die allgemeinſte Umkehrungsformel, oder vielmehr Umwandlungsformel. Zugleich iſt ſie die allgemeinſte Differenzenformel, da der erſte Theil von ψx die Function ψy iſt, und alle folgende Theile die Function φy, und davon abgeleitete Functionen enthalten.

1. Zuerſt wird man eine Formel für ψx durch ψy, und eine aus Functionen von x und y zuſammengeſetzte Reihe, zu ſuchen haben, um aus dieſer die Functionen von x wegzuſchaffen, alſo die Auflöſung auf einen Eliminationsprozeß zu bringen.

Es ſey

$$\psi x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc},$$
$$\psi y = A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \text{etc}.$$

Beide Reihen bedeuten einerley Functionen der veränderlichen Größe, und ſind nur in der Quantität der veränderlichen Größe verſchieden, wie z. B. die Reihen für $\sin\varphi$ und $\sin\omega$, oder für $\log z$ und $\log u$.

Jede einförmige Function von x kann durch eine nach ganzen Potenzen von x fortgehende Reihe ausgedruckt werden, weil die Werthe der Functionen als Glieder einer arithmetiſchen Reihe von irgend einem Grade, auch einem unendlich hohen, betrachtet werden können, wozu die Stellenzahlen die Werthe von x ſind. Die Reihe kann wenig convergent ſeyn, oder divergiren. Von der praktiſchen Anwendung iſt aber hier nicht die Frage.

Dazu muß ſie eine Form erhalten, daß die Coefficienten ſehr abnehmen, und die Werthe von x kleiner als die dazu gehörige Einheit ſeyn. S. Differenzenrechnung, 16 — 18.

2. Man nehme das Differential, ∂y, unveränderlich, ſo iſt

$$\frac{\partial \psi y}{\partial y} = B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^3 + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^2 \psi y}{\partial y^2} = 2C + 6Dy + 12Ey^2 + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^3 \psi y}{\partial y^3} = 6D + 24Ey + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^4 \psi y}{\partial y^4} = 24E + \text{etc.}$$

Setzt man in den Werthen dieſer Differentialquotienten, $y = 0$, ſo iſt

$$B = \frac{\partial \psi y}{\partial y}; \qquad C = \frac{\partial^2 \psi y}{1.2\,\partial y^2}$$

$$D = \frac{\partial^3 \psi y}{1.2.3\,\partial y^3}; \quad E = \frac{\partial^4 \psi y}{1.2.3.4\,\partial y^4};$$

u. ſ. f.

Bey dieſer Annahme iſt $A = \psi y$. Setzt man nun $x = y + z\varphi x$, ſo iſt, bey derſelben Annahme, $x = z\varphi x$. Folglich iſt

$$\psi x = \psi y + z\varphi x . \frac{\partial \psi y}{\partial y} + z^2 (\varphi x)^2 . \frac{\partial^2 \psi y}{1.2.\partial y^2}$$

$$+ z^3 (\varphi x)^3 . \frac{\partial^3 \psi y}{1.2.3\,\partial y^3} + z^4 (\varphi x)^4 . \frac{\partial^4 \psi y}{1.2.3.4\,\partial y^4}$$

$+$ etc.

In der Encyclopédie méthodique (art. Series) wird dieſer Satz d'Alembert zugeſchrieben.

Nr

3. Nun ſind aus dieſer Formel die Functionen φx, $(\varphi x)^2$, $(\varphi x)^3$, etc. heraus zu ſchaffen. Dieſe haben eine ähnliche Form, wie die Functionen ψx, da die Beſchaffenheit dieſer Function ganz unbeſtimmt gelaſſen iſt, ſo daß ſtatt der Function ψy und deren Differentialen nun φy, $(\varphi y)^2$, $(\varphi y)^3$, etc. nach der Reihe zu ſetzen ſind. Zur Abkürzung ſetze man $\varphi y = u$, ſo iſt

$$\varphi x = u + z\varphi x . \frac{\partial u}{\partial y} + z^2 (\varphi x)^2 . \frac{\partial^2 u}{2\partial y^2}$$
$$+ z^3 (\varphi x)^3 . \frac{\partial^3 u}{6\partial y^3} + \text{etc.}$$

$$(\varphi x)^2 = u^2 + z\varphi x . \frac{\partial . u^2}{\partial y} + z^2 (\varphi x)^2 . \frac{\partial^2 . u^2}{2\partial y^2}$$
$$+ z^3 (\varphi x)^3 . \frac{\partial^3 . u^2}{6\partial y^3} + \text{etc.}$$

$$(\varphi x)^3 = u^3 + z\varphi x . \frac{\partial . u^3}{\partial y} + z^2 (\varphi x)^2 . \frac{\partial^2 . u^3}{2\partial y^2}$$
$$+ z^3 (\varphi x)^3 . \frac{\partial^3 . u^3}{6\partial y^3} + \text{etc.}$$

u. ſ. f.

4. Die Factoren zu den Potenzen von z in der Reihe für ψx, nach Herausſchaffung von x, ſeyn P^α, P^β, P^γ, P^δ, u. ſ. f wo α, β, γ, δ, etc. nicht Exponenten von Potenzen bedeuten, ſondern die Stellenzahlen von verſchiedenen Functionen der Größe y, übereinſtimmig mit den Exponenten der Potenzen von z, ſo daß

$$\psi x = \psi y + P^\alpha z + P^\beta z^2 + P^\gamma z^3 + P^\delta z^4 + \text{etc.}$$

Auf dieſelbe Art bezeichne man auch die Factoren der Potenzen von z in den entwickelten Functionen φx, $(\varphi x)^2$, $(\varphi x)^3$, etc.

nämlich

$$\varphi x = \varphi y + Q^{\alpha} z + Q^{\beta} z^2 + Q^{\gamma} z^3 + Q^{\delta} z^4 + \text{etc.}$$
$$(\varphi x)^2 = (\varphi y)^2 + R^{\alpha} z + R^{\beta} y^2 + R^{\gamma} z + R^{\delta} z^4 + \text{etc.}$$
$$(\varphi x)^3 = (\varphi y)^3 + S^{\alpha} z + S^{\beta} z^2 + S^{\gamma} z^3 + S^{\delta} z^4 + \text{etc.}$$
$$(\varphi x)^4 = (\varphi y)^4 + T^{\alpha} z + T^{\beta} z^2 + T^{\gamma} z^3 + T^{\delta} z^4 + \text{etc.}$$

u. ſ. w.

5. Man ſetze nun in der obigen Reihe (2.), die den Werth von ψx giebt, für φx und die Potenzen dieſer Function ihre Werthe aus (4), ſo iſt

$$\begin{aligned}
\psi x = {} & \psi y \\
& + [\varphi y + Q^{\alpha} z + Q^{\beta} z^2 + Q^{\gamma} z^3 + Q^{\delta} z^4 \\
& \qquad + \text{etc.}]\, z \frac{\partial \psi y}{\partial y} \\
& + [(\varphi y)^2 + R^{\alpha} z + R^{\beta} z^2 + R^{\gamma} z^3 + \text{etc.}] \times \\
& \qquad z^2 \frac{\partial^2 \psi y}{2 \partial y^2} \\
& + [(\varphi y)^3 + S^{\alpha} z + S^{\beta} z^2 + \text{etc.}]\, z^3 \frac{\partial^3 \psi y}{6 \partial y^3} \\
& + [(\varphi y)^4 + T^{\alpha} z + \text{etc.}]\, z^4 \frac{\partial^4 \psi y}{24 \partial y^4} \\
& + [(\psi y)^5 + \text{etc.}]\, z^5 \frac{\partial^5 \psi y}{120 \partial y^5} \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

6. Die begleitenden Factoren von z in den Partialreihen vergleiche man mit den gleichſtelligen der Reihe

$$\psi x = \psi y + P^{\alpha} z + P^{\beta} z^2 + P^{\gamma} z^3 + P^{\delta} z^4 + \text{etc.}$$

und ſetze zur Abkürzung:

$$\frac{\partial \psi y}{\partial y} = p; \qquad \frac{\partial^2 \psi y}{\partial y^2} = q \left(= \frac{\partial p}{\partial y}\right);$$
$$\frac{\partial^3 \psi y}{\partial y^3} = r \left(= \frac{\partial q}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial^4 \psi y}{\partial y^4} = s \left(= \frac{\partial r}{\partial y}\right);$$

$\frac{\partial^5 \psi y}{\partial y^5} = t \left(= \frac{\partial s}{\partial y}\right)$; u. ſ. f.

Dadurch iſt, indem $\varphi y = u$ geſetzt worden,

$P^\alpha = p . u$

$P^\beta = p . Q^\alpha + \frac{1}{2} q . u^2$

$P^\gamma = p . Q^\beta + \frac{1}{2} q . R^\alpha + \frac{1}{6} r . u^3$

$P^\delta = p . Q^\gamma + \frac{1}{2} q . R^\beta + \frac{1}{6} r . S^\alpha + \frac{1}{24} s . u^4$

$P^\epsilon = p . Q^\delta + \frac{1}{2} q . R^\gamma + \frac{1}{6} r . S^\beta + \frac{1}{24} s . T^\alpha + \frac{1}{120} t . u^5$

u. ſ. f.

7. Da für die Function ψx iſt $P^\alpha = \varphi y . \frac{\partial \psi y}{\partial y}$ ſo iſt die analoge Function in der Reihe für φx, nämlich $Q^\alpha = \varphi y . \frac{\partial \varphi y}{\partial y} = \frac{u \partial u}{\partial y} = \frac{\partial . u^2}{2 \partial y}$ (Differentialformeln, 1.). Dadurch iſt

$$P^\beta = \frac{p \partial . u^2}{2 \partial y} + \frac{q u^2}{2} = \frac{p \partial . u^2 + u^2 \partial p}{2 \partial y}$$

$$= \frac{\partial . p u^2}{2 \partial y} \text{ (a. a. O. 3.)}$$

8. Setzt man in dieſer Function ſtatt ψy die Function φy, alſo $\frac{\partial u}{\partial y}$ ſtatt p, ſo entſteht daraus die Function Q^β, nämlich $Q^\beta = \frac{\partial . u^2 \partial u}{2 \partial y^2} = \frac{\partial^2 . u^3}{6 \partial y^2}$.

Denn es iſt $\partial . u^3 = 3 u^2 \partial u$; alſo $\partial^2 . u^3 = \partial . 3 u^2 \partial u$.

Vertauſcht man ferner ψx mit $(\varphi x)^2$, alſo ψy mit $(\varphi y)^2$, ſo iſt $R^\alpha = u . \frac{\partial u^2}{\partial y} = \frac{2 u^2 \partial u}{\partial y} = \frac{2 \partial . u^3}{3 \partial y}$.

Aus dieſen Werthen von Q^β und R^α wird erhalten

$$P\gamma = \frac{p\,\partial^2 . u^3}{6\,\partial y^2} + \frac{2q\,\partial . u^3}{6\,\partial y} + \frac{ru^3}{6},$$

das iſt $P\gamma = \frac{\partial^2 . p u^3}{6\,\partial y^2}$.

(Differentio-Differentialformeln, 22.).

9. Durch die Vertauſchung von ψy mit φy, oder von p mit $\frac{\partial \varphi y}{\partial y}\left(=\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ iſt die mit $P\gamma$ analoge Function

$$Q\gamma = \frac{\partial^2 . u^3 \partial u}{6\,\partial y^3} = \frac{\partial^3 . u^4}{24\,\partial y^3}.$$

Ferner durch die Vertauſchung von ψy mit $(\varphi y)^2$, alſo von p mit $\frac{\partial . u^2}{\partial y}$, oder $\frac{2u\,\partial u}{\partial y}$, iſt

$$R\beta = \frac{2\,\partial . u^3 \partial u}{2\,\partial y^2} = \frac{\partial^2 . u^4}{4\,\partial y^2}.$$

Auch iſt durch die Vertauſchung von ψx mit $(\varphi x)^3$, und von ψy mit $(\varphi y)^3$, wodurch p mit $\frac{\partial . u^3}{\partial y}$ vertauſcht wird,

$$S\alpha = \frac{u\,\partial . u^3}{\partial y} = \frac{3u^3\partial u}{\partial y} = \frac{3\,\partial . u^4}{4\,\partial y}.$$

Dadurch iſt

$$P\delta = \frac{p\,\partial^3 . u^4}{24\,\partial y^3} + \frac{3q\,\partial^2 . u^4}{24\,\partial y^2} + \frac{3r\,\partial . u^4}{24\,\partial y} + \frac{su^4}{24},$$

oder $P\delta = \frac{\partial^3 . p u^4}{24\,\partial y^3}$.

(a. a. O. 23.)

Das Geſetz der Formation für die Functionen, welche die Potenzen von z in der Reihe für ψx begleiten, erhellt hieraus ſchon hinlänglich. Sie werden aus Functionen zuſammengeſetzt, die alle auf gleiche Art wie jene gebildet ſind.

10. Der allgemeine Beweis beruht darauf, daß zu zeigen iſt, wenn das Geſetz für alle Functionen, P^{α}, $P^{\beta} \ldots P^{\nu}$ gilt, es auch für $P^{\nu+1}$ gelte. Jenes angenommen, gilt es auch für die Functionen Q^{ν}, $R^{\nu-1}$, $S^{\nu-2}$, $T^{\nu-3}$, etc. die zu Potenzen von z, niedrigern als $z^{\nu+1}$, gehören, wobey anſtatt der Differential-Quotienten p, q, r, etc. die ſich auf ψy beziehen, die Differential-Quotienten in Beziehung auf φy, $(\varphi y)^2$, $(\varphi y)^3$, etc. oder u, u^2, u^3, etc. geſetzt werden.

Aus (4.) iſt

$$P^{\nu+1} = pQ^{\nu} + \tfrac{1}{2} q R^{\nu-1} + \tfrac{1}{6} r S^{\nu-2} + \tfrac{1}{24} s T^{\nu-3} \ldots + \frac{u^{\nu+1} \partial^{\nu} p}{1.2 \ldots (\nu+1) \partial y^{\nu}},$$

wo die Buchſtaben an der Spitze von P, Q, R, etc. bloße Ordnungs- oder Stellenzahlen ſind, in dem letzten Gliede aber u^{ν} und ∂y^{ν} Potenzen mit dem Exponenten ν ſind, und $\partial^{\nu} p$ das νte Differential von p iſt, ſo wie $q \partial y$ das erſte, $r \partial y^2$ das zweyte, u. ſ. w. ſind.

Zufolge der Vorausſetzung iſt

$$Q^{\nu} = \frac{\partial^{\nu-1}. u^{\nu} \partial u}{1.2 \ldots \nu \partial y^{\nu}} = \frac{1}{\nu+1} \cdot \frac{\partial^{\nu}. u^{\nu+1}}{1.2 \ldots \nu \partial y^{\nu}},$$

$$R^{\nu-1} = \frac{\partial^{\nu-2}. u^{\nu-1} \partial u^2}{1.2 \ldots (\nu-1) \partial y^{\nu-1}} = \frac{2}{\nu+1} \cdot \frac{\partial^{\nu-1}. u^{\nu+1}}{1.2 \ldots (\nu-1) \partial y^{\nu-1}},$$

$$S^{\nu-2} = \frac{\partial^{\nu-3}. u^{\nu-2} \partial. u^3}{1.2 \ldots (\nu-2) \partial y^{\nu-2}} = \frac{3}{\nu+1} \cdot \frac{\partial^{\nu-2}. u^{\nu+1}}{1.2 \ldots (\nu-2) \partial y^{\nu-2}},$$

$$T^{\nu-3} = \frac{\partial^{\nu-4}. u^{\nu-3} \partial. u^4}{1.2 \ldots (\nu-3) \partial y^{\nu-3}} = \frac{4}{\nu+1} \cdot \frac{\partial^{\nu-3}. u^{\nu+1}}{1.2 \ldots (\nu-3) \partial y^{\nu-3}},$$

u. ſ. w.

Die zweyte Form dieſer Functionen beruht darauf, daß $u^m \partial . u^n = n u^{m+n-1} \partial u = \frac{n}{m+n} \partial . u^{m+n}$ iſt.

Daher iſt $\partial . u^m \partial . u^n = \frac{n}{m+n} \partial \partial . u^{m+n}$

$= \frac{n}{m+n} \partial^2 . u^{m+n}$, und eben ſo $\partial^\mu . u^m \partial . u^n$

$= \frac{n}{m+n} \partial^{\mu+1} . u^{m+n}$.

Aus dieſen Werthen von Q^ν, $R^{\nu-1}$, $S^{\nu-2}$, etc. folgt

$$P^{\nu+1} = \Bigg[\frac{p \partial^\nu . u^{\nu+1}}{\partial y^\nu} + \frac{\nu}{1} . \frac{q \partial^{\nu-1} . u^{\nu+1}}{\partial y^{\nu-1}}$$

$$+ \frac{\nu . \nu-1 .}{1 . 2} . \frac{r \partial^{\nu-2} . u^{\nu+1}}{\partial y^{\nu-2}} + \frac{\nu . \nu-1 . \nu-2 .}{1 . 2 . 3} . \frac{s \partial^{\nu-3} . u^{\nu+1}}{\partial y^{\nu-3}}$$

$$+ \frac{\nu . \nu-1 . \nu-2 . \nu-3 .}{1 . 2 . 3 . 4} . \frac{t \partial^{\nu-4} . u^{\nu+1}}{\partial y^{\nu-4}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\nu \ldots 1}{1 \ldots \nu} . \frac{\partial^\nu p}{\partial y^\nu} . u^{\nu+1} \Bigg] \frac{1}{1 . 2 \ldots (\nu+1)} .$$

Es iſt in dem Artikel, Differentio-Differentialrechnung (23.) gezeigt, daß

$$\partial^n . xy = x . \partial^n y + \frac{n}{1} \partial x . \partial^{n-1} y$$

$$+ \frac{n . n-1 .}{1 . 2} \partial^2 x . \partial^{n-2} y + \frac{n . n-1 . n-2 .}{1 . 2 . 3} \partial^3 x . \partial^{n-3} y + \ldots$$

$$+ \ldots + n \partial^{n-1} x . \partial y + \partial^n x . \partial y .$$

In unſerer Formel ſteht nun $u^{\nu+1}$ für y; p für x; ferner $q \partial y$ oder ∂p für ∂x; ferner $r \partial y^2$ oder $\partial q \partial y$ für $\partial^2 x$; ferner $s \partial y^3$ ($= \partial r \partial y^2 = \partial^2 q \partial y = \partial^3 p$) für $\partial^3 x$, u. ſ. f.

Alſo iſt

$$P^{\nu+1} = \frac{\partial^{\nu} . pu^{\nu+1}}{1.2\ldots(\nu+1)\partial y^{\nu}},$$

welches dieſelbe Form mit der für die Functionen P^{α} bis P^{ν} angenommenen iſt.

11. Es iſt alſo, wenn $y = x - z\varphi x$ geſetzt, und $\frac{\partial\psi y}{\partial y}$ durch p zur Abkürzung und Deutlichkeit bezeichnet wird,

$$\psi x = \psi y + z . p\varphi y + z^2 . \frac{\partial . p(\varphi y)^2}{1.2\partial y}$$

$$+ z^3 . \frac{\partial^2 . p(\varphi y)^3}{1.2.3\partial y^2} + z^4 . \frac{\partial^3 . p(\varphi y)^4}{1.2.3.4\partial y^3}$$

$$+ z^5 . \frac{\partial^4 . p(\varphi y)^5}{1..5\partial y^4} + \text{etc.}$$

12. Man ſieht, daß dieſer Lehrſatz der erweiterte Taylorſche iſt. Nach dieſem wird eine Function von $y + z$, oder $\psi(y + z)$, durch die Reihe,

$$\psi y + pz + \tfrac{1}{2} qz^2 + \tfrac{1}{6} rz^3 + \tfrac{1}{24} sz^4 + \text{etc.}$$

ausgedruckt, wo $p = \frac{\partial\psi y}{\partial y}$; $q = \frac{\partial p}{\partial y}$; $r = \frac{\partial q}{\partial y}$, u. ſ. f. iſt. (Differenzenrechnung, 17.). Die Größe z iſt eine willkührliche von y unabhängige Veränderung dieſer Functionalgröße. In dem von la Grange gegebenen Lehrſatze kommt ſtatt z eine Function einer veränderlichen Größe x, mit einer willkührlichen Größe multiplicirt, ſo daß $y + z\varphi x = x$ iſt, und die Function $\psi(y + z\varphi x)$ wird hier ebenfalls durch Functionen von y entwickelt. Die Differentialquotienten p, q, r, s, etc. erhalten nun gewiſſe Modificationen durch die Function φy.

13. La Grange iſt durch eine Unterſuchung von Lambert veranlaßt worden, Reihen für die Wurzeln algebraiſcher Gleichungen und ihrer Potenzen zu ſuchen,

welches ihn auf ſeine allgemeine Umkehrungs- oder Umwandlungsformel führte. Lambert erzählt in einer Abhandlung, Obſervations analytiques, Mem. de l'Ac. de Berlin, 1770, daß er in den Actis Helvet. 1757. einfache Reihen für die Wurzeln der Gleichungen vom zweyten und dritten Grade gegeben habe, insbeſondere eine Reihe für die Wurzel der Gleichung $x^m + px = q$. Im J. 1764 erweiterte er ſeine Unterſuchungen, und theilte ſie Eulern und la Grange mit. Der letztere nahm ſie in großer Allgemeinheit vor, in der Abhandlung, nouvelle méthode pour reſoudre les équations littérales par le moyen des ſéries. Mem. de l'Ac. de Berlin, 1768; überſetzt in Michelſens Sammlung, S. 190 — 270. Er findet aber durch eine mühſame Rechnung, nach einem künſtlichen Verfahren eine Reihe für die mte Potenz einer der Wurzeln der Gleichung, $o = a - bx + cx^2 - dx^3 + \text{etc.}$ Dieſer Gleichung giebt er die Form,

$$a - bx + bx\xi = o.$$

Eine der Wurzeln ſey p, ſo iſt

$$p^m = x^m + m\left(\xi x^m + \frac{\partial . \xi^2 x^{m+1}}{2\partial x} + \frac{\partial^2 . \xi^3 x^{m+2}}{2.3\partial x^2} + \text{etc.}\right)$$

wo nach der Differentiation für x zu ſetzen iſt $\frac{a}{b}$.

Hieraus ſchließt la Grange, doch ohne einen Beweis davon zu geben, erſtlich, daß man für die Function $x\xi$, welche zuerſt die endliche oder unendliche Reihe $\frac{cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \text{etc.}}{b}$ war, jede andere Function von x ſetzen könne; darauf ferner, daß man anſtatt einer Potenz der Wurzel p zu der Gleichung,

$$\alpha - x + \varphi x = o,$$

jede Function derſelben, ψp, ſetzen könne. Er druckt

ſeinen Lehrſatz folgendergeſtalt aus. Es ſey p eine der Wurzeln dieſer Gleichung, ψ p irgend eine Function derſelben, und zur Abkürzung $\frac{\partial . \psi x}{\partial x} = \psi' x$, ſo iſt

$$\psi p = \psi x + \varphi x \psi' x + \frac{d . (\varphi x)^2 \psi' x}{2 \partial x}$$

$$+ \frac{d^2 . (\varphi x)^3 \psi' x}{2 . 3 \partial x^2} + \frac{\partial^3 (\varphi x)^4 \psi' x}{2 . 3 . 4 \partial x^3} + \text{etc.}$$

wo nach der Differentiation α ſtatt x zu ſetzen iſt.

13. Der Lehrſatz iſt hier eine algebraiſche Auflöſungsformel. Bald hernach hat la Grange den Satz zu einer analytiſchen Formel für zwey veränderliche Größen gemacht, da er ſtatt der beſtimmten Größe α eine veränderliche ſetzte, ſo daß die Gleichung iſt

$$t = x + \varphi x,$$

aus welcher jede Function, von x, ψx, durch Functionen von t darzuſtellen iſt. Dieſes leiſtete er in einer lehrreichen Abhandlung über das Keplerſche Problem. Mém. de l' Ac. de Berlin, 1769.

Lambert bringt in der angeführten Abhandlung vom J. 1770. die la Grangiſche Formel auch heraus, aber auf einem ganz andern Wege, und beſchäftigt ſich daſelbſt noch weiter mit dieſer Unterſuchung.

14. La Place hat durch die Methode der partiellen Differentiale, nach einem beſondern Verfahren, den Lehrſatz bewieſen. Zu dieſem Beweiſe war es nöthig noch eine veränderliche Größe einzuführen, welche der zu der Function φx geſetzte Factor iſt, der aber in der Formel ſelbſt wieder zu einer gegebenen unveränderlichen Größe wird. Der Beweis wird in dem Artikel, partielle Differentiale, mit Erläuterungen vorgetragen werden. Die Entwickelung der Formel giebt la Place in der Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planétes, à Paris 1784. pag. 14. ſq. Man ſehe auch die Mem. de l'Acad. des Sc. a. 1777; ferner Couſin

Introd. à l'étude de l'aſtronomie phyſique, à Paris 1787, pag. 15 ſq. und Lacroix traité du calcul diff. et intégral, T. I. §. III. ſq.

La Grange ſelbſt hat in der Théorie des fonctions analytiques nr. 97. ſſ. nach einem etwas andern Verfahren, aber doch auch durch partielle Differentiale, ſeinen Lehrſatz erwieſen. Dieſen Beweis hat J. W. Pfaff ferner entwickelt, und mit Zuſätzen erweitert, in der von Hindenburg herausgegebenen Sammlung combinatoriſch-analytiſcher Abhandlungen, Th. II. Abh. VII.

Lexell hat in den Novis Comm. Petr. T. XVI. den Beweis der Formel ſo geführt, daß er ſie als richtig annimmt, und zeigt, daß, wenn die Glieder der Reihe für ψx alle durch x ausgedruckt werden, ſich alles aufhebt, bis auf das erſte Glied ψx. Dies wäre alſo, was die Alten einen theoretiſch-analytiſchen Beweis nannten, wobey man aber nicht ſieht, wie man zu dem Satze ſelbſt gekommen ſeyn möchte, der alſo mehr zur Erläuterung dient, als zur Begründung. S. Beweis, und Analyſis als Methode.

J. F. Pfaff hat zuerſt in dem Hindenburgiſchen Archiv den Mathematik, 1. Heft, Abh. VI. und hernach in den Disquiſit. analyticis, in tractatu de reverſione ſerierum, §. IV – VIII. einen Beweis gegeben, mit welchem der in dieſem Artikel von mir geführte im weſentlichen übereinkommt. In der Form habe ich einiges geändert. Den Taylorſchen Lehrſatz habe ich nicht unmittelbar, wie es dort geſchehen iſt, gebraucht, und habe durch die Reihen in (4.) die analogen Functionen für φx und die Potenzen von φx, daraus ferner die geſuchten Functionen, die begleitenden zu den Potenzen von z, ganz einleuchtend beſtimmt.

In eben dieſer Abhandlung (S. 238.) iſt von noch zwey Beweiſen des Lehrſatzes Anzeige geſchehen. Einer iſt von dem P. Canovrai in den Abhandlungen der Akademie von Siena, T. VII.; ein zweyter von Condorcet in den Sammlungen der Turiner Geſellſchaft, T. V. Der letztere iſt dem Pfaffiſchen ähnlich; die Fun-

ction φx hat darin aber nicht den Factor z. In dem Artikel, Series, der franzöſiſchen Encyklopädie, welcher Condorcet zum Verfaſſer hat, iſt dieſer Beweis, aber nur ganz kurz in wenigen Zeilen, vorgetragen.

Es wird nöthig ſeyn, den Lehrſatz durch einige Beiſpiele zu erläutern.

15. Aus der Gleichung, $\omega = \psi + e \sin \psi$, den Winkel ψ durch ω darzuſtellen. Es iſt hier ω der Winkel, welcher in der Aſtronomie die mittlere Anomalie heißt, und ψ die Anomalie des Excentri (circuli), wo die Winkel von der Sonnenferne an genommen werden. Die Excentricität der Bahn iſt $= e$.

Man ſetze ſtatt,

$$y,\ x,\quad z,\ \varphi x,\ \psi x,\ \psi y,\ \varphi y,$$

in (11.) hier

$$\omega,\ \psi,\ -e,\ \sin\psi,\ \psi,\ \omega,\ \sin\omega,$$

ſo iſt $p = \frac{\partial \omega}{\partial \omega} = 1$, und

$$\psi = \omega - e \sin \omega + \frac{e^2}{1.2} \cdot \frac{\partial \sin \omega^2}{\partial \omega} - \frac{e^3}{1.2.3} \cdot \frac{\partial^2 . \sin \omega^3}{\partial \omega^2}$$

$$+ \frac{e^4}{1.2.3.4} \cdot \frac{\partial^3 . \sin \omega^4}{\partial \omega^3} - \frac{e^5}{1..5} \cdot \frac{\partial^4 . \sin \omega^5}{\partial \omega^4}$$

$$+ \text{etc.}$$

Nun iſt (Goniometrie, 137.)

$$2 \sin \omega^2 = \tfrac{2}{2} - \cos 2\omega.$$

$$4 \sin \omega^3 = 3 \sin \omega - \sin 3\omega.$$

$$8 \sin \omega^4 = \frac{4 \cdot 3}{2 . 2} - 4 \cos 2\omega + \cos 4\omega.$$

$$16 \sin \omega^5 = \frac{5 . 4}{1 . 2} \sin \omega - 5 \sin 3\omega + \sin 5\omega.$$

$$32 \sin \omega^6 = \frac{6 . 5 . 4}{2 . 2 . 3} - \frac{6 . 5}{1 . 2} \cos 2\omega + 6 \cos 4\omega - \cos 6\omega.$$

etc.

Daher iſt (Differentio = Differentialrechnung 9).

$$\frac{\partial.\sin\omega^2}{\partial\omega} = +\tfrac{1}{2}.2\sin 2\omega.$$

$$\frac{\partial^2.\sin\omega^3}{\partial\omega^2} = -\tfrac{1}{4}(3\sin\omega - 3^2.\sin 3\omega).$$

$$\frac{\partial^3.\sin\omega^4}{\partial\omega^3} = -\tfrac{1}{8}(4.2^2\sin 2\omega - 4^3\sin 4\omega).$$

$$\partial^4.\sin\omega^5 = +\tfrac{1}{16}\left(\frac{5.4}{1.2}\sin\omega - 5.3^4\sin 3\omega + 5^4\sin 5\omega\right).$$

etc.

Dadurch wird

$$\psi = \omega - e\sin\omega + \frac{e^2}{2.2}\,2.\sin 2\omega$$
$$+ \frac{e^3}{4.2.3}(3\sin\omega - 3^2\sin 3\omega)$$
$$+ \frac{e^4}{8.2.3.4}(4.2^3\sin 2\omega - 4^3\sin 4\omega)$$
$$- \frac{e^5}{16.2.3.4.5}\left(\frac{5.4}{1.2}\sin\omega - 5.3^4\sin 3\omega + 5^4\sin 5\omega\right)$$
$$+ \frac{e^6}{32.2.3.4.5.6}\left(\frac{6.5}{1.2}2^5\sin 2\omega - 6.4^5\sin 4\omega + 6^6\sin 6\omega\right)$$
$$+ \text{etc.}$$

16. II. Exempel. Der Radius Vector, r, in der Ellipſe iſt, $r = 1 + e\cos\psi$, wenn die halbe große Axe $= 1$ geſetzt wird, ſ. unten 22. Hier iſt $\cos\psi$ diejenige Function von ψ, welche aus der Gleichung $\omega = \psi + e\sin\psi$ durch ω auszudrucken iſt.

Man ſetze nun in (11.) ſtatt

$$y, \quad x, \quad z, \quad \varphi x, \quad \psi x, \quad \psi y, \quad \varphi y$$

hier

$$\omega, \quad \psi, \quad -e, \quad \sin\psi, \quad \cos\psi, \quad \cos\omega, \quad \sin\omega,$$

ſo iſt daſelbſt $p = \frac{\partial \cos\omega}{\partial\omega} = -\sin\omega$, alſo

$$\cos\psi = \cos\omega + e\sin\omega^2 + \frac{e^2}{1.2} \cdot \frac{\partial . -\sin\omega^3}{\partial\omega} - \frac{e^3}{1.2.3} + \frac{\partial^2 . -\sin\omega^4}{\partial\omega^2} + \frac{e^4}{1.2.3.4} \cdot \frac{\partial^3 . -\sin\omega^5}{\partial\omega^3} - - \text{etc.}$$

Setzt man hier ſtatt der negativen Potenzen von $\sin\omega$ die poſitiven, ſo werden die Differertiale ihrer Werthe entgegengeſetzt, weswegen die Vorzeichen der Glieder in die entgegengeſetzten zu verwandeln ſind. Verfährt man hier wie in (15.), ſo iſt

$$r = 1 + e\cos\omega - \frac{e^2}{2}(-1 + \cos 2\omega)$$

$$- \frac{e^3}{4.2}(3\cos\omega - 3\cos 3\omega)$$

$$+ \frac{e^4}{8.2.3}(4.2^2\cos 2\omega - 4^2\cos 4\omega)$$

$$+ \frac{e^5}{16.2.3.4}\left(\frac{5.4}{1.2}\cos\omega - 5.3^3\cos 3\omega + 5^3\cos 5\omega\right)$$

$$- \frac{e^6}{32.2.3.4.5}\left(\frac{6.5}{1.2}.2^4\cos 2\omega - 6.4^4\cos 4\omega + 6^4\cos 6\omega\right)$$

$$+ \text{etc.}$$

17. III. Exempel. Die wahre Anomalie ſey $= \varphi$, die halbe kleine Axe $= m = \sqrt{(1 - e^2)}$, ſo iſt $\tang \frac{1}{2}\varphi = \frac{m}{1+e} \tang \frac{1}{2}\psi$, (ſ. unten 23.). Hier iſt $\tang \frac{1}{2}\psi$ die Function, welche durch ω auszudrucken iſt.

Man ſetze ſtatt

$$y,\ x,\ z,\ \varphi x,\ \psi x,\ \psi y,\ \varphi y$$

in (11.) hier

$$\omega\ \psi,\ -e,\ \sin\psi,\ \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\psi,\ \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\omega,\ \sin\omega,$$

ſo iſt daſelbſt (Different. Formeln, 38.)

$$p = \frac{\partial . \mathrm{tang}\frac{1}{2}\omega}{\partial\omega} = \frac{1}{2\cos\frac{1}{2}\omega^2}.$$

Ferner $p \sin\omega = \mathrm{tang}\frac{1}{2}\omega.$

$$p\sin\omega^2 = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega^2 = 1 - \cos\omega.$$

$$p\sin\omega^3 = \sin\omega - \tfrac{1}{2}\sin 2\omega.$$

$$p\sin\omega^4 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\cos\omega - \tfrac{1}{2}\cos 2\omega + \tfrac{1}{4}\cos 3\omega.$$

$$p\sin\omega^5 = \tfrac{3}{4}\sin\omega - \tfrac{1}{4}\sin 2\omega - \tfrac{1}{4}\sin 3\omega + \tfrac{1}{8}\sin 4\omega.$$

$$p\sin\omega^6 = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{8}\cos\omega - \tfrac{1}{2}\cos 2\omega + \tfrac{3}{16}\cos 3\omega + \tfrac{1}{8}\cos 4\omega - \tfrac{1}{16}\cos 5\omega.$$

etc.

Nun iſt

$$\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\psi = \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\omega - ep\sin\omega + \frac{e^2}{1.2}.\frac{\partial . p\sin\omega^2}{\partial\omega} - \frac{e^3}{1.2.3}.\frac{\partial^2 . p\sin\omega^3}{\partial\omega^2} + \frac{e^4}{1.2.3.4}.\frac{\partial^3 . p\sin\omega^4}{\partial\omega^3} - \text{etc.}$$

Nimmt man die hier angeſetzten Differentiale von den gleich vorher angegebenen Werthen, ſo iſt

$$\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\psi = (1-e)\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\omega + \frac{e^2}{1.2}.\sin\omega$$

$$+ \frac{e^3}{2.2.3}(2\sin\omega - 2^2\sin 2\omega)$$

$$- \frac{e^4}{4.2.3.4}(\sin\omega + 2.2^3\sin 2\omega - 3^3\sin 3\omega$$

$$- \frac{e^5}{8.2.3.4.5}(6\sin\omega - 2.2^4\sin 2\omega - 2.3^4\sin 3\omega + 4^4\sin 4\omega)$$

$$+\frac{e^6}{16\,.\,1\,.\,.\,6}(2\sin\omega+8\,.\,2^5\sin 2\omega-3\,.\,3^5\sin 3\omega-2\,.\,4^5\sin 4\omega+5^5\sin 5\omega)$$

— etc.

Dieſe Reihe mit $\frac{m}{1+e}$, oder $\frac{\sqrt{(1-ee)}}{1+e}$, oder $\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$ multiplicirt giebt tang $\frac{1}{2}\varphi$.

18. IV. Exempel. Man ſucht die wahre Anomalie φ ſelbſt unmittelbar durch die mittlere ω. Es iſt φ keine durch einen vollſtändigen Ausdruck von ψ angebbare Function dieſes Winkels. Es iſt aber $\partial\varphi=\frac{m\,\partial\psi}{1+e\cos\psi}$, (unten 24.), alſo $\varphi=m\int\frac{\partial\psi}{1+e\cos\psi}$, welches Integral nicht anders als durch eine unendliche Reihe zu erhalten iſt. Demnach iſt ſtatt der Function ψx, in (11.) hier zu ſetzen $m\int\frac{\partial\psi}{1+e\cos\psi}$. Eine ſolche Function wie φ von ψ iſt, iſt die Function ψy in (11.) von y, ſo daß ſtatt ψy daſelbſt hier kommt $m\int\frac{\partial\omega}{1+e\cos\omega}$. Dadurch iſt nun $p=\frac{m}{1+e\cos\omega}$. Es iſt alſo

$$\varphi=m\int\frac{\partial\omega}{1+e\cos\omega}-\frac{me\sin\omega}{1+e\cos\omega}$$

$$+\frac{me^2}{1.2}\left(\partial^3.\frac{\sin\omega^2}{1+e\cos\omega}\right):\partial\omega-\frac{me^3}{1.2.3}\left(\partial^2.\frac{\sin\omega^3}{1+e\cos\omega}\right):\partial\omega^2$$

$$+\frac{me^4}{1.2.3.4}\left(\partial^3.\frac{\sin\omega^4}{1+e\cos\omega}\right):\partial\omega^3-\text{etc.}$$

Die Glieder dieſer Reihe geben jedes wieder eine Rei-he. Man entwickele ſowohl den Quotienten $\frac{1}{1 + e\cos\omega}$ in eine Reihe, als die Wurzelgröße $m = \sqrt{(1 - e^2)}$, wiewohl auch letztere unentwickelt bleiben mag, da ſie unmittelbar durch den numeriſchen Werth von e gegeben wird. In dem Quotienten $\frac{1}{1 + e\cos\omega}$, der nach den Potenzen von e und $\cos\omega$ fortgeht, müſſen die Potenzen von $\cos\omega$ in Coſinus der Vielfachen von ω verwandelt werden, theils wegen der Integration bey dem erſten Gliede, theils wegen der Differentiation bey den folgenden.

Es iſt

$$\frac{1}{1 + e\cos\omega} = 1 - e\cos\omega + e^2 \cos\omega^2 - e^3 \cos\omega^3 + \text{etc.}$$

$$= 1 - e\cos\omega + \tfrac{1}{2} e^2 (1 + \cos 2\omega)$$

$$- \tfrac{1}{4} e^3 (3\cos\omega + \cos 3\omega) + \tfrac{1}{8} e^4 (3 + 4\cos 2\omega + \cos 4\omega)$$

$$- \tfrac{1}{16} e^5 (10\cos\omega + 5\cos 3\omega + \cos 5\omega)$$

$$+ \tfrac{1}{32} e^6 (10 + 15\cos 2\omega + 6\cos 4\omega + \cos 6\omega)$$

$+$ etc. (Goniometrie 141.)

Zu den Gliedern dieſer Reihe ſetze man den Differentialfactor $\partial\omega$, und nehme die Integrale, nach der Formel, $\cos\varphi . \partial\varphi = \partial \sin\varphi$, oder $n\cos n\varphi . \partial\varphi = \partial \sin n\varphi$, woraus folgt $\int \cos n\varphi . d\varphi = \frac{\sin n\varphi}{n}$. So wird das erſte Glied von φ erhalten.

Man multiplicire hierauf die Reihe für den Quotienten $\frac{1}{1 + e\cos\omega}$ mit $e\sin\omega$, und verwandle die Producte, wie $\cos n\omega . \sin\omega$, in das Aggregat,

$$\tfrac{1}{2}\sin(n + 1)\omega - \tfrac{1}{2}\sin(n - 1)\omega,$$

(Goniometrie, 27.). Dieſe Rechnung giebt das zweyte Glied der Reihe für φ.

Es

Dieſes Glied multiplicire man mit $\frac{1}{2}$ e ſin ω, und verwandle die Producte je zweyer Sinus, wie ſin n ω . ſin ω in das Aggregat $\frac{1}{2}$ coſ (n — 1) ω — $\frac{1}{2}$ coſ (n + 1) ω. Das Aggregat aller Theile bezeichne man durch (A).

Dieſes multiplicire man mit $\frac{1}{3}$ e ſin ω, und verwandle die Producte, wie coſ n ω . ſin ω, in die Differenz zweyer Sinus. Das Aggregat ſey (B).

Dieſes multiplicire man mit $\frac{1}{4}$ e ſin ω, und verwandle das Product je zweyer Sinus in die Differenz zweyer Coſinus. Das Aggregat ſey (C).

Auf dieſe Weiſe fahre man fort, bis man zu derjenigen Potenz von e gelangt, bey welcher man ſtehen bleiben will, ſo wie man in jedem der Aggregate die Rechnung nicht weiter als bis zu dieſer Potenz von e treibt.

Die Reihe (A) wird einmahl differentiirt; der Differentialfactor, der die Sinus von Vielfachen des W. ω enthält, iſt das dritte Glied von $\frac{1}{m}\varphi$.

Die Reihe (B) wird zweymahl differentiirt, nach der Formel, $\partial^2 . \text{ſin}\,\omega = -\text{ſin}\,\omega . \partial\omega^2$, oder $\partial^2 . \text{ſin}\,n\omega = -n^2\, \text{ſin}\,n\omega . \partial\omega^2$. Der Differentialfactor giebt das vierte Glied der Reihe für $\frac{1}{m}\varphi$.

Die Reihe (C) wird dreymahl differentiirt, nach der Formel, $\partial^3 . \text{coſ}\,n\omega = +n^3\, \text{ſin}\,n\omega . \partial\omega^3$. Der Differentialfactor giebt das fünfte Glied der Reihe für $\frac{1}{m}\varphi$.

Auf dieſe Weiſe fährt man nach den Formeln in dem Artikel, Differentio-Differentialgleichung (9.) fort. Es iſt

$$\partial^4 . \text{ſin}\,n\omega = +n^4 . \text{ſin}\,n\omega . \partial\omega^4.$$

$$\partial^5 . \text{coſ}\,n\omega = -n^5 . \text{ſin}\,n\omega . \partial\omega^5.$$

$$\partial^6 . \text{ſin}\,n\omega = -n^6 . \text{ſin}\,n\omega . \partial\omega^6.$$

$$\partial^7 . \text{coſ}\,n\omega = +n^7 . \text{ſin}\,n\omega . \partial\omega^7.$$

etc.

Nimmt man alle Reihen zuſammen, mit ſorgfältiger Beobachtung der Vorzeichen, und ordnet die Glieder

entweder nach den Potenzen von e, oder nach den Vielfachen von ω durch ihre Sinus, ſo erhält man den Werth von $\frac{1}{m}\varphi$ bis zu der angenommenen Gränze. Multiplicirt man dieſen durch m, oder mit dem Werthe von m, nämlich $1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 -$ etc. ſo iſt der Werth der wahren Anomalie φ durch die mittlere ω, und Sinus der Vielfachen von ω ausgedrückt.

19. Wird die Multiplication mit dem Werthe von m vorgenommen, ſo iſt

$$\varphi = \omega - 2e\sin\omega + \frac{5}{4}e^2\sin 2\omega$$
$$+ \frac{1}{12}e^3(3\sin\omega - 13\sin 3\omega)$$
$$- \frac{1}{96}e^4(44\sin 2\omega - 103\sin 4\omega)$$
$$- \frac{1}{960}e^5(50\sin\omega - 645\sin 3\omega + 1097\sin 5\omega)$$
$$+ \text{etc.}$$

Dieſer von mir berechnete Werth trifft mit dem von Cagnoli in ſeiner Trigonometrie, nr. 771 überein. Die Annäherung in der von ihm daſelbſt mitgetheilten Formel für φ iſt bis zur neunten Potenz von e getrieben.

La Grange hat der Formel für φ eine andere Geſtalt gegeben. Es kommen in derſelben Potenzen von m oder $\sqrt{(1 - ee)}$ als Diviſoren der Glieder vor. Dieſes beruhet auf dem von ihm gewählten Verfahren zur Entwickelung der Reihe für φ. Mém. de l'Ac. de Berlin a. 1769. p. 230.

Die hier als Exempel beygebrachten Formeln ſind das Hauptſtück in der Theorie der Planeten, ſo fern ihre gegenſeitigen Störungen nicht in Betracht kommen.

20. Zur deutlichern Einſicht in alle dieſe Formeln wird es für einen Theil der Leſer nöthig ſeyn, die geometri-

ſchen Sätze, welche hier angewandt ſind, durch eine Conſtruction zu erweiſen.

Es iſt ABD (Fig. 65.) die Hälfte einer Ellipſe, deren Mittelpunct C, große Axe AD, halbe kleine CB, einer Brennpunct F iſt. Mit dem Halbmeſſer AC wird der Halbkreis AED beſchrieben, welcher in der ältern Aſtronomie der excentriſche heißt. Nach einem Puncte L auf der Ellipſe ziehe man FL, ſo iſt FL der Radius Vector, und der W. DFL die wahre Anomalie. Durch L ſey ML parallel mit BC, und treffe den Kreis in N, ſo iſt der W. DCN die Anomalie des excentriſchen (Kreiſes). Die mittlere Anomalie iſt ein der Zeit von D bis L proportionaler Winkel.

21. Man ſetze $AC = a$; $CB = b$; $CF = c$, $DFL = \varphi$; $DCN = \psi$. Die Area der ganzen Ellipſe iſt $= \pi ab$ (ſ. Quadratur), und nach dem einen von Kepler entdeckten Geſetze iſt $2\pi : \omega = \pi ab : \text{area } DFL$. Ferner ſind an der Ellipſe die Flächenräume $DML : DMN = ML : MN$, und die Dreyecke $MFL : MFN = ML : MN$, daher die Flächenräume $DFL : DFN = ML : MN$. Es iſt $ML : MN = CB : CE = b : a$ (Ellipſe, 1.), alſo $DFL : DFN = b : a$ Verbindet man dieſe Proportion mit der, $2\pi : \omega = \pi ab : DFL$, ſo iſt $\pi b : a\omega = \frac{1}{2}\pi ab : DFN$, und $DFN = \frac{1}{2}aa\omega$, wo ω ein Kreisbogen für den Halbmeſſer $= 1$ iſt. Es iſt $DFN = \text{Sect.}\, DCN + \Delta FCN = \frac{1}{2}aa\psi + \frac{1}{2}ac \sin\psi$.

Daher iſt $\omega = \psi + \frac{c}{a}\sin\psi$, oder, wenn $\frac{c}{a} = e$, einer abſoluten Zahl, geſetzt wird, $\omega = \psi + e\sin\psi$.

22. Es iſt $a : b = MN : ML$ (Ellipſe, 5.), und $MN = a\sin\psi$, alſo $ML = b\sin\psi$. Ferner $CM = a\cos\psi$; $FM = c + a\cos\psi$, alſo
$FL^2 = r^2 = (c + a\cos\psi)^2 + b^2\sin\psi^2$.
Da $aa = bb + cc$ (Ellipſe, 9.), und $\sin\psi^2 = 1 - \cos\psi^2$

iſt, ſo iſt $r^2 = a^2 + 2ac\cos\psi + c^2\cos\psi^2$, alſo $r = a + c\cos\psi$, oder $\frac{r}{a} = 1 + e\cos\psi$.

23. Es iſt $\sin\varphi = \frac{ML}{FL} = \frac{b\sin\psi}{a + c\cos\psi}$;

und $\cos\varphi = \frac{FM}{FL} = \frac{c + a\cos\psi}{a + c\cos\psi}$. Ferner

$1 + \cos\varphi = \frac{(a+c)(1+\cos\psi)}{a + c\cos\psi}$. Hieraus iſt

$\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{b\sin\psi}{(a+c)(1+\cos\psi)}$; das iſt (Goniometrie, 8.)

$\tang\frac{1}{2}\varphi = \frac{b}{a+c}.\tang\frac{1}{2}\psi = \frac{b:a}{1+e}\tang\frac{1}{2}\psi$;

oder auch $\tang\frac{1}{2}\varphi = \left(\frac{a-c}{a+c}\right)^{\frac{1}{2}}\tang\frac{1}{2}\psi$,

oder $\tang\frac{1}{2}\varphi = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}}\tang\frac{1}{2}\psi$.

24. Hieraus iſt $\frac{\partial\varphi}{2\cos\frac{1}{2}\varphi^2} = \frac{b}{a+c}.\frac{\partial\psi}{2\cos\frac{1}{2}\psi^2}$,

oder $\frac{\partial\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{b}{a+c}.\frac{\partial\psi}{1+\cos\psi}$. Mittelſt des in (22.) gebrauchten Werthes von $1 + \cos\varphi$ entſteht hier

$$\partial\varphi = \frac{b\,\partial\psi}{a + c\cos\psi}, \text{ oder } \partial\varphi = \frac{(b:a)\,\partial\psi}{1 + e\cos\psi}.$$

Dieſe Zuſammenſtellung der Sätze mit den einfachſten Beweiſen iſt aus der oben angeführten Abhandlung von la Grange, Mem. de l'Acad. de Berlin, a. 1769. p. 205. genommen. Bey den aſtronomiſchen Schriftſtellern findet man ſie nicht ſo gut bey einander.

Gränze einer Größe iſt diejenige Größe, welcher ſich dieſe, als eine veränderliche betrachtet, immer mehr nähern kann, ſo daß der Unterſchied kleiner werden mag, als jede noch ſo klein angenommene Größe.

So iſt der Kreis die Gränze der eingeſchriebenen oder der umgeſchriebenen ordentlichen Vielecke; der Cylinder die Gränze von Prismen, deren Grundflächen die in und um die Grundfläche des Cylinders beſchriebenen ordentlichen Vielecke ſind, bey derſelben Höhe mit dem Cylinder; ein Kegel auf ähnliche Art die Gränze von Pyramiden.

Die Summe einer unendlichen (nicht abbrechenden) Reihe iſt die Gränze, welcher ſich die arithmetiſche Summe der Glieder (oder das Aggregat, bey verſchiedenen Vorzeichen der Glieder) immer mehr nähert, je mehr Glieder genommen werden, in dem Falle, daß die Glieder immer kleiner werden.

Die Gränze einer Größe kann Null oder ein unendlich großes ſeyn. So iſt in einer geometriſchen abnehmenden Reihe Null die Gränze der Glieder, gleichſam das letzte Glied in einer Reihe, worin es kein letztes giebt. In der zunehmenden geometriſchen Reihe, worin der Exponent größer als die Einheit iſt, iſt das unendlich große die Gränze.

Die Gränze hat man von der ſich annähernden Größe zu unterſcheiden. Die eingeſchriebenen Vielecke in einem Kreiſe bleiben immer von dem Kreiſe ſelbſt verſchieden; die Glieder einer geometriſchen Reihe werden nie Null noch unendlich groß.

Die Gränze eines Verhältniſſes zweyer veränderlichen Größen iſt dasjenige, welchem ſich ihr veränderliches Verhältniß immer mehr nähert, je größer ſie genommen werden, oder in einem andern Falle, je kleiner ſie ſind.

Es ſey $ay - bx = c$, ſo iſt

$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} + \frac{c}{ax}$, und das Gränzverhältniß von $y : x$ iſt $= b : a$.

Es ſey

$$yy + axy + bx^2 + cy + dx + e = 0,$$

ſo iſt durch die Diviſion mit xx,

$$\frac{yy}{xx} + \frac{ay}{x} + b + \frac{cy}{xx} + \frac{d}{x} + \frac{e}{xx} = 0.$$

Die Gränze des Quotienten $\frac{y}{x}$ für unendlich groſſe x und y, wenn es ſolche giebt, ſey $= p$, ſo iſt

$$pp + ap + b = 0;$$

alſo $p = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$,

und die Gränze von $y:x$ iſt $= p:1$. Iſt hier $\frac{1}{4}aa < b$, ſo giebt es keine unendliche groſſe Werthe von x und y, wie es der Fall für die Coordinaten an einer Ellipſe iſt. Iſt $\frac{1}{4}aa > b$, ſo ſind zwey Gränzverhältniſſe vorhanden, wie nämlich an einer Hyperbel; und iſt $\frac{1}{4}aa = b$, ſo iſt nur ein einfaches Gränzverhältniß $x:y$ da, wie an der Parabel.

Bey höhern Gleichungen ſind auch mehrere Gränzverhältniſſe für unendliche x und y möglich, wie in dem Artikel, krumme Linien, gezeigt wird.

Fehlt in der Gleichung zwiſchen x und y das unveränderliche Glied, ſo läßt ſich auch ein Gränzverhältniß für abnehmende x und y angeben. Z. B. in der Gleichung,

$$yy + axy + bxx + cy + dx = 0,$$

iſt das Gränzverhältniß der ohne Ende abnehmenden y und x, das Verhältniß $d : -c$. Denn man dividire alle Glieder der Gleichung durch x, ſo iſt

$$\frac{yy}{x} + ay + bx + \frac{cy}{x} + d = 0.$$

Die drey erſten Glieder werden ohne eine Gränze des Abnehmens kleiner, je kleiner x und y genommen werden, und nur die beiden letzten behalten eine endliche Gröſſe, ſo

daß die Gränze der Gleichung iſt $\frac{cy}{x} + d = 0$, woraus $y : x = d : -c$ folgt.

Für $x = 0$ hat y außer dem Werthe 0 noch den Werth $-c$, weil das Aggregat der beyden Glieder $yy + cy = 0$ iſt, entweder, wenn $y = 0$, wie $x = 0$, geſetzt wird, oder wenn $y = -c$ genommen wird. Es ſind hier zwey Fortſchreitungen der zu den x gehörigen y. Eben ſo iſt für $y = 0$ entweder $x = 0$, oder $= -\frac{d}{b}$.

Aus der Gleichung, $y^3 + x^3 = axy$, werde das Gränzverhältniß von x und y für abnehmende x und y geſucht. Es iſt

$$\frac{y^3}{x^2} + x = \frac{ay}{x},$$

alſo iſt Null die Gränze von $\frac{y}{x}$, und eben ſo von $\frac{x}{y}$. Man dividire die Gleichung durch x^3, ſo iſt

$$\frac{y^3}{x^3} + 1 = \frac{ay}{x^2},$$

und die Gränze von $\frac{y}{x^2}$ iſt $= \frac{1}{a}$. Eben dieſe iſt auch die Gränze von $\frac{x}{y^2}$. Die Gleichung giebt drey Fortſchreitungen der y, die zu x geordnet ſind, und umgekehrt; in jeder derſelben iſt das Gränzverhältniß der verſchwindenden x und y ein anderes.

Gränze einer Reihe, deren Glieder theils poſitiv, theils negativ ſind, iſt diejenige, von der Anzahl der Glieder unabhängige Größe, von welcher das endliche Aggregat der Glieder wechſelsweiſe in Plus oder Minus verſchieden iſt. Eine ſolche giebt es für die Summe der Sinus und Coſinus der Winkel, die in arithmetiſcher Pro-

greſſion ſind (Goniometrie, 72, 73.). Bey den Werthen der Wurzeln algebraiſcher Gleichungen, wenn ſie durch eine Reihe dargeſtellt werden, kann eine ſolche Gränze auch Statt finden.

Das Gränzverhältniß der Veränderungen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen iſt nichts anders als ihr Differentialverhältniß. Es iſt dasjenige, was dem Verhältniſſe der endlichen Veränderungen zum Grunde liegt, und in dieſen durch die Quantität der Veränderungen modificirt wird. S. Differentiale.

Gromatica iſt eine lateiniſche Benennung der Feldmeßkunſt, von Groma oder Gruma, ein Werkzeug zum Feldmeſſen. S. Fabri theſaurus erud. ſcholaſt. edit. Gesneri ſub voce Gruma.

Größe (Quantitas, Quantum) iſt, was aus gleichartigen Theilen zuſammengeſetzt iſt. Alles, was entweder in der Wirklichkeit oder in der Vorſtellung dieſe Beſchaffenheit hat, macht den Gegenſtand der Mathematik aus, dieſes der reinen, jenes der angewandten. Dieſe Wiſſenſchaft heißt daher ganz ſchicklich die Größenlehre.

Die gewöhnliche Erklärung der Größe iſt, ſie ſey dasjenige, was einer Vermehrung oder Verminderung fähig iſt. Man kann dadurch aber verleitet werden, Beſchaffenheiten, die nur uneigentlich als Größen angeſehen werden können, für wahre Größen zu halten, als Kraft, Wärme, Licht. Dieſe kann man nur einer mittelbaren Meſſung und Vergleichung unterwerfen, nämlich vermittelſt wahrer Größen, mit welchen ſie verbunden werden. Man macht freylich einen Unterſchied zwiſchen extenſiver und intenſiver Größe (Quantitas extenſiva et intenſiva), allein es iſt, um die Begriffe gleich Anfangs vollkommen deutlich zu erhalten, beſſer, die intenſiven Größen gar nicht als Größen anzuſehen, und zu wiſſen, daß ſie nur durch andere, als Repräſentanten, einer mathematiſchen Vergleichung fähig ſind.

Man unterſcheidet zuſammenhangende, und nicht zuſammenhangende Größen (Quantitas continua et diſcreta). Unter jenen verſteht man die geometriſchen Größen, Linien, Flächen und Körper; unter dieſen alles, was aus unverbundenen Theilen beſteht, als alle zählbaren Dinge, Zahlen im Allgemeinen, und jede Größe, die als Zahl für eine Einheit betrachtet wird, wenn gleich die Einheit und die Menge der Einheiten unbeſtimmt gelaſſen wird. Bey den Linien, Flächen und Körpern kommt es nicht bloß auf die Menge der Theile an, ſondern auch auf ihre Zuſammenſtellung. Zwey Linien oder Figuren können in Abſicht auf die Größe der Ausdehnung einander gleich, und dabey von ſehr verſchiedener Beſchaffenheit ſeyn.

Die geometriſchen Größen werden oft als diſcrete Größen behandelt, wenn man bloß eine Vergleichung der Ausdehnung macht z. B. bey der Ausmeſſung eines Feldes ſieht man nur auf die darin enthaltene Anzahl von Quadratruthen oder was ſonſt zum Maaß genommen wird.

Zwey Arten von Größen, Winkel und Zeit, haben noch ihre Beſonderheit, wovon an ihrem Orte.

Das deutſche Wort Größe bedeutet ſowohl das Zuſammengeſetzte, als die Menge ſeiner Theile in Vergleichung mit der Menge eines andern gleichnamigen Zuſammengeſetzten. Z. B. die vier Glieder einer Proportion ſind Größen in dem erſten Verſtande, wenn bloß von ihrer Verknüpfungsart die Rede iſt. In beſtimmten Fällen kommt es aber darauf an, wie groß ſie ſind, oder wie viel gleiche Theile von einer gewiſſen Größe ſie enthalten. Im Lateiniſchen kann man Größe in dem erſten Verſtande durch Quantum; in dem zweyten durch Quantitas bezeichnen, wiewohl das letzte häufig für Quantum geſetzt wird.

Vielheit des Gleichartigen iſt mit Größe gleichbedeutend. Doch bleibt der Unterſchied, daß der Begriff, Größe, geometriſchen, und Vielheit arithmetiſchen Urſprungs iſt.

Der Begriff, Größe, iſt ein urſprünglicher Begriff, den unſer Verſtand aus ſich ſelbſt hervorbringt, nicht der ſinnlichen Erfahrung ſchuldig iſt. Dieſe giebt uns nur die Bilder, wodurch wir uns Größen auf eine beſtimmte Art vorſtellen. Die Sinne des Geſichts und des Gefühls der Betaſtung geben uns eine mit manchen Nebenvorſtellungen gemiſchte Vorſtellung der Größe. Wollte man ſagen, daß wir durch die Abſonderung der Nebenvorſtellungen zu dem reinen Begriff von Größe gelangen, ſo ſetzt dieſes das Vermögen des Verſtandes voraus, ſich einen ſolchen Begriff zu bilden. Wenn wir gleich der Zeit nach zu dem reinen Begriffe von Größe durch die ſinnliche gemiſchte Vorſtellung derſelben kommen, ſo iſt doch in philoſophiſcher Rückſicht die Quelle aller unſerer mathematiſchen Vergleichungen und Anwendungen auf ſinnliche Größen der reine und urſprüngliche Begriff von Größe. (S. Mathematik, Vielheit, Ausdehnung).

Gröſter oder **kleinſter Werth** einer veränderlichen Größe von einer beſtimmten Form, es ſey geometriſcher oder analytiſcher, iſt derjenige, welcher entweder größer oder kleiner iſt, als ein in der Reihe der Werthe dieſer Größe vorangehender und nachfolgender, ſo nahe auch beide an dem gröſten oder kleinſten Werthe genommen werden. Dieſer relativ gröſte oder kleinſte Werth kann mehrfach ſeyn, wenn die Größen, die in eine ſtetige Folge geordnet ſind, nachdem ſie bis zu einer gewiſſen Gränze zugenommen haben, wieder bis zu einer gewiſſen Gränze abnehmen, dann wieder eben ſo zunehmen und abnehmen, welches mehrmals wiederholt werden mag. Ein gröſter oder kleinſter Werth iſt nicht abſolut, ſondern relativ, in Beziehung auf die zu beiden Seiten benachbarten zu verſtehen. Der Werth der veränderlichen Größe kann weit über den relativen gröſten Werth anwachſen, oder über den kleinſten hinaus abnehmen.

Eine mit dieſer Unterſuchung verwandte iſt, wenn die Form derjenigen Größe geſucht wird, welcher unter mehrern oder unendlich vielen, die eine gewiſſe Beſtim-

mung mit ihr gemeinſchaftlich haben, eine gewiſſe Eigenſchaft in der größten oder kleinſten Quantität zukommt. Z. B. es werde die krumme Linie geſucht, welche unter allen von gleichem Umfange mit ihr, auch ſolchen, die aus geraden Linien zuſammengeſetzt ſind, den größten Raum einſchließt. Oder es werde der Körper geſucht, der unter allen von gleicher Oberfläche den größten räumlichen Inhalt hat. Es werde zwiſchen zwey Puncten, die nicht in derſelben lothrechten Linie liegen, die krumme Linie geſucht, auf welcher ein Körper, oder eigentlich ein ſchwerer Punct, in der kürzeſten Zeit von dem oberſten bis zu dem unterſten Puncte herabfällt. Aufgaben dieſer Art werden unter der zwar ſpeciellen Benennung, iſoperimetriſches Problem, begriffen, gegenwärtig am gewöhnlichſten unter der Benennung, Variations-Rechnung. Unter dem letztern Namen wird dieſe feine und wichtige Unterſuchung ihre Stelle erhalten.

Die Unterſuchung, von welcher in dem gegenwärtigen Artikel gehandelt wird, gehört zum Theil zu den elementariſchen. Manche merkwürdige hieher gehörige Aufgaben aus der Geometrie laſſen ſich durch die gemeinen Lehren derſelben auflöſen. Was man aus dieſen nähern Quellen ſchöpfen kann, braucht man nicht durch höhere Rechnung zu ſuchen, welche man übrigens zur Vergleichung der Methoden nützlich anwenden kann.

Die Lehre vom Größten und Kleinſten iſt wegen ihrer mannichfaltigen Anwendungen ſowohl in der reinen als angewandten Mathematik ſehr wichtig. Aus der erſtern kommen in dieſem Artikel Beyſpiele vor. Auch für die Philoſophie iſt dieſe Lehre wichtig geworden, da ſie mit der Frage von den Endurſachen zuſammenhängt, ſo fern man dabey annimmt, daß es bey den Naturwirkungen Zweck ſey, alles mit dem geringſten Aufwande von Kraft oder Mitteln überhaupt zu bewirken. Leibnitz leitete daher das Geſetz der Zurückſtrahlung und Strahlenbrechung her, indem er annahm, das Licht gehe von einem Puncte zu einem andern auf dem leichteſten Wege, ſo wie vor ihm Fermat geſagt hatte, daß das Licht die kürzeſte Zeit ge-

brauche. Das Geſetz von der kleinſten Wirkung, welches Maupertuis aufſtellte, erregte einen heftigen gelehrten Streit (Käſtners Mechanik. S. 577. ff.). Man muß ſich hüten, nothwendige mathematiſche Folgen als Zwecke zu betrachten, oder die Frage, wie? mit der Antwort auf die Frage, wozu? auflöſen zu wollen.

I. Geometriſche Verfahrungsarten.

1. Unter allen Dreyecken über einer gemeinſchaftlichen Grundlinie, deren Scheitelpuncte in eine der Lage nach gegebene gerade Linie fallen, hat dasjenige den kleinſten Umfang, deſſen Schenkel mit jener Linie gleich große Winkel machen.

Es iſt AB (Fig. 66.) die gegebene Grundlinie der Dreyecke, DE die der Lage nach gegebene gerade Linie; APB irgend ein Dreyeck über AB, mit dem Scheitel P auf DE; ACB dasjenige, deſſen Schenkel AC, BC mit DE die gleichen Winkel ACD, BCE machen. Man ziehe BF ſenkrecht auf DE, und verlängere den Schenkel AC bis an die gleichfalls verlängerte BFG in G, ſo iſt $FG = BF$. Nun ziehe man PG, ſo iſt $PG = BP$, und $AP + BP = AP + PG$. Nun iſt $AP + PG > AG$, das iſt, $AP + PG > AC + BC$. Daher iſt die Summe der drey Seiten in dem Dreyeck APB größer als die der drey Seiten in dem Dreyeck ACB.

2. Wenn DE parallel mit AB iſt, ſo iſt Δ ACB gleichſchenklicht und gleichen Inhalts mit Δ APB. Unter allen Dreyecken gleichen Inhalts, über derſelben Grundlinie, hat das gleichſchenklichte den kleinſten Umfang.

3. Unter allen Dreyecken gleichen Inhalts hat das gleichſeitige den kleinſten Umfang.

Denn es habe, wenn es möglich iſt, ein ungleichſeitiges Dreyeck den kleinſten Umfang unter allen Dreyecken von einem gegebenen Inhalt. Die eine Seite deſſelben ſey a, ſo müſſen die beiden andern gleich groß ſeyn, weil ſonſt der Umfang noch verkleinert werden kann, ohne

den Inhalt zu verändern. Nimmt man eine dieſer Seiten, b, b, zur Grundlinie, ſo müſſen aus demſelben Grunde die beiden andern Seiten gleich groß ſeyn, oder es iſt a = b. Dieſes widerſpricht der Vorausſetzung. Alſo iſt ſie unmöglich.

4. Unter allen Dreyecken mit gleichem Umfange, und über derſelben Grundlinie, hat das gleichſchenklichte den größten Inhalt.

Es ſey (Fig. 67.) APB irgend ein Dreyeck, und PQ eine parallele durch P mit AB. Man zeichne das gleichſchenklichte Dreyeck ACB, deſſen Scheitel C in PQ falle, ſo iſt der Umfang von ACB kleiner als der von APB. Das gleichſchenklichte Dreyeck ADB, deſſen Umfang dem von APB gleich iſt, muß alſo größer ſeyn als das △ ACB oder als △ APB.

5. Unter allen Dreyecken von gleichem Umfange iſt das gleichſeitige das größte.

Auf ähnliche Art wie in (3.) wird erwieſen, daß ein ungleichſeitiges Dreyeck von dem gegebenen Umfange nicht den größten Inhalt haben könne.

6. Diejenige geradlinichte Figur, welche den kleinſten Umfang unter allen gleichnamigen Figuren von gleichem Inhalte hat, iſt eine gleichſeitige.

Gleichnamige Figuren ſind die, in welchen die Anzahl der Seiten gleich groß iſt. Man ſetze, daß eine geradlinichte Figur, die nicht gleichſeitig iſt, bey dem gegebenen Inhalte den kleinſten Umfang habe. In dieſer ziehe man neben zwey ungleichen Seiten eine Diagonale, und zeichne über dieſer als Grundlinie ein gleichſchenklichtes Dreyeck von demſelben Inhalte wie das ungleichſchenklichte. Setzt man jenes Dreyeck ſtatt dieſes, ſo erhält die neue Figur, bey unverändertem Inhalte und derſelben Anzahl ihrer Seiten, eine kleinere Summe ihrer Seiten (2.), wider die Vorausſetzung, daß in der angenommenen Figur die Summe der Seiten ein Kleinſtes ſeyn ſollte.

7. Diejenige geradlinichte Figur, welche den größten Inhalt unter allen gleichnamigen Figuren von gleichem Umfange hat, iſt eine gleichſeitige.

Der Beweis iſt wie in (6.).

8. Es laſſen ſich unzählig viele gleichſeitige Figuren, deren Inhalt oder Umfang gegeben iſt, zeichnen. Denn wenn man irgend eine gleichſeitige Figur gezeichnet hat, ſo verhält ſich ihr Inhalt zu dem gegebenen, wie das Quadrat einer ihrer Seiten zu dem Quadrat der gleichnamigen Seite in der ähnlichen Figur von dem gegebenen Inhalte. Ihr Umfang verhält ſich zu dem gegebenen, wie eine ihrer Seiten zu der gleichnamigen in der ähnlichen Figur. In dem Artikel, Kreis, wird gezeigt, daß die gleichſeitige Figur mit dem kleinſten Umfange oder dem größten Inhalte eine reguläre iſt.

Man hat hier ein Beyſpiel von einem Minimum minimorum und Maximum maximorum.

9. Ein Kreis, deſſen Mittelpunct C iſt (Fig. 68.), iſt nebſt zwey Puncten A, B, auſſerhalb deſſelben, gegeben. Die Summe der geraden Linien AD, BD, welche von A und B nach einem Puncte des Umfanges des Kreiſes gezogen werden, iſt am kleinſten in dem Puncte D, wo die Winkel ADC, BDC, ſtumpf und gleich groß ſind. Umgekehrt, die Winkel ADC, BDC ſind gleich, wenn die Summe $AD + BD$ ein Kleinſtes iſt.

Denn man ziehe durch D die berührende EF, und an irgend einen Punct des Umfanges P die Linien AP, BP. Die letztere ſchneide EF in Q. Nun iſt $AD + BD$ kleiner als $AQ + BQ$, alſo noch vielmehr kleiner als $AP + BP$. — Der umgekehrte Satz wird daher leicht erwieſen.

10 Die Summe der geraden Linien, welche von den Puncten A und B an einen Punct auf dem Umfange des um den Mittelpunct C beſchriebenen Kreiſes gezogen werden, iſt am größten, wenn, wie in (Fig. 69.), die ſpitzen Winkel ADC, BDC der Linien AD, BD mit dem Halbmeſſer CD gleich groß ſind.

Man ziehe nach irgend einem Puncte P des Umfanges die geraden AP, BP, welche den Umfang in Q, R ſchneiden. Die Linien AD, BD ſchneiden denſelben in F, G, und der Durchmeſſer durch D treffe ihn in E. Ferner ſey durch die Puncte D, P die gerade MN gezogen. Zuerſt iſt zu zeigen, daß der Unterſchied der Winkel ADM und BDN größer iſt als der Unterſchied von APM und BPN.

Der Winkel ADM hat zum Maaße die halbe Summe der Bogen DF + DP, weil der Nebenwinkel zum Maaße hat $\frac{1}{2}$ (EF + EP). Das Maaß von BDN iſt $\frac{1}{2}$ GP; und von dem Unterſchiede ADM — BDN die halbe Summe von DF + DP — GP. Da EF = EG iſt, ſo iſt DF = DP + PG, alſo iſt von ADM — BDN das Maaß der Bogen DP.

Ferner iſt von dem Winkel APM das Maaß die Hälfte von DF + FQ, oder die Hälfte von DP + PR + RG + FQ, ſo wie vom Winkel BPN die Hälfte von DP + PR; alſo von dem Unterſchiede, APM — BPN die Hälfte von FQ + GR. Es iſt aber FQ < DP, und GR < DP. Denn in dem Dreyeck APF iſt Winkel APF < äuſſere DFP, alſo Bogen FQ < Bogen DP. Eben ſo iſt in dem Dreyeck BPG der Winkel BPG < äuſſere DGP, und Bogen GR < Bogen DP.

Folglich iſt ADM — BDN > APM — BPN, Daraus folgt, daß AD + BD > AP + BP iſt, welches ſich aus dem Beweiſe des §. 1. leicht herleiten läßt. Je weiter in Fig. 66. der Punct P von dem Puncte C (dem Puncte der kleinſten Summe der Linien AC, BC, und der gleichen Winkel ACD, BCE) abrückt, deſto größer wird die Summe der Linien AP, BP, und die Ungleichheit der Winkel APD, BPE.

11. Innerhalb eines Dreyecks ABC, worin kein Winkel größer als $\frac{4}{3}$ R oder 120° iſt (Fig. 70.), ſeyn nach einem Puncte D von den Winkelpuncten die geraden, AD, BD, CD gezogen: wenn ihre Summe ein Kleinſtes iſt, ſo ſind die Winkel ADB, BDC, CDA gleich groß.

Es ſey CD eine der drey Linien, welche die kleinſte Summe geben. Mit dem Halbmeſſer CD beſchreibe man den Kreisbogen MN, ſo liegt auf dieſem der Punct D ſo, daß die Summe AD + BD ein Kleinſtes iſt. Folglich ſind die Winkel, ADC, BDC, gleich groß. Iſt BD eine der drey Linien, welche die kleinſte Summe ausmachen, ſo iſt BDC = BDA, alſo ſind alle drey Winkel um D gleich groß.

12. Unter allen Dreyecken, die in einen Kreis eingeſchrieben werden können, iſt das gleichſeitige das größte.

Denn man zeichne über irgend einer Chorde des Kreiſes ein gleichſchenklichtes Dreyeck, ſo iſt dieſes größer als jedes andere über derſelben Chorde in dem Kreiſe beſchriebene, weil es die größte Höhe hat. Soll dieſes Dreyeck zugleich das größte unter allen in dem Kreiſe beſchriebenen Dreyecken ſeyn, ſo muß die vorher als Grundlinie angenommene Seite jedem der beiden gleichen Schenkel gleich ſeyn, weil ſonſt über einem dieſer Schenkel noch ein größeres gleichſchenklichtes Statt hätte.

Eine andere Beweisart iſt zu finden in einer Abhandlung von John Stedman: Of triangles deſcribed in circles and about them. Phil. Tranſ. 1775. p. 296.

In dem Dialog, Meno, von Plato, Kap. 22. kommt ein Beyſpiel aus der Geometrie vor, welches mit dem jetzt eben bewieſenen Satze zuſammenhängt. Sokrates führt an, daß die Geometer oft zufolge einer Vorausſetzung ihre Unterſuchungen anſtellten. Wenn z. B. gefragt würde, ob in einen gewiſſen Kreis ein gewiſſer dreyſeitiger Raum (χωριον τριγωνον) eingetragen werden könne, ſo würde der Geometer etwa antworten, ich weiß es noch nicht, ob der gegebene Raum dazu geeignet ſey, aber ich glaube dazu eine vorbereitende Vorausſetzung machen zu können. Was nun folgt, iſt ganz unverſtändlich, und hat den Philologen viele Mühe ohne Erfolg gemacht. Wenn die Einzeichnung des Raums in Form eines Dreyecks gemeynt iſt, ſo bedarf es hiezu

Tt

keiner hypothetiſchen Unterſuchung, ſondern die beſtimmte Antwort iſt: Ein Dreyeck von dem gegebenen Inhalte läßt ſich in den gegebenen Kreis einzeichnen, wenn es nicht größer iſt als das gleichſeitige in dem Kreiſe beſchriebene Dreyeck. Man ſieht, daß Plato unſern Satz noch nicht gekannt hat, es müßte denn in dem gegenwärtigen Texte etwas ausgelaſſen ſeyn.

13. Unter allen Vielecken mit gleich vielen Seiten, die in einem Kreiſe beſchrieben ſind, iſt dasjenige, welches den größten Flächenraum hat, ein gleichſeitiges.

Denn man ſchneide in dem größten dieſer Vielecke zwey neben einander liegende Seiten durch eine Diagonale ab, ſo müſſen jene beiden Seiten gleich groß ſeyn, weil ſonſt ſtatt des abgeſchnittenen Dreyecks ein größeres in dem Kreisabſchnitte geſetzt werden könnte. Darum müſſen alle Seiten ſich gleich ſeyn.

14. In dem Dreyeck ABC (Fig. 71.) iſt aus einem Winkelpuncte C nach der Mitte D der gegenüber liegenden Seite AB die CD gezogen. Dieſe werde in E ſo getheilt, daß $EC = 2ED$ iſt. Aus E beſchreibe man mit einem willkührlichen Halbmeſſer EF einen Kreis, und nehme auf deſſen Umfange einen Punct F, nach welchem von A, B, C die geraden, AF, BF, CF, gezogen werden. Es iſt $AF^2 + BF^2 + CF^2 = AB \times AD + CD \times CE + 3EF^2$.

Denn erſtlich iſt $AF^2 + BF^2 = 2AD^2 + 2DF^2$ (Dreyeck, 24.), und daher

$$AF^2 + BF^2 + CF^2 = 2AD^2 + 2DF^2 + CF^2.$$

Nun ziehe man FG ſenkrecht auf CD, ſo iſt, in dem Falle der Figur, (Dreyeck, 20, 19.),

$$CF^2 = CE^2 + EF^2 + 2CE \times EG,$$
$$DF^2 + 2ED \times EG = DE^2 + EF^2.$$

Da $CE = 2ED$ genommen iſt, ſo iſt $2CE \times EG = 4ED \times EG$, und es entſteht aus den beiden Gleichungen durch Addition und Subtraction dieſe,

$$CF^2 + 2DF^2 = CE^2 + 2DE^2 + 3EF^2.$$

Nun iſt, zufolge der Vorausſetzung, daß $CE = 2DE$ iſt, $CE^2 = 4DE^2$, und $6DE^2 = 3DE \times 2DE = CD \times CE$, alſo iſt

$$CF^2 + 2DF^2 = CD \times CE + 3EF^2.$$

Dadurch iſt

$$AF^2 + BF^2 + CF^2 = 2AD^2 + CD \times CE + 3EF^2.$$

Setzt man noch AB ſtatt $2AD$, ſo iſt $2AD^2 = AB \times AD$, und es wird nun die in dem Satze aufgeſtellte Gleichung erhalten.

Für jede Lage des Punctes G wird dieſelbe Gleichung gefunden. Bleibt G auf der Seite von E wie in der Figur, ſo bleibt alles in dem Beweiſe ungeändert. Liegt G auf der andern Seite von E, ſo verändern $2CE \times EG$ und $2ED \times EG$ nur ihre Beziehungen, heben ſich aber ebenfalls einander auf.

Die Gleichung, $CF^2 + 2DF^2 = CD \times CE + 3EF^2$, die in dem Beweiſe gefunden ward, läßt ſich auch aus einer der arithmetiſchen Gleichungen (Dreyeck, 26.) herleiten, wobey man zu dem Beweiſe des gegenwärtigen Satzes die ſenkrechte FG zu ziehen nicht nöthig hat.

15. Zieht man von A, B, C, nach dem Puncte E die geraden AE, BE, CE, ſo iſt die Summe ihrer Quadrate, $AE^2 + BE^2 + CE^2$, ein Kleinſtes, und $= AB \times AD + CD \times CE$.

Denn für jeden andern Punct F iſt die Summe der Quadrate noch um $3EF^2$ größer als die Summe der Rechtecke $AB \times AD + CD \times CE$.

Der Punct E iſt der gemeinſchaftliche Schwerpunct der drey Puncte A, B, C als ſchwer betrachtet.

Bey mehr als drey Puncten findet eine ähnliche Relation für die Quadrate der von ihnen nach ihrem Schwerpuncte gezogenen Linien ſtatt. S. Kreis.

16. Unter allen Prismen von gleicher Höhe über gleich großen und ähnlichen Grundflächen hat das ſenkrechte die kleinſte Oberfläche.

Und, unter allen Prismen, über gleich großen und ähnlichen Grundflächen, und mit gleicher Summe der

Seitenflächen, hat das ſenkrechte die größte Höhe oder den größten Inhalt.

17. Unter allen gleichnamigen ſenkrechten Prismen von gleicher Höhe, über einer der Größe nach; gegebenen Grundfläche, hat dasjenige die kleinſte Oberfläche, deſſen Grundfläche eine reguläre Figur iſt.

18. Unter allen gleichnamigen ſenkrechten Prismen von gleicher Höhe, deren ganze Oberfläche dieſelbe iſt, iſt dasjenige das größte, welches zur Grundfläche eine reguläre Figur hat.

19. Unter allen ſenkrechten Parallelepipeden von gegebenem Inhalte hat der Würfel die kleinſte Oberfläche, und umgekehrt, unter allen ſolchen Körpern mit gleicher Oberfläche hat der Würfel den größten Inhalt.

20. Der ſenkrechte Cylinder, deſſen Durchmeſſer ſeiner Höhe gleich iſt, hat eine kleinere Oberfläche (krumme mit den Grundflächen) als jeder andere, ihm gleicher ſenkrechte; auch iſt jener größer als jeder andere ſenkrechte, der gleiche Oberfläche mit ihm hat.

21. I. Unter allen gleichnamigen Pyramiden von gleicher Höhe, über Grundflächen von gleichem Inhalte und Umfange, hat diejenige, in welcher alle Seitenflächen gegen die Grundfläche gleich geneigt ſind, die kleinſte Oberfläche zwiſchen den Seitenlinien.

II. Unter allen gleichnamigen Pyramiden, die über Grundflächen von gleichem Inhalte und Umfange ſtehen, und an welchen die Summe der Oberflächen zwiſchen den Seitenlinien gleich groß iſt, hat diejenige, in welcher die Seitenflächen gegen die Grundfläche gleich geneigt ſind, den größten Inhalt.

III. Unter allen gleichnamigen Pyramiden, von gleicher Höhe über Grundflächen gleichen Inhalts, mit gleichen Neigungswinkeln der Seitenflächen gegen die Grundfläche, hat diejenige, deren Grundfläche eine reguläre Figur iſt, die kleinſte Oberfläche zwiſchen den Seitenlinien.

Man bemerke, daß in einer Pyramide, deren Grundfigur um einen Kreis beſchrieben werden kann, die Seitenflächen gegen die Grundfläche gleiche Neigung haben, wenn der Grundpunct der Höhe in den Mittelpunct des Kreiſes fällt.

22. Das reguläre Tetraedron hat unter allen dreyſeitigen Pyramiden von gleichem Inhalte die kleinſte Oberfläche, und unter allen dreyſeitigen Pyramiden mit gleicher Oberfläche (aller vier Flächen) den größten Inhalt.

23. Die Beweiſe dieſer Sätze, welche hier ſich nicht wohl geben ließen, finden ſich in einem den Liebhabern der feinern Geometrie ſehr zu empfehlenden Werke: De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum, geometrice conſiderata, auct. Sim. L'Huilier. Varſaviae 1782. 285 pagg. in 4. Einen Auszug der vornehmſten Sätze mit den Beweiſen hat der Verfaſſer ſeiner Polygonometrie, ou de la meſure des figures rectilignes, a Genève et Paris 1789. beygefügt,

II. Analytiſche Methoden für Functionen von einer veränderlichen Größe.

24. Die einfachſte Function, für welche ein Größtes oder Kleinſtes Statt findet, iſt dieſe, $ax^2 - bx + c$, deren veränderlicher Werth durch u bezeichnet werde, ſo daß $ax^2 - bx + c = u$ iſt. Oder es iſt

$$x^2 - \frac{b}{a}x = \frac{u-c}{a},$$ alſo (Gleichung, 33.)

$$x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4aa} - \frac{c-u}{a}\right)}.$$

Damit x möglich ſey, muß $bb - 4a(c-u)$ poſitiv ſeyn, das iſt, es muß ſeyn $u >$ oder $= \frac{4ac - bb}{4a}$. Der kleinſte Werth, den ein poſitives u haben kann, iſt alſo

$\frac{4ac - bb}{4a}$. Für dieſen Werth von u iſt $x = \frac{b}{2a}$, da die Größe unter dem Wurzelzeichen $= 0$ iſt. Iſt a poſitiv, und iſt $4ac - bb$ es auch, wie es aus einem poſitiven u folgt, ſo hat die Gleichung, $ax^2 - bx + c = 0$, keine mögliche Wurzeln (Gleichung, 36.).

Soll u negativ ſeyn, ſo iſt $x =$
$\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4aa} - \frac{c+u}{a}\right)}$, und der größte Werth, den u, abſolut genommen, haben kann iſt $= \frac{bb - 4ac}{4a}$.
Für dieſen Werth von u iſt $x = \frac{b}{2a}$, und die Gleichung, $ax^2 - bx + c = 0$, hat zwey mögliche Wurzeln.

25. Wenn die Gleichung, $ax^2 - bx + c = 0$, keine mögliche Wurzeln hat, ſo iſt ihr Werth immer poſitiv, was man auch für x ſetzen mag (Gleichung, 46.). Für ſehr große poſitive oder negative x in Vergleichung mit $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$ iſt der Werth der Gleichung groß, und nimmt bey der Verminderung von x ab, bis zu einer gewiſſen Gränze, dem kleinſten Werthe der Gleichung.

Hat die Gleichung zwey mögliche Wurzeln, ſo wird ihr Werth, wenn x zwiſchen dieſen Wurzeln genommen wird, negativ (Gleichung 45.), und nimmt von 0 an zu bis zu einer gewiſſen Gränze, dem größten negativen Werthe, um von da an wieder bis zu 0 abzunehmen.

26. Exempel. Eine gegebene Zahl (oder Linie) in zwey Theile zu theilen, ſo daß das Product der beiden Theile ein Größtes ſey. — Die Zahl ſey a, der eine Theil x, ſo iſt der andere $a - x$, ihr Product $= ax - xx$. In der Auflöſung (24.) iſt für a, b, c zu ſetzen, — 1; — a; 0, und ſo iſt hier der zweyte Fall, da die Gleichung, $ax - xx = 0$, oder $xx - ax = 0$ zwey

mögliche Wurzeln, $x=0$ und $x=a$, hat. Der größte Werth von $xx-ax$ iſt $=-\frac{1}{4}aa$, von $ax-xx$ alſo $+\frac{1}{4}aa$, und der zugehörige Werth von $x=\frac{1}{2}a$.

27. Exempel. Eine gegebene Zahl a in drey Theile ſo zu theilen, daß zwey derſelben das Verhältniß $m:n$ haben, und die Summe der Producte aus je zweyen ein Größtes ſey.

Die beiden erſten Theile ſeyn mx; nx, ſo iſt der dritte $=a-(m+n)x$, und die Summe der Producte $=(m+n)ax-(m^2+mn+n^2)x^2$. Der größte Werth dieſer Summe iſt =

$$\frac{(m+n)^2aa}{4(mm+mn+nn)}, \text{ für } x=\frac{(m+n)a}{2(mm+mn+nn)}.$$

28. Die allgemeine Methode, für jede Function einer veränderlichen x den größten oder kleinſten Werth der Function nebſt dem zugehörigen von x zu finden, beruht auf folgenden Betrachtungen.

Es ſey u eine Function von x. Der poſitive Werth von u nehme um Δu zu, wenn der poſitive Werth von x um $+\Delta x$ ſich verändert. In dieſem Falle iſt der Quotient $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ poſitiv. Für einen andern Werth von x nehme u um Δu ab, wenn x um Δx zunimmt, ſo iſt in dieſem Falle der Quotient $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ negativ. Der erſtere Werth von x ſey kleiner, als der zweyte, ſo zeigt die entgegengeſetzte Beſchaffenheit jener Quotienten an, daß zwiſchen beiden x ein Werth von x liegt, für welchen die Function u ein Größtes iſt. Iſt der zweyte Werth von x kleiner als der erſte, ſo liegt zwiſchen den beiden zugehörigen Werthen der Function u ein kleinſter Werth derſelben. Es könnten mehr als ein Größtes oder Kleinſtes zwiſchen jenen Werthen von u liegen; hier iſt es aber nicht nöthig, darauf zu achten.

Zu demjenigen x, für welches der Übergang zum Entgegengeſetzten geſchieht, gehört der größte oder kleinſte

Werth der Function u. Um dieſes x zu beſtimmen, muß der Werth des Quotienten $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, der ſich aus der Beſchaffenheit der Function u ergiebt, Null geſetzt werden. Wenn $\frac{\Delta u}{\Delta x} = 0$ iſt, ſo iſt dieſer Quotient weder poſitiv noch negativ, und macht den Übergang zum Entgegengeſetzten. Da aber derſelbe für endliche Veränderungen von x und u entweder poſitiv oder negativ iſt, ſo kann man nur den erſten Theil dieſes Quotienten, den von den Veränderungen unabhängigen Theil Null ſetzen, das iſt, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ nehmen. Die Gleichung für x, welche hieraus entſteht, giebt denjenigen Werth von x, zu welchem der größte oder kleinſte Werth von u gehört, vorausgeſetzt, daß ein ſolcher Werth Statt hat. Denn es kommt allerdings noch zugleich auf die Beſchaffenheit des ganzen zweyten Theils von $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ an, ob dieſer Quotient für die auf beiden Seiten jenes x liegenden Werthe, $x - \Delta x$ und $x + \Delta x$, entgegengeſetzte Beſchaffenheit habe.

29. Es iſt nach dem Taylorſchen Lehrſatze, (Differenzenrechnung, 38.)

$$u + \Delta u = u + \frac{\partial u}{\partial x} . \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \frac{\Delta x^2}{1.2}$$
$$+ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} . \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} . \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

wenn a. a. O. für fx, u, f (x + u) geſetzt werden u, Δx, $u + \Delta u$.

Setzt man für die Differential-Quotienten nach ihrer Ordnung, p, q, r, s, etc. ſo iſt

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = p + \tfrac{1}{2} q \Delta x + \tfrac{1}{6} r \Delta x^2 + \tfrac{1}{24} s \Delta x^3 + \text{etc.}$$

Man ſetze nun p = 0, und es ſey für einen dadurch erhaltenen Werth von x, der durch x′ ausgezeichnet werde,

nicht $q = 0$, ſo iſt für dieſen Werth von x die Function $+ u$ ein Größtes, wenn q negativ iſt, ein Kleinſtes, wenn q poſitiv iſt.

Denn erſtlich ſind für entgegengeſetzte Veränderungen von x' die Werthe des Quotienten $\Delta u : \Delta x$ entgegengeſetzt, da Δx ſo klein genommen werden mag, daß die Glieder $\frac{1}{6} r \Delta x^2$ und alle folgende zuſammen nicht mit $\frac{1}{2} q \Delta x$ verglichen werden können, und daher die Beſchaffenheit jenes Quotienten zu ändern nicht vermögen. Zweytens gehört bey einem poſitiven Werthe von q der poſitive Werth von $\Delta u : \Delta x$ zu einem x, das größer iſt als x', der negative Werth dieſes Quotienten zu einem x, das kleiner als x' iſt; umgekehrt bey einem negativen Werth von q, wenn beidemahl u poſitiv iſt. Daher iſt zufolge der Bemerkung in (28.) der zu x' gehörige Werth von u in dem erſtern Falle ein Kleinſtes, in dem andern ein Größtes.

30. Oder noch deutlicher: Es iſt, wenn $p = 0$ genommen wird,

$$\Delta u = \frac{1}{2} q \Delta x^2 + \frac{1}{6} r \Delta x^3 + \frac{1}{24} s \Delta x^4 + \text{etc.}$$

Iſt q poſitiv, ſo iſt $+ u + \Delta u$ größer als $+ u$, man mag $x' + \Delta x$ oder $x' - \Delta x$ ſtatt des x', wozu u gehört, ſetzen, wenn x unbeſtimmt klein genommen wird. Iſt aber q negativ, ſo iſt Δu negativ, man mag Δx additiv oder ſubtractiv nehmen. In dem erſten Falle iſt daher $+ u$ ein Kleinſtes, in dem andern ein Größtes.

Wäre der zu x' gehörige Werth von u negativ, ſo iſt der abſolute Werth dieſer Function für ein poſitives q ein Größtes, für ein negatives q ein Kleinſtes.

31. Um beide Fälle unter einer Regel zu begreifen, laſſe man auch hier den in dem Artikel, entgegengeſetzte Größen, erklärten analytiſchen Sprachgebrauch gelten, nach welchem $- a - b$ für kleiner als $- a$ gehalten wird, wenn a und b bloß die Quantität bedeuten. Dann iſt $- u + \Delta u$ größer als $- u$, und $- u - \Delta u$ kleiner als $- u$, und die Regel bleibt, daß ein poſitives q ein Kleinſtes, ein negatives q ein Größtes anzeigt. Iſt u negativ, ſo iſt es, abſolut genommen,

oder der Quantität nach, für $+q$ ein Größtes, für $-q$ ein Kleinſtes.

32. Es ſey nebſt $p=0$ auch $q=0$, aber nicht $r=0$, ſo iſt der zu x' gehörige Werth von u weder ein Größtes noch ein Kleinſtes. Denn da nun iſt

$$\Delta u = + \tfrac{1}{6} r \Delta x^3 + \tfrac{1}{24} s \Delta x^4 + \text{etc.}$$

ſo iſt, für unbeſtimmt kleine Δx, die Veränderung Δu von entgegeſetzter Beſchaffenheit, ſo daß für $x' - \Delta x$, x', $x' + \Delta x$, die Werthe der Function ſind $u \pm \Delta u$ u, $u \mp \Delta u$, daher die Werthe der Function entweder zunehmende oder abnehmende ſind. Die beiden durch Δu bezeichneten Veränderungen können ungleich ſeyn.

33. Iſt nebſt $p=0$, und $q=0$, auch $r=0$, aber nicht $s=0$, ſo iſt die zu x' gehörige Function u ein Größtes, wenn s negativ iſt, ein Kleinſtes, wenn s poſitiv iſt.

Auf dieſe Art iſt ein Größtes oder Kleinſtes vorhanden, wenn in der Reihe der Differential-Quotienten, der erſte, welcher nicht $=0$ iſt, von einer geraden Ordnung iſt; kein Größtes oder Kleinſtes in dem entgegengeſetzten Falle.

34. Es ſey nun

$$u = x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + c x^{m-3} \ldots + g x^2 + h x + k,$$

wo die Coefficienten auch entgegengeſetzte Werthe haben mögen, und m eine ganze Zahl iſt, ſo iſt (Differentialformeln, 1.)

$$\partial u = (m x^{m-1} + (m-1) a x^{m-2} + (m-2) b x^{m-3} + (m-3) c x^{m-4} \ldots 2 g x + h) \partial x,$$

und die Werthe derjenigen x, für welche u ein Größtes oder Kleinſtes iſt, ſind die Wurzeln der Gleichung,

$$0 = m x^{m-1} + (m-1) a x^{m-2} + (m-2) b x^{m-3} + (m-3) c x^{m-4} \ldots + 2 g x + h. \quad (N)$$

35. Wenn die Gleichung,

$$0 = x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + c x^{m-3} \ldots + h x + k \quad (M)$$

alle Wurzeln möglich und ungleich ſind, ſo hat die derivirte Gleichung (N) $m-1$ mögliche ungleiche Wurzeln, für deren jede ein abſolutes Größtes der Function u Statt hat. Denn es ſeyn α, β zwey nächſte Wurzeln der Gleichung (M), ſo nehmen die Werthe deſſelben, wenn für x eine Reihe Werthe von α bis β ſo geſetzt werden, von o bis zu einer gewiſſen Gränze zu, und darauf ab bis zu Null. Die größten Werthe der Gleichung ſind abwechſelnd poſitiv und negativ. Die negativen werden nach (31.) als Kleinſte betrachtet.

36. Hat die Gleichung (N) eine oder mehrere Wurzeln, zu welchen in der Gleichung (M) abſolute Kleinſte, poſitive oder negative, gehören ſo hat die Gleichung (M) eben ſo viele Paare unmöglicher Wurzeln. Denn in einer Gleichung mit lauter möglichen ungleichen Wurzeln finden keine abſolut Kleinſte ſtatt (35). Das kleinſte Größte iſt $= o$, in dem Falle, da die Gleichung (N) eine Wurzel mit (M) gemein hat. Alsdann ſind zwey Wurzeln in (M) gleich groß. Man mag ſich dieſes durch eine Zeichnung erläutern. Wenn in Fig. 28. Tab. II. Th. I. die Abſciſſenlinie für die Curve, welche eine Gleichung vom vierten Grade abbildet, überhalb des Puncts b, parallel mit XY läge, ſo würde der Werth der Gleichung in dem Puncte b abſolut ein Kleinſtes ſeyn, die Abſciſſenlinie ſchnitte die Curve nur zweymahl, und die Gleichung hätte nur zwey mögliche Wurzeln. Läge die Abſciſſenlinie, parallel mit XY, unter d und c zugleich, ſo entſtanden zwey abſolute Kleinſte, und die Gleichung hätte gar keine mögliche Wurzeln. Berührte ſie die Curve in b, ſo hätte die Gleichung zwey gleiche und zwey ungleiche Wurzeln.

37. Die Gleichung (N) habe zwey gleiche Wurzeln, α, α, und das Aggregat ihrer Glieder ſey $= (x-\alpha)^2 P$, wo P das Product der übrigen Wurzelfactoren iſt. Da $\frac{\partial u}{\partial x} = (x-\alpha)^2 P$ geſetzt iſt, ſo iſt q oder $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$

$2(x-\alpha)P + (x-\alpha)^2 . \frac{\partial P}{\partial x}$, und beide Quotienten ſind

$= 0$ für den Werth α von x. Aber der dritte Differential-Quotient $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ oder r iſt nicht $= 0$. In dieſem Falle iſt alſo kein Größtes oder Kleinſtes für $x = \alpha$, wodurch $p = 0$ iſt, vorhanden. Es ſchließen ſich nun ein Größtes und ein Kleinſtes in Fig. 28. Th. I. an einander, oder zwey Biegungen der Curve fallen zuſammen. Der Punct, wo ſie zuſammen kommen, iſt ein Wendungspunct. Hat die Gleichung (M) nicht den Factor $(x-\alpha)^3$, oder drey gleiche Wurzeln; ſo hat ſie wegen des hier angenommenen Ereigniſſes zwey unmögliche Wurzeln.

38. Die Gleichung (N) habe drey gleiche Wurzeln α, oder es ſey p, das iſt, $\frac{\partial u}{\partial x} = (x-\alpha)^3 P$, ſo iſt $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3(x-\alpha)^2 P + (x-\alpha)^3 . \frac{\partial P}{\partial x}$;

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 6(x-\alpha)P + 6(x-\alpha)^2 . \frac{\partial P}{\partial x} + (x-\alpha)^3 . \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}.$$

Es iſt alſo mit $p = 0$, für $x = \alpha$, zugleich $q = 0$, und $r = 0$, aber nicht $s = 0$, alſo iſt nun ein Größtes oder Kleinſtes vorhanden. In Fig. 28. ſchließen ſich zwey Größte (Kleinſte) und ein Kleinſtes (Größtes) an einander, oder drey Biegungen der Curve fallen zuſammen. Der Punct, wo ſie zuſammen kommen, heißt ein Schlangenpunct. Hat die Gleichung (M) nicht vier gleiche Wurzeln α, ſo hat ſie, wegen des hier angenommenen Ereigniſſes zwey unmögliche Wurzeln.

Überhaupt, wenn die Gleichung (N) eine gerade Anzahl gleicher Wurzeln, α, hat, ſo entſteht kein Größtes oder Kleinſtes für $x = \alpha$ aus der Gleichung (M); bey einer ungeraden Anzahl aber iſt ein einziges Größtes oder Kleinſtes für $x = \alpha$ vorhanden.

39. Exempel. I. Es ſey $u = x^2 - ax + b$, ſo iſt $p = 2x - a$, und $q = +2$. Für $p = 0$ iſt $x = \frac{1}{2}a$, und $u = -\frac{1}{4}aa + b$.

Iſt dieſer Werth poſitiv, ſo iſt er (wegen $q = +2$) ein Kleinſtes, auch der abſoluten Größe nach; iſt er negativ, ſo iſt er ein relatives Kleinſtes, das iſt, abſolut ein Größtes. In jenem Falle hat die Gleichung, $u = 0$, keine mögliche Wurzeln. (Vergl. 24.)

40. Exempel II. Es ſey $u = x^3 - ax^2 + bx - c$, ſo iſt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 2ax + c;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x - 2a.$$

Die Gleichung, $0 = 3xx - 2ax + b$, giebt die Werthe von x, für welche u ein Größtes oder Kleinſtes iſt. Es iſt $x = \frac{1}{3}a \pm \frac{1}{3}\sqrt{(aa - 3b)}$, und dadurch $q = \pm 2\sqrt{(aa - 3b)}$. Sind beide Werthe von u für dieſe Werthe von x gleichnamig, ſo hat die Gleichung, $u = 0$, zwey unmögliche Wurzeln. Sind ſie ungleichnamig, ſo hat ſie drey mögliche Wurzeln. Iſt $aa = 3a$, ſo iſt $q = 0$, und es iſt gar kein Größtes oder Kleinſtes vorhanden. Die Gleichung, $u = 0$, hat in dieſem Falle auch zwey unmögliche Wurzeln, wenn nicht $c = \frac{1}{27}a^3$ iſt, wodurch $u = (x - \frac{1}{3}a)^3$ wird. Iſt $a^2 < 3b$, ſo hat ſelbſt die Gleichung, $p = 0$, keine möglichen Wurzeln, und dadurch hat die Gleichung, $u = 0$, auch zwey unmögliche. (Vergl. Gleichung, 68, 69.)

Der größte und kleinſte Werth von u ſind,

$$u = -\frac{2a^3}{27} + \frac{ab}{3} - c \mp \frac{2}{27}(aa - 3b)^{\frac{3}{2}},$$

wo das obere Vorzeichen den kleinſten Werth, das untere den größten Werth giebt.

41. Exempel III. Es ſey $u = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$, ſo iſt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 - 48x + 44.$$

Die Wurzeln der Gleichung,

$$0 = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24,$$

oder $$0 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6,$$

ſind die Werthe von x, zu welchen größte oder kleinſte Werthe von u gehören. Dieſe Wurzeln ſind, $+1$; $+2$; $+3$. Die dazu gehörigen Werthe von u ſind $+3$; $+4$; -97; die von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ oder q ſind $+8$; -4; $+8$. Alſo iſt $+3$ ein Kleinſtes; $+4$ ein Größtes, und -97 ein relatives Kleinſtes, das iſt ein abſolutes Größtes. Die Gleichung, $u = 0$, hat zwey unmögliche Wurzeln.

42. Aufg. Zu finden, welches unter allen in einem Kreiſe eingeſchriebenen Rechtecken das größte iſt.

Der Halbmeſſer ſey $= a$, die eine Seite $= 2x$, ſo iſt die andere $= 2\sqrt{(aa - xx)}$, und der Inhalt des Rechtecks $= 4x\sqrt{(aa - xx)}$. Man ſetze $u = x\sqrt{(aa - xx)}$, oder $uu = aaxx - x^4$. Aus der letztern Gleichung iſt $p = 2aax - 4x^3$, und $q = 2aa - 12x^2$. Die Gleichung, $p = 0$, giebt $2aa = 4x^2$, und daher iſt $q = -4aa$. Alſo iſt das Quadrat das größte unter allen in einem Kreiſe eingeſchriebenen Rechtecken.

42. Aufg. Wenn $xx + yy = aa$, zu finden, für welche Werthe von x und y das Product xyy ein Größtes iſt.

Es ſey $u = xyy = x(aa - xx)$, ſo iſt $\frac{\partial u}{\partial x} = aa - 3x^2$, und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6x$. Es iſt alſo u ein Größtes, wenn $xx = \frac{1}{3}aa$ iſt. Dadurch iſt $yy = \frac{2}{3}aa$, folglich $xx : yy = 1 : 2$, und $x : y$ wie $5 : 7$ in den kleinſten Zahlen.

Verhält ſich die Stärke zweyer Balken von gleicher Länge wie das Product aus der Dicke in das Quadrat der Höhe, ſo iſt der ſtärkſte Balken, der aus einem gegebe-

nen runden Stamme geſchnitten werden kann, derjenige, an welchem die Dicke und Höhe das jetzt gefundene Verhältniß haben. Der Durchmeſſer des Stammes iſt a. Theilt man denſelben in drey gleiche Theile, errichtet über dem einen Theilungspuncte eine ſenkrechte bis an den Kreis, und zieht nach dem Endpuncte derſelben von den Endpuncten des Durchmeſſers zwey Chorden in dem Halbkreiſe, ſo haben dieſe das Verhältniß $1 : \sqrt{2}$. S. Belidor Science des Ingénieurs. L. IV. ch 2.

43. Aufg. Das Verhältniß des Halbmeſſers von der Grundfläche eines ſenkrechten Kegels zu ſeiner Höhe zu finden, wenn bey einem gegebenen Inhalte die krumme Oberfläche ein Kleinſtes iſt.

Der Halbmeſſer der Grundfläche ſey $= x$; die Höhe des Kegels $= y$, ſo iſt der Inhalt $= \frac{1}{3}\pi x^2 y$; die krumme Oberfläche $= \pi x \sqrt{(xx + yy)}$. Es iſt alſo $x^2 y$ eine gegebene Größe, und $x\sqrt{(xx + yy)}$ ſoll ein Kleinſtes ſeyn.

Es ſey $xxy = a$, und $u = x\sqrt{(xx + yy)}$, ſo iſt $u = \sqrt{\left(x^4 + \frac{aa}{xx}\right)}$, und $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(4x^3 - \frac{2a^2}{x^3}\right) \times \left(x^4 + \frac{aa}{xx}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Dieſer Quotient iſt $= 0$, wenn $4x^3 = \frac{2a^2}{x^3}$, oder, wenn $2x^6 = a^2$. Da $x^4 y^2 = a^2$ iſt, ſo iſt $2x^2 = y^2$, wenn die krumme Oberfläche ein Kleinſtes iſt.

Daß die Oberfläche ein Kleinſtes iſt, erhellt folgendergeſtalt. Es ſoll $u = x\sqrt{(xx + yy)}$ ein Kleinſtes ſeyn, alſo iſt es auch $u^2 = x^4 + x^2 y^2 = x^4 + \frac{aa}{xx}$.

Nun iſt $\frac{\partial . u^2}{\partial x} = 4x^3 - \frac{2aa}{x^3}$,

und $\frac{\partial^2 . u^2}{\partial x^2} = 12x^2 + \frac{6aa}{x^4}$. Da dieſer zweyte Dif-

ferential-Quotient poſitiv iſt, ſo iſt die Oberfläche ein Kleinſtes.

44. Aufg. Das Verhältniß des Halbmeſſers von der Grundfläche eines ſenkrechten Kegels zu ſeiner Höhe zu finden, wenn bey einem gegebenen Inhalte die ganze Oberfläche, (die krumme mit der ebenen Grundfläche) ein Kleinſtes iſt.

Mit Beybehaltung der vorigen Bezeichnungen iſt der Inhalt $= \frac{1}{3}\pi x^2 y$; die ganze Oberfläche $= \pi x \sqrt{(xx + yy)} + \pi x^2$. Man ſetze $xxy = a$, und $x\sqrt{(xx + yy)} + x^2 = u$, oder $\sqrt{(x^4 + ay)} + x^2 = u$, ſo ſoll u ein Kleinſtes ſeyn. Nun iſt

$$\partial u = \tfrac{1}{2}(4x^3 \partial x + a\partial y)(x^4 + ay)^{-\frac{1}{2}} + 2x\partial x,$$

und $a\partial y = -\dfrac{2aa\partial x}{x^3} = -2xy^2\partial x$.

Dadurch iſt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (2x^3 - xy^2)(x^4 + ay)^{-\frac{1}{2}} + 2x.$$

Setzt man dieſen Quotienten $= 0$, ſo iſt nach ein paar leichten Reductionen

$$0 = 2x^2 - y^2 + 2(x^4 + ay)^{\frac{1}{2}},$$

oder

$$y^2 - 2x^2 = 2\sqrt{(x^4 + ay)}.$$

Auf beiden Seiten quadrirt, wird

$$y^4 - 4x^2y^2 = 4ay = 4x^2y^2.$$

Alſo iſt $y^2 = 8x^2$,

und die Seite des Kegels $= \sqrt{(x^2 + y^2)} = 3x$.

Daß die Oberfläche ein Kleinſtes iſt, erhellt, ohne den Werth von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ zu ſuchen, daher, daß die Gränze von u für ein unendlich großes y, alſo unendlich kleines x, iſt xy oder $\frac{a}{x}$, das iſt, ein unendlich großes. Die Oberfläche nimmt folglich von einer gewiſſen Gränze an immer zu, wenn die Höhe zunimmt.

Die kleinſte Oberfläche (krumme und ebene zuſammen) iſt $= 4\pi x^2 =$ dem vierfachen von der Grundfläche; die krumme alſo dreymal ſo groß als die Grundfläche, wobey der Inhalt $= \frac{2}{3}\pi x^3 \sqrt{2}$ iſt.

45. Aufg. Eine Zahl a in zwey Theile zu theilen, ſo daß das Product aus der mten Potenz des einen Theils in die nte Potenz des andern Theils ein Größtes ſey.

Der eine Theil ſey x, alſo der andere $a - x$, und $x^m (a-x)^n = u$. Es iſt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = m x^{m-1}(a-x)^n - n x^m (a-x)^{n-1}$$
$$= (ma - mx - nx)\, x^{m-1}(a-x)^{n-1}.$$

Dieſer Quotient wird $= 0$, wenn $x = \frac{ma}{m+n}$; $x = 0$; $x = a$ iſt. Zu dem erſten dieſer Werthe gehört ein Größtes. Denn in der Reihe der u liegt derſelbe zwiſchen zwey Werthen, die $= 0$ ſind. Zur Übung ſuche man den Werth des Quotienten $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Es iſt $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$

$$\Big[-(m+n)\,x\,(a-x)$$
$$+ (m-1)(ma - mx - nx)(a-x)$$
$$- (n-1)(ma - mx - nx)x \Big] x^{m-2}(a-x)^{n-2}.$$

Setzt man hier $x = \frac{ma}{m+n}$; alſo $a - x = \frac{na}{m+n}$, ſo wird der zweyte und dritte Theil $= 0$, und es bleibt $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{m^{m-1} n^{n-1} a^{m+n-2}}{(m+n)^{m+n-3}}$. Da dieſer Werth negativ iſt, ſo iſt u ein Größtes.

46. Es ſeyn P und Q zwey Functionen von x, und $u = \frac{P}{Q}$. Es ſoll der größte oder kleinſte Werth dieſer gebrochenen Function gefunden werden. Man nehme das Differential, $\partial u = \frac{Q\partial P - P\partial Q}{QQ}$, und

Uu

ſetze den Quotienten $\frac{\partial u}{\partial x}$ oder $\frac{Q\partial P - P\partial Q}{QQ\partial x} = 0$.

Es iſt dadurch $Q\partial P - P\partial Q = 0$. Der Werth von x, den dieſe Gleichung giebt, iſt derjenige, zu welchem ein größter oder kleinſter Werth der gebrochnen Function gehört.

Um zu entſcheiden, ob ein größter oder ein kleinſter Werth vorhanden ſey, ſuche man den Differential-Quotienten $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Da $\partial u = \frac{Q\partial P - P\partial Q}{QQ}$ iſt, ſo iſt

$$\partial^2 u = \frac{\partial.(Q\partial P - P\partial Q)}{QQ} - \frac{2(Q\partial P - P\partial Q)\partial Q}{Q^3}.$$

Weil $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ genommen wird, ſo iſt der zweyte Theil $= 0$, und es iſt $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial.(Q\partial P - P\partial Q)}{QQ\partial x^2} =$ $\frac{Q\partial^2 P - P\partial^2 Q}{QQ\partial x^2}$. Von der Beſchaffenheit dieſes Quotienten, nachdem er poſitiv oder negativ iſt, hängt es ab, ob die Function ein Kleinſtes oder ein Größtes iſt. Da der Nenner ein Quadrat iſt, ſo kommt es allein auf die Beſchaffenheit des Zählers, $Q\partial^2 P - P\partial^2 Q$, an.

47. Exempel. Zu finden, in welchen Fällen die Formel, $\frac{2 - 3x + xx}{2 + 3x + xx}$, ein Größtes oder Kleinſtes wird.

Es iſt hier $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{6xx - 12}{(xx + 3x + 2)^2}$, und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{12x}{(xx + 3x + 2)^2} - \frac{2(6xx - 12)(2x + 3)}{(xx + 3x + x)^3}.$$

Iſt $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$; ſo iſt $xx = 2$, und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$

$\frac{12x}{(xx+3x+2)^2}$. Nimmt man $x = +\sqrt{2}$, ſo iſt $u = \frac{4-3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}-17$; ein Kleinſtes, weil $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ oder q poſitiv iſt. Nimmt man $x = -\sqrt{2}$, ſo iſt $u = \frac{4+3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}} = -12\sqrt{2}-17$, ein Größtes, da q negativ iſt, aber ein relatives, da es ſelbſt negativ iſt, alſo ein abſolutes Kleinſtes. Es iſt z. B. für

$$x = -\tfrac{4}{3}\ ;\quad u = -35$$
$$x = -\sqrt{2};\quad u = -33,97.$$
$$x = -\tfrac{3}{2}\ ;\quad u = -35.$$

48. Es ſey u eine vielförmige Function von x (Function, 9), und die Differentialgleichung zwiſchen u und x ſey $P\partial x + Q\partial u = 0$, wo P und Q Functionen von x und u ſind, auch P von x allein, und Q von u allein Functionen ſeyn können.

Man ſetze auch hier den Quotienten $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, ſo iſt $\frac{P}{Q} = 0$. Dadurch iſt entweder $P = 0$, oder Q unendlich groß. Dieſes letztere hat nicht Statt, wenn die Gleichung zwiſchen x und u eine rationale ganze iſt, weil dazu x oder u unendlich groß ſeyn müßten. Die Gleichung $P = 0$ verbunden mit der Gleichung zwiſchen x und u, liefert durch Herausſchaffung von u eine Gleichung für x, deren Wurzeln diejenigen Werthe von x ſind, zu welchen ein Größtes oder ein Kleinſtes gehört. Die größten oder kleinſten Werthe von u werden aus derjenigen Gleichung zwiſchen x und u gefunden, worin bey dem Eliminations-Proceß u nur noch in der erſten Potenz vorhanden iſt, welches alſo für jedes der aus der Endgleichung beſtimmten x durch einen einfachen Werth gefunden wird.

Es iſt darauf zu beſtimmen, ob die gefundenen Werthe Gröſste oder Kleinſte ſind. Dieſes kommt wiederum auf die Beſchaffenheit von $\frac{\partial^2 u}{dx^2}$ an. Die Gleichung, $P\partial x + Q\partial u = o$ werde aufs neue differentiirt, ſo iſt, wenn ∂x als unveränderlich genommen wird,

$$R\partial x^2 + S\partial x\partial u + T\partial x\partial u + V\partial u^2 + Q\partial^2 u = o,$$

wo $R\partial x$ und $T\partial x$ die Differentiale von P und Q in Beziehung auf x allein ſind, S und V die Differentiale derſelben Functionen in Beziehung auf u allein. Da $\frac{\partial u}{\partial x} = o$ geſetzt iſt, ſo iſt

$$R\partial x + \frac{Q\partial^2 u}{\partial x} = o, \text{ oder}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{R}{Q}.$$

Man differentiire alſo die Function P aufs neue in Beziehung auf x allein, und dividire den Differentialfactor R durch Q. Iſt der Quotient für einen der gefundenen Werthe von x und das zugehörige u poſitiv, ſo iſt u ein Gröſstes; iſt der Quotient negativ, ſo iſt u ein Kleinſtes.

49. Exempel. Die gröſsten oder kleinſten Werthe von u und die zugehörigen x zu finden, wenn $x^3 - 3aux + u^3 = o$.

Es iſt hier $P = 3x^2 - 3au$; $Q = 3u^2 - 3ax$. Aus der Gleichung, $P = o$, folgt $x^2 = au$. Der Werth von u in die urſprüngliche Gleichung geſetzt, giebt $x^6 - 2a^3x^3 = o$. Alſo iſt $x^3 = o$, und auch $x^3 = 2a^3$. Der erſtere Werth giebt $\frac{P}{Q} = \frac{o}{o}$, welches ein endlicher Werth ſeyn kann, in welchem Falle kein Gröſstes oder Kleinſtes vorhanden iſt.

Man ſetze für x eine ſo kleine Gröſse ± h, daſs ihre Potenzen weggelaſſen werden können, wenn die Frage

nur iſt, ob die entgegengeſetzte Beſchaffenheit von h die Werthe von u entgegengeſetzt mache. Aus den erſten beiden Gliedern der gegebenen Gleichung folgt $u = \frac{hh}{3a}$ + etc. aus dem zweyten und dritten folgt $u^2 = 3ah$ + etc., oder $u = \pm\sqrt{(3ah + \text{etc.})}$. Da der erſtere Werth von u poſitiv bleibt, es mag $+h$ oder $-h$ genommen werden, ſo iſt der Werth, $u = 0$, ein Kleinſtes. Auch iſt bey dieſer Form von u das verſchwindende P gegen das gleichfalls verſchwindende Q unendlich klein. Hingegen für $u = \pm\sqrt{(3ah + \text{etc.})}$ findet kein möglicher Werth Statt, wenn h negativ genommen wird. Es ſind hier drey Fortſchreitungen der u (an der zugehörigen Curve drey Zweige); eine derſelben hat die Form, $u = Ax^2 + Bx^5 + Cx^8 + \text{etc.}$ Die beiden andern haben die Form,

$u = \pm Ax^{\frac{1}{2}} + Bx^{\frac{4}{2}} + Cx^{\frac{7}{2}} + \text{etc.}$ Jene erſtreckt ſich für poſitive und negative, die beyden andern begegnen ſich für $x = 0$.

Nimmt man $x^3 = 2a^3$, oder $x = a\sqrt[3]{2}$, ſo iſt $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2}{a}$, alſo u ein Größtes. Es iſt dieſes $u = a\sqrt[3]{4}$.

50. Wenn zwey Fortſchreitungen der u für einen gewiſſen Werth von x, der a ſey, einen gemeinſchaftlichen Werth von u enthalten, ſo daß entweder für kleinere oder für größere Werthe von x als a iſt, keine der Fortſchreitungen möglich iſt, ſo erhält $\frac{\partial u}{\partial x}$ einen unendlich großen Werth für $x = a$. Man kann dieſes am deutlichſten einſehen, wenn man die Function u als Ordinaten einer Curve betrachtet. Die beiden Fortſchreitungen, wovon hier die Rede iſt, geben zwey Zweige, die für $x = a$ eine gemeinſchaftliche berührende haben, in welche die

Ordinate fällt. Hier iſt nun $\frac{\partial u}{\partial x}$ unendlich groß (berührende Linie, 14).

In der Gleichung (49.) iſt für die beiden Fortſchreitungen der u, von der Form, $u = \pm A x^{\frac{1}{2}} + B x^{\frac{4}{2}}$ + etc. der Quotient der verſchwindenden u, x, nämlich $\frac{u}{x} = \pm A x^{-\frac{1}{2}} = \pm \frac{A}{\sqrt{x}}$, das iſt, unendlich groß. Da für $x = 0$, ganz verſchiedene Werthe von $\frac{P}{Q}$ oder $\frac{\partial u}{\partial x}$ Statt haben, ſo wird er $= \frac{0}{0}$ gefunden, wie bey Doppelpuncten oder vielfachen Puncten (berührende Linie 24—26.). S. auch Function 50. ff.

Eine gemeinſchaftliche berührende Ordinate an zwey Zweigen einer Curve iſt zwar für den einen die größte, für den andern die kleinſte in der Folge der Ordinaten; allein, weil auf der einen Seite keine Ordinaten weiter möglich ſind, ſo kann ſie weder als ein Kleinſtes noch als ein Größtes angeſehen werden. Auch iſt für ſie $\frac{P}{Q}$ unendlich groß, nicht Null.

Die Ordinate an einer Spitze iſt daher auch nicht als ein Größtes oder Kleinſtes zu betrachten, wenn beide Zweige, die in der Spitze zuſammenſtoßen, zu einer gemeinſchaftlichen Abſciſſe gehören. Sie iſt an beiden die letzte oder die erſte. Liegen die Zweige von der Spitze nach entgegengeſetzten Gegenden, ſo möchte man die Ordinate an der Spitze als ein Größtes oder Kleinſtes anſehen können. Allein wegen der Aehnlichkeit mit jenem Falle, und da $\frac{\partial u}{\partial x}$ hier nicht Null, ſondern unendlich groß iſt, wird man eine ſolche Ordinate nicht als ein Größtes oder Kleinſtes anzuſehen haben.

III. Methode für Functionen von zwey oder mehr veränderlichen Größen.

51. Es ſey u eine Function zweyer veränderlichen Größen, x, y, und es ſollen diejenigen Werthe von u gefunden werden, die ein Größtes oder Kleinſtes ſind. Stellt man ſich die u als Ordinaten an eine krumme Fläche vor, auf deren Baſis die Ordinaten x, y genommen werden, ſo ſieht man leicht ein, daß für denjenigen Werth von x und von y, der die verlangte Beſchaffenheit hat, die Ordinate u, ſowohl in der Richtung der x, ohne y zu ändern, als in der Richtung der y, ohne x zu ändern, ein Größtes oder Kleinſtes ſeyn müſſe. Iſt nun $\partial u = P\partial x + Q\partial y$, ſo muß $\frac{\partial u}{\partial x}$ ſowohl als $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ſeyn, das iſt, es muß $P = 0$, und $Q = 0$ ſeyn. Allein dieſes wird noch allgemeiner zu erweiſen ſeyn, und insbeſondere iſt eine ſichere Methode nöthig, um zu entſcheiden, ob jene Annahmen Größte oder Kleinſte geben.

52. Man ſetze, daß a einer der Werthe von x ſey, für welche u die verlangte Beſchaffenheit hat, und b der zugehörige Werth von y. In der Function von x und y ſetze man $x = a + h$; $y = b + k$, wo h und k poſitiv oder negativ ſeyn können, entwickele die Theile der Function u, ſo erhält u die Form

$$u = A + Bh + Ck + Dh^2 + 2Ehk + Fk^2 + Gh^3 + 3Hh^2k + 3Khk^2 + Lk^3 + \text{etc.}$$

wo die Coefficienten durch die Beſchaffenheit der Function u beſtimmt werden. Das erſte Glied, A, iſt das Größte oder Kleinſte, welches beſtimmt werden ſoll. Man ſetze h und k ſo klein, daß die Glieder von dem Gk^3 an die Beſchaffenheit von $u - A$ nicht zu ändern vermögen, man mag die Vorzeichen von h und k ändern wie man will, $+h$ und $+k$; oder $+h$ und $-k$; oder $-h$ und $+k$; oder $-h$ und $-k$ nehmen.

Iſt nun u ein Kleinſtes, ſo iſt

$$Bh + Ck + Dh^2 + 2Ehk + Fh^2$$

poſitiv, für jede jener vier Annahmen von h und k; iſt u ein Größtes, ſo iſt jenes Aggregat in allen Fällen negativ. Damit dieſes für jede Beſchaffenheit von h und k Statt habe, muß erſtlich $B = 0$, und $C = 0$ ſeyn. Zweytens muß $Dh^2 + 2Ehk + Fk^2$ nicht $= 0$ werden können, weil ſonſt dieſes Aggregat entgegengeſetzte Werthe erhalten könnte, bey veränderter Größe und Beſchaffenheit der willkührlichen h und k. Es muß alſo die Gleichung,

$$Dh^2 + 2Ehk + Fk^2 = 0,$$

unmögliche Wurzeln haben, als wodurch ihre Werthe immer gleichnamig bleiben (Gleichung, 46.). Die Gleichung,

$$h^2 + \frac{2E}{D} kh + \frac{Fkk}{D} = 0,$$

hat unmögliche Wurzeln, wenn F und D gleichnamig (beide poſitiv oder beide negativ) ſind, und zugleich $\frac{Fkk}{D} > \frac{E^2kk}{D^2}$, das iſt, wenn $DF > E^2$ iſt (Gleichung 36.). Der Werth des Aggregats ihrer Glieder iſt alsdann immer poſitiv; daher iſt der Werth von $Dhh + 2Ekh + Fkk$ immer entweder poſitiv oder negativ, nachdem D dieſes oder jenes iſt. Betrachtet man k als Wurzel jener Gleichung, ſo iſt in dem Falle, daß ſie unmögliche Wurzeln hat, ebenfalls F mit D gleichnamig, und $DF > E^2$, und jenes Aggregat iſt poſitiv oder negativ, nachdem F dieſes oder jenes iſt, übereinſtimmig mit dem, was die Beſchaffenheit von D giebt. Die Bedingung $DF > E^2$ ſchließt zugleich ein, daß D und F gleichnamig ſind, da eine negative Größe immer als kleiner gegen eine poſitive angeſehen wird. Es kann nämlich nicht $-\beta^2 > \alpha^2$ ſeyn, weil dadurch $\alpha^2 + \beta^2 < 0$ wäre.

Iſt alſo $B = 0$, $C = 0$, und $DF > E^2$, ſo iſt ein Größtes oder Kleinſtes vorhanden, ein Größtes, wenn D und F negativ ſind, ein Kleinſtes, wenn D und F poſitiv ſind. Aus den beiden Gleichungen, $B = 0$, $C = 0$, ergeben ſich die Beſtimmungen von x und y, für welche u ein Größtes oder Kleinſtes iſt.

53. Es ſey $f(x, y)$ eine Function von x und y, ſo iſt, wenn $f(x, y) = u$ geſetzt wird,

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \frac{h}{1} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \frac{k}{1} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \cdot \frac{hh}{1.2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) \cdot \frac{2hk}{1.2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \cdot \frac{kk}{1.2} + \text{etc.}$$

wo die weggelaſſenen Glieder Producte von drey oder mehr Factoren, h, k, enthalten. Die Klammern zeigen partielle Differential-Quotienten an (Differentialgleichung, 14.). Der Quotient $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)$ zeigt an, daß u zuerſt nur in Beziehung auf x, und das Differential nur in Beziehung auf y zu differentiiren iſt, oder in umgekehrter Ordnung, worauf das zweyte Reſultat durch $\partial x \partial y$ dividirt wird.

Dieſer Satz wird in dem Artikel, Taylorſcher Lehrſatz, mit Erweiterung auf noch mehrere veränderliche Größen, erwieſen. Die gegenwärtige Formel wird man leicht aus Differentialrechnung, 38. herleiten können. Es iſt daſelbſt ſtatt u zu ſetzen theils h, theils k. Dadurch iſt in (52)

$$B = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right); \; C = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right); \; D = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right);$$

$$E = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right); \; F = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

wo in den unbeſtimmten Differentialquotienten für x und

y die gefundenen zuſammen gehörigen a und b zu ſetzen ſind.

54. Dieſe Methode läßt ſich auch auf Functionen von mehr als zwey veränderlichen Größen ausdehnen, wobey mehrere Bedingungen im Falle eines Größten und Kleinſten zu erfüllen ſind. Sie iſt von la Grange, der zuerſt die allgemeinſte Auflöſung für ſolche Functionen gegeben, und die Kennzeichen für Größte und Kleinſte aus einander geſetzt hat. (Miſcellanea Societ. Taurinenſis. T. I.). Euler hat in ſeiner Differentialrechnung, P. II. Cap. XI. nur Functionen von zwey veränderlichen Größen betrachtet, und hier die Kennzeichen zur Unterſcheidung des Größten und Kleinſten nicht vollſtändig angegeben. Er ſagt daſelbſt, §. 290., wenn die beiden Differentialquotienten zweyten Grades, $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ und $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$, nachdem für x und y die aus den beiden Gleichungen, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$, und $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$ gefundenen Werthe geſetzt ſind, beide ungleichnamig ausfallen, ſo ſey kein Größtes oder Kleinſtes vorhanden; wenn beide poſitiv ſind, ſo ſey u ein Kleinſtes; wenn beide negativ ſind, ſo ſey u ein Größtes. Das erſtere iſt richtig. Aber es folgt noch kein Größtes oder Kleinſtes, wenn beide Differentialquotienten gleichnamig ſind, weil dazu auch noch ſeyn muß $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \times \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) > \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2$. Die von la Grange gegebene Auflöſung findet man in Lacroix traité du calc. diff. et intégral. T. I. nr. 155.

55. Exempel. Es ſey $u = xx + yy + xy - ax - by$, ſo iſt $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2x + y - a$; $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2y + x - b$; $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = +2$; $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) =$

$+2$; $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = +1$. Setzt man die beiden erſten Differentialquotienten $= 0$, oder $2x + y - a = 0$ und $2y + x - b = 0$, ſo ergiebt ſich $x = \frac{2a - b}{3}$; $y = \frac{2b - a}{3}$. Ferner iſt das Product, $+4$, der beiden Differentialquotienten $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \times \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ größer als das Quadrat von $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)$, alſo iſt ein Größtes oder Kleinſtes vorhanden, und zwar ein Kleinſtes, weil jene beiden Quotienten poſitiv ſind. Man ſetze nun in der Function u für x und y die gefundenen Werthe, ſo iſt $u = -\frac{1}{3}(aa + bb - ab)$, ein relatives Kleinſtes, aber abſolut ein Größtes, da bey einer hinlänglich kleinen Veränderung von x und y die Veränderung von u poſitiv iſt, u alſo abſolut kleiner wird *).

56. Exempel. Eine Zahl a in drey Theile ſo zu theilen, daß das Product ihrer Quadrate ein Größtes ſey.

Es ſey $u = x^2 y^2 (a - x - y)^2$, ſo iſt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2xy^2(a - x - y)(a - 2x - y),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2x^2y(a - x - y)(a - 2y - x).$$

*) Das Exempel iſt aus Eulers Diff. Rechn. p. 619. genommen. Es iſt daſelbſt der kleinſte Werth von u geſetzt $= -\frac{aa + ab - bb}{3}$. Man muß dieſes nicht für irrig halten, da nach Eulers Bezeichnungsart das Zeichen — vor einem Bruche ſich bloß auf das erſte Glied des Zählers bezieht.

Da keiner der Theile Null ſeyn ſoll, ſo kann man nur ſetzen, $a - 2x - y = 0$; und $a - 2y - x = 0$, welches giebt $x = \frac{1}{3}a$; $y = \frac{1}{3}a$. Den erſten Quotienten differentiire man noch einmahl in Beziehung auf x, und ſetze in dem Differential für x und y die gefundenen Werthe, ſo iſt $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = -4 \cdot \frac{a^4}{81}$. Den zweyten differentiire man noch einmahl in Beziehung auf y, ſo iſt nach derſelben Subſtitution, $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = -4 \cdot \frac{a^4}{81}$. Den erſten differentiire man in Beziehung auf y, oder den zweyten in Beziehung auf x, ſo iſt $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = -2 \cdot \frac{a^4}{81}$. Das Product jener beiden Quotienten iſt größer als das Quadrat des letztern, alſo iſt ein Größtes oder Kleinſtes vorhanden, und zwar das erſtere, da jene beiden Quotienten negativ ſind.

Allgemeiner iſt die Aufgabe von Lacroix vorgetragen, a. a. O. nr. 156., wo $u = x^m y^n (a - x - y)^p$ geſetzt iſt.

Zur Geſchichte der Lehre vom Größten und Kleinſten.

Unter den Alten hat Apollonius in ſeinem Werke von den Kegelſchnitten der Unterſuchung über die größten und kleinſten geraden Linien, die von einem Puncte auf der Axe (in der Ellipſe auf der einen oder der andern) an die Curve gezogen ſind, theils einzelnen, theils mehrern in einem Puncte außer der Axe zuſammenſtoßenden, oder die von einem gegebenen Puncte her genommen werden, eine beſondere Abtheilung gewidmet. Sie enthält 77 Sätze, weil nach der Methode der Alten alles ſehr zergliedert und ſtufenweiſe vorgetragen wird. So nimmt Apollonius zuerſt den Punct auf der großen Axe in dem Abſtande, ſo groß als der halbe Parameter, von dem Scheitel, dar-

auf in einem kleinern, und dann in einem größern Abſtande, wobey die Linien alle an der einen Seite der Axe liegen. Ferner nimmt er in der Ellipſe den Punct, von welchem Linien an die eine Hälfte ihres Umfanges gezogen werden, auf der kleinen Axe oder ihrer Verlängerung, zuerſt in dem Abſtande von dem einen Scheitel ſo groß als der halbe zu der kleinen Axe gehörige Parameter (die dritte Proportionale zu der kleinen und der großen Axe), wo es drey Fälle giebt, nachdem der halbe Parameter kleiner, oder ſo groß, oder größer als die kleine Axe iſt. Dann wird der Abſtand größer als der halbe Parameter, und endlich kleiner als derſelbe, größer aber als die halbe Axe genommen. In dem letzten Falle geht die größte Linie nach einem Puncte des Umfanges zwiſchen den beyden Scheiteln. Die Sätze 27—30 enthalten, daß die berührende an dem Endpuncte einer kleinſten oder größten ſenkrecht auf ſie ſteht, und S. 32, daß die Normale auf die berührende, von dem Berührungspuncte bis an die Axe genommen ein Kleinſtes iſt. In S. 44. 45. wird bewieſen, daß (auf derſelben Seite der Axe und in der Ellipſe in einem und demſelben Quadranten) nicht mehr als zwey Kleinſte, bis an die Axe genommen, ſich in einem Puncte ſchneiden, wenn ſie verlängert werden. In der Hälfte einer Ellipſe können nach S. 47. nicht vier Kleinſte vom Umfange bis an die Axe gezogen, ſich in einem Puncte ſchneiden, nur drey. Die Beweiſe von 44. und 45. ſind weitläuftig. Die Algebra giebt für die Ordinaten an der Parabel, die zu Linien durch einen gegebenen Punct gehören, worauf das Segment zwiſchen der Curve und der Axe ein Kleinſtes iſt, eine Gleichung vom dritten Grade mit zwey poſitiven Wurzeln, wenn ſie alle möglich ſind. An der Ellipſe hat die Gleichung für ſolche Ordinaten drey poſitive und eine negative; an der Hyperbel zwey poſitive und zwey negative Wurzeln. Sehr merkwürdig ſind der 51ſte und 52ſte Satz. Es wird hierin gezeigt, in welchem Falle auf keiner der durch einen gegebenen Punct an die Curve gezogenen Linien von der Axe an der dem Puncte entgegengeſetzten Seite ein Kleinſtes abge-

ſchnitten wird, in welchem Falle nur auf einer aller dieſer Linien ein Kleinſtes Statt hat, und in welchem auf zwey Linien ein Kleinſtes vorhanden iſt. In der Ellipſe iſt nur ein Quadrant zu nehmen, und der gegebene Punct ſoll in einer auf die zu dem Quadranten gehörige halbe große Axe ſenkrechten liegen, ſo wie bey den andern beiden Kegelſchnitten dieſe ſenkrechte auf die Axe ſelbſt fallen muß. Die Gränzſcheidungen dieſer drey Fälle ſind, wenn der Abſtand des gegebenen Punctes von der Axe größer, oder ſo groß, oder kleiner iſt als eine gewiſſe, für die Hyperbel und Ellipſe insbeſonders, ſehr künſtlich beſtimmte Linie. Dieſe Unterſuchung möchte zu den feinſten in der alten Geometrie gehören. Apollonius leiſtet durch ſeine Geometrie, was der Algebraiſt leiſtet, wenn er die Gränzſcheidung der möglichen poſitiven Wurzeln einer cubiſchen und vollſtändigen biquadratiſchen Gleichung angiebt. Für cubiſche iſt das Verfahren bekannt. Bey vollſtändigen biquadratiſchen wird es ſchon Schwierigkeiten machen. Von dem 64ſten Satze an bis zu Ende zeigt Apollonius, auf welche Art Größte oder Kleinſte für die ganzen Linien, die aus einem gegebenen Puncte an einen Kegelſchnitt gezogen werden, Statt haben. Es ſind dieſes die Normalen auf die Curve, eben ſo wie bey den Segmenten zwiſchen der Curve und der Axe, wenn dieſe Kleinſte ſind. Das ganze fünfte Buch des Apollonius müſſen wir, nach dem Zuſtande unſerer Theorie von Größten und Kleinſten, eine Abhandlung über die Normalen von gegebenen Puncten an einen Kegelſchnitt nennen. S. den Artikel, Normale.

In dem Artikel, Geometrie, S. 322. iſt angeführt, daß nur die vier erſten Bücher des Werks über die Kegelſchnitte, im Original noch vorhanden ſind. Das fünfte, deſſen Inhalt hier erzählt worden, iſt nebſt dem ſechsten und ſiebenten erſt im Jahr 1661 aus einer arabiſchen Ueberſetzung lateiniſch von Joh. Alph. Borelli herausgegeben, mit Beyhülfe eines gelehrten Arabers, des Maroniten Abrahami Ecchellenſis. Noch eher als das arabiſche Manuſcript in der Groſsherzoglichen Bibliothek zu Florenz aufgefunden war, hatte ſich Viviani

daſelbſt mit der Wiederherſtellung des fünften Buchs der Kegelſchnitte beſchäftigt. Die Entdeckung deſſelben reizte ihn an, ſein Werk zu vollenden, welches er auch noch vor der Erſcheinung der Ueberſetzung des Apolloniſchen Werks herausgab. Der Prinz Leopold von Medicis bezeugte mit Siegel und Unterſchrift, daß er drey Convolute mit benannter Anzahl der Blätter von einem Manuſcripte des Viviani über die Größten und Kleinſten an Kegelſchnitten erhalten habe. Das Werk des Viviani hat den Titel: De maximis et minimis geometrica divinatio in V. Conicorum Apollonii Pergaei adhuc deſideratum. Liber I. Florentiae 1659. Liber II. ib. eod. 154 Seiten in folio jedes. Das erſte Buch hat mit dem Vortrage des Apollonius nichts gemein. Es wird darin gezeigt, wie durch einen Scheitel eines Kegelſchnittes ein anderer, der ein größter ſey, eingeſchrieben, oder der ein kleinſter ſey, umgeſchrieben werde. Für die geſuchte Ellipſe oder Hyperbel iſt die Hauptaxe gegeben. Die eingeſchriebene oder umgeſchriebene Figur ſchneidet die gegebene nicht, berührt ſie nur im Scheitel. Statt des Kegelſchnittes wird auch ein gegebener geradlinichter Winkel genommen. Es iſt leicht zu bemerken, daß beide Kegelſchnitte in dem Scheitel einen gemeinſchaftlichen Halbmeſſer der Krümmung haben. Der Krümmungskreis iſt größer als alle berührende Kreiſe, die innerhalb der Curve fallen, und kleiner als alle, die über derſelben hinaus liegen. Viviani hat den Halbmeſſer der Krümmung an dem Scheitel eines Kegelſchnittes gebraucht, ohne ihn als ſolchen zu kennen.

In dem zweyten Buche handelt Viviani zuerſt von den größten oder kleinſten Linien, die aus einem gegebenen Puncte an einen Kegelſchnitt ſich ziehen laſſen. Doch hat ſeine Ausführung nicht die ſchöne ſyſtematiſche Einheit wie bey Apollonius; auch fehlen die feinſten Sätze, welche der griechiſche Geometer gefunden hat. Merkwürdig iſt, daß hier (prop. 21.) zuerſt eine Trajectoria vorkommt, die Semita minimarum linearum, wie Viviani ſie nennt, für unendlich viele Parabeln über einer

gemeinſchaftlichen Axe mit ihrem Scheitel, ſo daß die geraden Linien von einem Puncte der Axe jede eine der Parabeln in der Trajectoria ſenkrecht ſchneiden. Der gedachte Punct iſt von dem Scheitel um den halben Parameter einer gegebenen Parabel entfernt; die Trajectoria iſt eine Ellipſe, welche die Parabel innerlich berührt.

Viviani hat noch einige ihm eigene Unterſuchungen. Durch einen Punct innerhalb eines Kegelſchnittes eine gerade Linie zu ziehen, die den kleinſten Abſchnitt gebe. Vergleichung der Abſchnitte über den Doppelordinaten verſchiedener Durchmeſſer deſſelben Kegelſchnittes mit gleichen Abſchnitten des Durchmeſſers von dem Scheitel an genommen. Kleinſte Linien an eine convexe oder concave Fläche. Kleinſte Abſchnitte in einem Konoid oder Sphäroid. Übrigens ſind in dem Werke des Viviani manche Bemerkungen über die Kegelſchnitte enthalten, die zu ſeiner Zeit neu ſeyn mochten, vielleicht auch noch jetzt benutzt werden könnten.

In dem achten Buche der Kegelſchnitte von Apollonius kommen noch manche Sätze vom Größten und Kleinſten in Beziehung auf die conjugirten Durchmeſſer und Parameter derſelben vor, als: Die Summe zweyer conjugirten Durchmeſſer in der Ellipſe iſt am größten, wenn ſie gleich groß ſind. In der Ellipſe und Hyperbel iſt die Summe der beiden Axen kleiner als die Summe je zweyer andern conjugirten Durchmeſſer. Das Rechteck von den beiden Axen iſt kleiner als das Rechteck von irgend zwey conjugirten Durchmeſſern (Ellipſe 26. 25. 23.). Der Parameter zu der Axe einer Parabel iſt unter allen Parametern der Durchmeſſer der kleinſte. Dergleichen Sätze findet Apollonius von dem Unterſchiede eines Durchmeſſers und ſeines Parameters (laterum figurae ſuper diametro), ihrer Summe, des Rechtecks von ihnen, der Summe und des Unterſchiedes ihrer Quadrate.

Von der zweyten Gattung des Größten und Kleinſten, zwiſchen Größen von verſchiedener Form mit einer gemeinſchaftlichen Beſtimmung hat uns Pappus aus der

Geometrie der Alten Beyſpiele aufbehalten, in dem fünften Buche ſeiner mathematiſchen Sammlungen. Er zeigt, daß eine geradlinichte reguläre Figur größer iſt als jede andere geradlinichte Figur von derſelben Anzahl Seiten mit demſelben Umfange, und umgekehrt, daß bey demſelben Umfange der Inhalt mit der Anzahl der Seiten zunimmt; daß der Kreis größer iſt als jede geradlinichte Figur von gleichem Umfange mit jenem, auch umgekehrt; und endlich, daß unter Kreisabſchnitten von gleicher Länge der Bogen der Halbkreis der größte iſt. Von der Kugel beweiſet Pappus, daß ſie größer iſt, als jeder reguläre Körper von gleicher Oberfläche mit der Kugel. Der Beweis läßt ſich auf alle um eine Kugel zu beſchreibende Körper ausdehnen. Von den regulären Körpern beweiſet er, daß bey einerley Oberfläche, die Ordnung nach der zunehmenden Größe des Inhalts iſt, Tetraedrum, Hexaedrum, Octaedrum. Dodekaedrum, Ikoſaedrum.

Als die neuere Analyſis ſich zu bilden anfieng, war nebſt der Aufgabe über die berührenden, eine mit dieſer verwandte wichtige Frage, die größten oder kleinſten Werthe zu finden, womit ſich die Mathematiker beſchäftigten. Fermats Methode iſt in dem Artikel, Differentialrechnung, Th. I. S. 828. beſchrieben. Sie erſtreckte ſich nicht weiter als auf rationale ganze Functionen, und entſchied nicht, ob das gefundene ein Größtes oder Kleinſtes ſey, nahm auch nicht Rückſicht auf den Fall, da das Differential einer Function Null iſt, ohne daß dieſes ein Größtes oder Kleinſtes iſt.

Hudde gab für rationale Functionen, ſelbſt für gebrochne, eine genau beſtimmte Regel, ihren größten oder kleinſten Werth zu finden, welche er auf Functionen von mehrern veränderlichen (nach ihm unbekannten) ausdehnt, wenn ſo viele Gleichungen als veränderliche Größen, weniger eine, vorhanden ſind. Er gründet ſeine Methode auf eine Eigenſchaft derer Gleichungen, in welchen zwey oder mehr Wurzeln gleich groß ſind. Wenn die Glieder derſelben, die etwa fehlenden mit gerechnet,

durch die Glieder einer arithmetiſchen Progreſſion multi- plicirt werden, ſo entſteht eine Gleichung, welche eine von den zwey gleichen Wurzeln jener, oder zwey von den drey gleichen, drey von den vier gleichen u. ſ. f. enthält. Hudde's Verfahren kommt mit demjenigen, welches die Differentialrechnung lehrt, ganz überein. Sein Aufſatz hierüber iſt in den Zuſätzen der von van Schooten beſorgten Ausgabe der Geometrie von Descartes enthalten, pag. 507. In dem am Ende beygefügten Abriſſe einer Abhandlung über dieſe Materie bemerkt Hudde ſchon, daß es Fälle gebe, wo man nicht wiſſe, ob die nach ſeinem Verfahren gefundene Gleichung ein Größtes oder ein Kleinſtes liefere, oder ob überhaupt das eine oder das andere Statt habe.

In Huygens Werken, 2. Bd. iſt ein Beweis von Fermats Regel nebſt der Erweiterung auf gebrochne rationale Functionen zu finden.

Tſhirnhauſen brachte die Frage vom Größten und Kleinſten auf dieſe, den Punct einer Curve zu finden, wo die berührende der Abſciſſenlinie parallel iſt. Nova methodus determinandi maxima et minima, auct. D. T. Acta Erud. 1683.

Die Differentialrechnung gab die allgemeinſte, kürzeſte und einleuchtendſte Methode zur Beſtimmung der größten und kleinſten Werthe einer Function an die Hand. Newton trägt in ſeiner Schrift, Methodus fluxionum et ſerierum infinitarum, Probl. III. dieſe Aufgabe vor, löſet ſie dadurch auf, daß er die Fluxion der Function Null ſetzt, und zeigt noch neun Aufgaben, das Größte oder Kleinſte betreffend, an, ohne ihre Auflöſung mitzutheilen. Einige derſelben möchten nicht leicht ſeyn. Die Schrift iſt ſchon im Jahr 1671 aufgeſetzt, ſ. Th. I. S. 833.

Leibnitz machte ſeine Differentialrechnung zugleich mit ihrer Anwendung auf die Beſtimmung der Größten und Kleinſten bekannt, in den Actis Erud. 1684. ſ. Th. I. S. 842. Die Aufgabe von dem Tage der kürze-

ſten Dämmerung ſcheint eine der erſten geweſen zu ſeyn, woran die beiden Bernoulli die neue Methode verſuchten. Dieſe Aufgabe machte ihnen aber doch viel zu ſchaffen, da Johann Bernoulli geſteht, daß er und ſein Bruder ſich fünf Jahre lang damit beſchäfftigt hätten. Io. Bernoulli Opp. T. I. nr. 10. Iac. Bernoulli Opp. T. I. nr. 53. T. II. p. 1075. Doch hatte Nunnez (Nonius) in Portugall die Aufgabe geometriſch aufgelöſet, in einer beſondern Schrift über die Dämmerungen, Liſſabon 1542, nur daß er nicht ein ſo einfaches Reſultat wie die beiden Bernoulli fand.

Joh. Bernoulli legte den Geometern einige geometriſche Aufgaben vor, worin ein Kleinſtes zu beſtimmen gefordert wird, daß ſie ihre Methoden daran verſuchen möchten. Iourn. des Sc. 1697. Opp. I. 39. Er beſtimmte, auf welcher Cykloide ein Körper von einem gegebenen Puncte bis zu einer gegebenen lothrechten in der kürzeſten Zeit fällt. Opp. T. I. p. 210. 254. Weniger ſchwer waren die Auflöſungen der Frage, die vortheilhafteſte Lage eines Segels zu finden, gegeben die Richtung des Windes und des Kiels; auch den vortheilhafteſten Winkel des Steuerruders mit dem Kiel zur Drehung des Schiffes zu beſtimmen. Opp. T. II. p. 32. 41. Noch ein paar Fragen über Größte bey dem Stoße, Opp. T. III. p. 62. 64. Jacob Bernoulli zeigte, wie auf krummlinichten und geradlinichten Konoiden die kürzeſte Linie zwiſchen zwey gegebenen Puncten gefunden werde; Opp. T. II. p. 1023. 1025.

Am bekannteſten ward die Methode, mittelſt der Differentialrechnung die Größten und Kleinſten zu beſtimmen, durch des Marquis de l'Hospital Analyſe des infiniment petits, erſte Ausg. 1696, worin (Sect. III.) an mehreren nicht ſchweren Beyſpielen der Gebrauch der Rechnung gezeigt wird. In dem letzten Abſchnitte wird noch ein beſonderes Verfahren gelehrt, die Differentialrechnung auf algebraiſche Curven anzuwenden, um die größten oder kleinſten Ordinaten zu beſtimmen, woraus

die von Hudde gefundene Methode hergeleitet wird, die nur für dieſe Gattung von Curven anwendbar iſt.

Die Fälle, wo ein Größtes, oder ein Kleinſtes, oder keines von beiden vorhanden iſt, wenn gleich das Differential der Function in Vergleichung mit dem Differential der Functionalgröße Null iſt, zu unterſcheiden, gebrauchte man entweder geometriſche Conſtructionen, oder, wie in dieſem Artikel geſchehen iſt, den Taylorſchen Lehrſatz. In Maclaurins Werke über die Fluxionen (1742) trifft man beide Methoden an, im I. B. 9 Kap. und II. B. 5. Kap. Die geometriſche iſt ſehr künſtlich und ſchwierig. Maclaurin nimmt neben der vorgegebenen Curve, an welcher die größten oder kleinſten Ordinaten beſtimmt werden ſollen, eine zweyte Curve an, deren Ordinaten dem Differentialquotienten $\partial y : \partial x$ proportional ſind, wo x die Abſciſſen, y die Ordinaten an jener ſind. Ob in frühern Schriften ſchon die beſtimmte Regel für alle Fälle gegeben ſey, muß ich der Nachforſchung gelehrter Leſer überlaſſen.

Cramer beſtimmt in ſeiner Analyſe des lignes courbes algébriques die Lage der berührenden an einer Curve bloß durch die Analyſis des Endlichen, daher auch im 11ten Kap. die Puncte der größten und kleinſten Ordinaten durch die Annahme, daß die berührende der Abſciſſenlinie parallel ſey, mit Rückſicht auf die hier möglichen Beſchränkungen beſtimmt werden.

Euler hat in dem zweyten Theile ſeiner Differentialrechnung, Cap. X. XI. die Lehre von den größten und kleinſten Werthen einer Function ſehr lichtvoll vorgetragen, und ſie auf den Taylorſchen Lehrſatz gegründet. Der Mangel, den ſein Vortrag noch bey Functionen von zwey veränderlichen Größen hat, iſt von la Grange in den Miſcellaneis Soc. Taurin. T. I. gehoben, ſ. oben 54.

Über die Vergleichungen der Figuren und Körper, die in der Elementar-Geometrie betrachtet werden, in Beziehung auf den Inhalt bey denſelben Begränzungen durch Seitenlinien oder Seitenflächen iſt ein Hauptwerk

die in (25.) angeführte Schrift von L'Huilier. Aus der hiſtoriſch-kritiſchen Einleitung gebe ich hier das Verzeichniß der darin beurtheilten Schriften und Abhandlungen, die zum Theil auch ſich auf die iſoperimetriſche Aufgabe erſtrecken.

De Molieres traité ſynthétique des lignes du premier et du ſecond genre, 1641.

Moula de maximis in figuris rectilineis, Comm. Ac. Petrop. a. a. 1737.

Elvius Beweis, daß jede in einem Kreiſe eingeſchriebene geradlinichte Figur den größten Raum einſchließet, der von dieſen Seiten, in eben der Ordnung geſtellt, eingeſchloſſen werden kann. Abhandlungen der Schwed. Ak. der Wiſſ. 3r Band. Der Zuſatz, in eben der Ordnung geſtellt, iſt unnöthig.

Klingenſtierna Bemerkungen über die Abhandlung von Elvius. Eb. daſ, 4r Bd.

Eine Abhandlung von Cramer über denſelben Satz in den Mem. de l'Acad. de Berlin für J. 1752.

In Thomas Simpſons Anfangsgründen der Geometrie iſt ein kurzer aber ſehr feiner Aufſatz über die Größten und Kleinſten enthalten.

Les trois coups d'eſſai géométriques par *Marsson*, à Strasbourg 1770. Scharfſinnig, aber auch hin und wieder übereilt.

Tommaſini de maximis et minimis ad inſtitutiones geometricas accommodatis Specimen, Piſis 1774. In einigen Stellen fehlt die Schärfe der Beweiſe, und die Anordnung hätte zur Faßlichkeit beſſer gemacht werden können.

L'Huilier hat in den Mém. de l'Acad. de Berlin, a. 1781 einen lehrreichen Aufſatz über den Bau der Bienenzellen geliefert. Die Bienenzellen ſind ſechsſeitig prismatiſch mit einem pyramidaliſchen Boden, der von drey Rhomben zuſammengeſetzt wird, welche an jeder der ſechs Seitenflächen ein Dreyeck abſchneiden, wodurch

die ſechs Seitenflächen in Trapezien verwandelt werden. Die drey Rhomben des Bodens machen mit den Seitenflächen und unter ſich Winkel von 120 Grad, eben ſo wie die Seitenflächen mit einander, kleine Ungleichheiten nicht gerechnet. Nun findet ſich, daß bey einer gegebenen Höhe der Zelle, durch dieſe Lage der rhomboidiſchen Bodenflächen, und die daraus entſpringende Größe derſelben, der Aufwand an Wachs zur Conſtruction des Bodens am geringſten iſt, und daß er ſich zu dem Aufwande bey einem flachen Boden verhält wie $\sqrt{2} : \sqrt{3}$, oder nahe wie 141 : 173. Allein, wenn die möglichſte Erſparung des Wachſes bey dieſem Bau die Hauptabſicht wäre, ſo würde, bey einem gegebenen räumlichen Inhalte, die Höhe der Zellen ſich zu einer Seitenlinie der Grundfläche oder des Durchſchnittes wie $1 : \sqrt{2}$ (wie 100 : 141. nahe), und zu dem Halbmeſſer des eingeſchriebenen Kreiſes wie $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ verhalten müſſen. Die Erſparung könnte noch weiter getrieben werden, wenn anſtatt des Bodens von drey Rhomben eine Pyramide von ſechs Seitenflächen mit einer gewiſſen Höhe genommen würde. L'Huilier bemerkt ſehr richtig, daß die Erſparung an Wachs nur ein Nebenzweck ſey, oder vielmehr gar nicht in Betracht komme. Zellen, die eine ſo geringe Tiefe in Vergleichung mit ihrem Durchmeſſer (100 : 282) hätten, wären nicht tauglich, die junge Brut vor nachtheiligen Wirkungen und Gefahr von Inſecten zu ſchützen. Die Feſtigkeit des ganzen Baues iſt es, welche durch die ſechsſeitige Geſtalt der Zellen mit einem Boden von drey Rhomben auf das vortheilhafteſte erhalten wird.

Pappus macht in der Vorrede zu dem Buche von iſoperimetriſchen Figuren, dem Fünften ſeiner Sammlung, die Bemerkung, daß die ſechsſeitige Geſtalt der Bienenzellen unter denjenigen, welche um einen Punct herum den Raum ausfüllen, von den Bienen deshalb gewählt ſey, weil ſie merkten, daß dieſe Geſtalt mehr Raum gewähre als die dreyſeitige und vierſeitige.

Kepler erwähnt einmahl nebenher des dreyſeitigen Bodens der Bienenzellen und der Eingreifung von beiden

Reihen derſelben in der Harmonice mundi prop. 27. Maraldi beſtimmte die Winkel der Rhomben, und zeigte, wie durch die Einſchichtung der pyramidaliſchen Böden zwiſchen einander die Feſtigkeit der Zellen in den Wachsſcheiben bewirkt wird, in den Mém. de l'Ac. des Sc. 1712. Reaumur gab den Geometern die Unterſuchung auf, ob durch die Geſtalt des Bodens eine Erſparung an Wachs erhalten würde. König lieferte eine Abhandlung darüber, wovon ein Auszug in den gedachten Memoiren vom J. 1739 zu finden iſt. Hernach hat Maclaurin in den Philoſ. Tranſ. für 1743 die Unterſuchung vorgenommen, auch Boscowich in ſeiner Ausgabe des philoſophiſch-phyſikaliſchen Lehrgedichts von Bened. Stay, Rom 1760. L'Huilier hat die angeführte Abhandlung mit einigen Abänderungen in die Schrift de relatione mutua etc. eingerückt. Ich habe auch in dem Hannöveriſchen Magazin vom Jahr 1772. St. 23. Betrachtungen über den Bau der Bienenzellen angeſtellt. Ich fand die Gleichheit aller Flächenwinkel, und das Minimum in dem Aufwande von Wachs, bemerkte auch dabey, daß das letztere eine geometriſche Folge von jener iſt. Die Bienen wiſſen Wachsflächen bloß unter einem Winkel von etwa 120 Grad an einander zu fügen, und dabey den Zellen eine gehörige Länge und Weite nach Maaßgabe ihres eigenen Körpers zu geben. Nicht die Erſparung an Wachs, wozu keine nöthigende Urſache war, ſondern die Zuſammenfügung der Zellen aus zwey parallelen Reihen iſt das kunſtreiche. Je drey Zellen laſſen zwiſchen ihren Böden eine Vertiefung, welche den Boden einer Zelle in der gegen über liegenden Reihe abgiebt, und die gemeinſchaftliche Kante je dreyer Zellen dient zum Schlußſtein für den Boden der entgegengeſetzten Zelle. Die Vertiefung hat, nach Maraldi's Bemermerkung, den Nutzen, daß die Tropfen Honig, welche die Bienen der jungen Brut zur Nahrung bringen, dicht um ſie herum zuſammen fließen. Dazu ſetze ich nun noch, daß die Zellen eine hinlängliche Tiefe erhalten mußten, um zu Behältern des Honigs tauglich zu ſeyn.

Grundfläche (baſis) iſt die ebene Figur, über welcher ein Prisma, ein Kegel, ein Konoid errichtet iſt. Den Durchſchnitt eines Körpers mag man auch die Grundfläche des einen körperlichen Segments nennen, insbeſondere bey runden Körpern, die durch die Umdrehung einer ebenen Figur um ihre Axe entſtanden ſind.

Grundlinie (baſis) iſt die gerade Linie, über welcher ein Dreyeck, Parallelogramm oder Trapezium errichtet iſt. Auch die Durchſchnittslinie einer ebenen Figur iſt die Grundlinie des Segments, beſonders, wenn ſie und alle ihr parallelen durch eine gewiſſe gerade Linie halbirt werden.

Im Lateiniſchen iſt nur ein Wort, baſis, für zwey Begriffe, die man im Deutſchen durch Grundfläche und Grundlinie unterſcheidet.

An Kegeln und Konoiden ſind Grundfläche und Scheitel das äuſſerſte ſich entgegengeſetzte; in einem Dreyecke Grundlinie und Spitze.

Grundſatz iſt ein Satz, der für ſich ſo augenſcheinlich iſt, daß er keines Beweiſes bedarf. Man kann die Grundſätze eintheilen in logiſche oder formale, und in materiale. Die erſtern enthalten eine Schlußform, die der Mathematik eigen iſt. Dahin gehören die ſieben erſten Grundſätze in dem 1. Buche der Euklidiſchen Elemente. Was einem und eben demſelben gleich iſt, iſt ſelbſt gleich. Gleiches zu Gleichem hinzugethan, giebt Gleiches u. ſ. f. S. Beweis. Th. I. S. 301. Die materiellen Grundſatze fließen unmittelbar aus dem Begriffe, den ſie betreffen. Was einander deckt, iſt gleich. Das Ganze iſt größer als ſein Theil. Alle rechte Winkel ſind einander gleich. Zwey gerade Linien ſchließen keinen Raum ein. Alle Halbmeſſer eines Kreiſes ſind gleich groß.

Der 11te Grundſatz bey Euklides, die parallelen geraden Linien betreffend, iſt nicht ſo wohl ein Grundſatz, als vielmehr der umgekehrte Satz eines ſtreng erweisbaren Satzes.

Grundzahl iſt daſſelbe was Primzahl, und könnte recht gut zur Verdeutſchung dieſes halbfremden Wortes gebraucht werden. S. Primzahl.

Guldins Regel, ſ. Centrobaryca methodus.

H.

Halbmeſſer (Semidiameter), die Hälfte eines Durchmeſſers einer Curve. Im Kreiſe ſind alle Halbmeſſer ſich gleich. Hier heißt der Halbmeſſer auch der Radius.

Hapſologarithmus, Logarithme der Tangente eines Winkels, ein nicht üblich gewordenes Kunſtwort. S. Anthapſologarithmus.

Harmoniſche Proportion iſt zwiſchen vier Größen, a, b, c, d, wenn $a - b : c - d = a : d$; eine ſtetige zwiſchen drey Größen, a, b, c, wenn $a - b : b - c = a : c$ iſt. Z. B. 5, 3, 21, 15, oder 3, 5, 8, 24, und 2, 3, 6.

In dem erſten Falle iſt $(a - b)d = (c - d)a$, woraus folget $(2a - b)d = ac$, und $d = \frac{ac}{2a - b}$, ſo wie $a = \frac{bd}{2d - c}$. Das vierte Glied wird auf einerley Art gefunden, die Proportion mag zunehmend oder abnehmend ſeyn.

Für eine ſtetige Proportion iſt $c = \frac{ab}{2a - b}$; und das mittlere Glied $b = \frac{2ac}{a + c}$.

Das arithmetiſche Mittel zwiſchen zwey Zahlen, verhält ſich zu dem geometriſchen, wie das geometriſche zu dem harmoniſchen Mittel.

Die Benennung, harmoniſche Proportion, rührt daher, daß die numeriſchen Werthe der Töne aus dem harten Accord, C, E, G, c, ſtetige harmoniſche Proportionen geben, nemlich C, G, c, und C, E, G. Die Werthe jener Töne verhalten ſich wie die Längen der Seiten, bey übrigens gleichen Umſtänden, nämlich wie $1, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$, oder wie 30, 24, 20, 15. Hier ſind 30, 20, 15, und 30, 24, 20, harmoniſch proportional. Der Haupton, die Quarte und große Sexte geben auch eine harmoniſche Proportion, nämlich ihre Werthe, $1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}$, oder 20, 15, 12.

Eine harmoniſche Progreſſion iſt eine Folge von Größen, deren je drey einander nächſte eine ſtetige harmoniſche Proportion ausmachen Es ſind a, b, c, d, e, etc. in harmoniſcher Progreſſion, wenn $c = \frac{ab}{2a-b}$; $d = \frac{bc}{2b-c}$; $e = \frac{cd}{2c-d}$, u. ſ. f.

Z. B. $\frac{4}{4}, \frac{4}{5}, \frac{4}{6}, \frac{4}{7}, \frac{4}{8}, \frac{4}{9}, \frac{4}{10}, \frac{4}{11}, \frac{4}{12}, \frac{4}{13}, \frac{4}{14}$, u. ſ. f. Hier iſt $\frac{4}{9}$ die Oberoctave von D, $\frac{4}{10}$ daſſelbe Intervall von E, $\frac{4}{12}$ von G. Aber $\frac{4}{7}$ iſt ein Ton, der ein wenig niedriger als B iſt, den auch Kirnberger in die gewöhnliche Tonleiter einſchieben wollte. Ferner $\frac{4}{11}$ iſt ein Ton zwiſchen f und fis der nächſt höhern Octave, $\frac{4}{13}$ ein Ton zwiſchen as und a.

Die contraharmoniſche Proportion, ſ. an ihrem Orte. Th. I.

Harmoniſche Theilung einer Linie iſt, wenn ſie in drey Theile ſo getheilt wird, daß die ganze ſich zu dem einen der äußern Theile verhält, wie der andere äußere Theil zu dem mittlern. Auf der Linie AD,

A B C D

ſey AD : AB = CD : BC, ſo iſt ſie harmoniſch getheilt. Es iſt nämlich hier AD : AB = AD — AC : AC — AB; alſo ſind AD, AC, AB in ſtetiger harmoniſcher Proportion.

Dieſe Theilung kommt in der Lehre von den Kegelſchnitten vor. Eine gerade Linie, die aus dem Durchſchnittspuncte zweyer berührenden an den Kegelſchnitt und die gerade zwiſchen den Berührungspuncten gezogen iſt, wird von jenem Durchſchnittspuncte, der Curve und der Linie zwiſchen den Berührungspuncten harmoniſch getheilt. S Kegelſchnitte.

Hauptpunct in der Perſpectiv, oder Augenpunct, ſ. Perſpectiv.

Helcataym, die Regel, ſ. Elcataym.

Helix, Spirale oder Schneckenlinie, davon

Helicoides ſpiralförmig, als Parabola Helicoides. S. Spirale, und ſpiralförmige Parabel.

Hemiſphaera, Halbkugel.

Hemiſphaeroides, halbes Sphäroid.

Hendekagonalzahl, ſ. Polygonalzahl.

Hendecagonum, Eilfeck, ſ. Vieleck.

Heptagonalzahl, ſ. Polygonalzahl.

Heptagonum, Siebeneck.

Herzförmiger Körper entſteht, wenn man eine Ellipſe nicht um eine ihrer Axen, ſondern um einen ihrer andern Durchmeſſer ſich drehen, und einen vollen Umlauf beſchreiben läßt. Dadurch entſteht ein Körper, der an dem einen Ende vertieft, an dem andern verſchmälert iſt. Varignon hat den Inhalt eines ſolchen Körpers berechnen wollen, hat ſich aber dabey geirrt. In der Encyclopédie méthodique, art. Coeur, zeigt d'Alembert, daß der Inhalt dieſes herzförmigen Körpers ſich zu dem Inhalt eines Sphäroids, deſſen Axen den beiden Durchmeſſern jener Ellipſe, um deren einen ſie ſich dreht, und dem zugeordneten gleich ſind, ſich verhält, wie das Quadrat des Sinus des Winkels der Durchmeſſer zu dem Quadrat des Sinus totus.

Heterogen, das entgegengeſetzte von Homogen, oder gleichartig, ſ. dieſes.

Hexaëdron iſt daſſelbe, was Würfel, von ἕξ, ſechs, und ἕδρα, Sitz, Grundfläche.

Hexagonalzahl, ſ. Polygonalzahl.

Hexagonum, Sechseck.

Hexecontas, Abtheilung der Zahlen nach Sechzigen, wie Decas, Decaden, nach Zehnen. Daher Canon Hexecontadon, zur Multiplication ſechzigtheiliger Zahlen, wie Minuten, Secunden, Tertien. S. Sexageſimalrechnung.

Homocentriſch, daſſelbe was concentriſch, von ὅμος, gleich, einerley, und κεντρον, Mittelpunct.

Homogen, gleichartig, ſ. an ſeinem Orte.

Homogenea affectionum ſind bey dem an Kunſtwörtern überreichen Vieta die mit der Wurzel einer Gleichung gleichartigen gegebenen Factoren als Coefficienten der Potenzen der Wurzel. Nämlich die Potenzen der Wurzel, außer der höchſten, machen die Gleichung zu einer aequatio affecta. *Homogeneum comparationis* iſt das gegebene Glied der Gleichung.

Homologum, was ähnliche Beziehung hat, als die Vorder= oder Hinterglieder in Verhältniſſen; die gleichnamigen Seiten in ähnlichen Figuren.

Hufförmiger Abſchnitt (ungula, onglet) eines Cylinders iſt zwiſchen einem Theil der Grundfläche (oder auch der ganzen), einer ſchneidenden Ebene und einem Theil der krummen cylindriſchen Oberfläche enthalten. Auf gleiche Art entſteht durch eine ſchneidende Ebene in einem Kegel oder Konoid ein hufförmiger Abſchnitt.

1. Es iſt ADBbea (Fig. 72.) ein ſenkrechter Cylinder über der Grundfläche ADBE, und ABba ein Durchſchnitt durch die Axe. Dieſe Ebene werde von

einer andern Ebene HFK in FG ſenkrecht geſchnitten, ſo daß ihr Durchſchnitt HK mit der Grundfläche des Cylinders ADBE auf den Durchmeſſer AB ſenkrecht iſt. Man ſucht den Inhalt des Körpers, der zwiſchen dem Segment HAK der Grundfläche, dem Schnitte HFK des Cylinders, und dem Stücke HAFK der cylindriſchen Fläche enthalten iſt.

Man ziehe durch irgend einen Punct M des Bogens AH die gerade MP ſenkrecht auf HK, und MN parallel mit der Axe des Cylinders. Dieſe MN liegt in der Oberfläche des Cylinders, und iſt ſo wie die Axe ſenkrecht auf die Grundfläche, alſo ſenkrecht auf die Linie MP (Ebene 11. 6.). Das Product aus dem Dreyeck PMN in das Differential von GP iſt das Differential des körperlichen Abſchnittes AFGPMN (Cubirung) *). Die Ebene des Dreyecks PMN iſt ſenkrecht auf die Grundfläche ADBE. Da in dieſer letztern die Linie HK ſenkrecht auf MP iſt, ſo iſt HK ſenkrecht auf MPN, und daher auf PN, alſo iſt MPN der Neigungswinkel der ſchneidenden Ebene gegen die Grundfläche.

Es ſey der Halbmeſſer der Grundfläche, $AC = a$, $AG = b$, $GH = c$, der Neigungswinkel MPN oder $AGF = \alpha$. Ferner ſey $GP = x$; $MP = y$, ſo iſt $MN = y \tang \alpha$, und das Differential des Abſchnittes zwiſchen FAG und NMP iſt $= \frac{1}{2} y^2 \tang \alpha \,.\, \partial x$. Dieſer unbeſtimmte Abſchnitt ſey $= Z$, und $\tang \alpha = m$, ſo iſt $\partial Z = \frac{1}{2} m y^2 \partial x$. Man ſetze zur Abkürzung $a - b = f$, oder $GC = f$, ſo iſt $aa = (f + y)^2 + xx$, alſo $y = \sqrt{(aa - xx)} - f$, und $yy = aa + ff - xx - 2f\sqrt{(aa - xx)}$, ſo daß

$$\partial Z = \tfrac{1}{2} m (aa + ff - xx - 2f\sqrt{(aa - xx)})\, \partial x.$$

*) Die in dem citirten Artikel gezeigte Methode iſt daſelbſt nur auf runde Körper angewandt, ſolche, deren Abſchnitte Kreiſe zu Grundflächen haben; ſie iſt aber allgemeiner für alle andere, ſo daß, wenn Y eine Flächenſchnitt des Körpers, x die zugehörige Abſciſſe iſt, $Y \partial x$ das Differential des körperlichen Abſchnittes zu der Abſciſſe x iſt.

Nun iſt $\int \partial x \sqrt{(aa - xx)}$ = Area ACQM
$= \text{ſect. } ACM + \Delta CQM = \frac{1}{2} aa \text{ Arc. ſin } \frac{x}{a}$

$+ \frac{1}{2} x \sqrt{(aa - xx)}$, wo Arc. ſin $\frac{x}{a}$ ein Bogen mit dem Halbmeſſer als Einheit iſt.

So iſt

$$Z = \frac{1}{2} m \left(aax + ffx - \frac{1}{3} x^3 - fx \sqrt{(aa - xx)} - aaf \text{ Arc. ſin } \frac{x}{a} \right),$$

wo die Conſt = 0 iſt.

Den Inhalt des ganzen Hufs zu erhalten, ſetze man $x = c$, und multiplicire mit 2, ſo iſt, wenn derſelbe durch H bezeichnet wird,

$$H = m \left(aac - \frac{1}{3} c^3 - aaf \text{ Arc. ſin } \frac{c}{a} \right),$$

da $aa - cc = ff$ iſt.

2. Wenn die ſchneidende Ebene durch DE gelegt wird, ſo iſt $c = a$, und $f = 0$, alſo nun $H = \frac{2}{3} ma^3$. Setzt man $ma = h$, ſo iſt $H = \frac{2}{3} aah$, wo h die Höhe des Hufes iſt.

3. Die Oberfläche des Hufs von AF an bis MN ſey = S, ſo iſt $\partial S = MN \times \partial . \text{ Arc. } AM$, das iſt

$\partial S = my . \frac{a \partial x}{\sqrt{(aa - xx)}}$ (Differ. Formeln, 29.), oder

$\partial S = ma \partial x - \frac{maf \partial x}{\sqrt{(aa - xx)}}$, alſo

$S = max - mfa . \text{ Arc. ſin } \frac{x}{a}$, ohne Conſtans. Die krumme Oberfläche des ganzen Hufs iſt

$$2mac - 2mfa . \text{ Arc. ſin } \frac{c}{a}.$$

Nimmt man den Halbkreis zur Grundfläche des Hufs, ſo iſt die krumme Oberfläche $= 2maa = 2ah$.

Es iſt merkwürdig, daß es völlig cubirbare Abſchnitte eines Cylinders giebt, mit einer krummen Oberflache, die zugleich quadrirbar iſt.

3. Es ſey ACB (Fig. 73.) der Durchſchnitt eines Kegels, ſenkrecht auf deſſen Grundfläche, deren Durchmeſſer AB iſt. Durch einen Punct D auf AC führe man einen Schnitt parallel mit CB und ſenkrecht auf ACB. Die Durchſchnittslinie mit ACB iſt DE. Dadurch entſteht ein hufförmiger Abſchnitt zwiſchen dieſer Ebene, der Grundfläche und der krummen Kegelfläche. In dieſem lege man durch eine mit CB parallele MP, eine auch auf ACB ſenkrechte Ebene, welche einen unbeſtimmten Abſchnitt begränze. Die Durchſchnittsfiguren über DE, MP ſind Parabeln (ſ. Kegelſchnitte). Die Fläche der Parabel über MP multiplicirt mit dem Differential des Abſtandes AN von A iſt das Differential des körperlichen Abſchnittes von A bis MP.

Es ſey $AB = 2a$, $BC = b$, ſin $ABC = m$, $AP = x$, ſo iſt $PM = \frac{bx}{2a}$; $AN = mx$. In dem über AB als Durchmeſſer beſchriebenen Kreiſe ziehe man durch P eine Ordinate, die z heiße, ſo iſt $z^2 = AP \times PB$, oder $z^2 = x(2a - x)$. Es iſt zugleich z die Ordinate der Parabel, deren Axe MP iſt, in dem Puncte P. Die Fläche der Parabel iſt $\frac{2}{3} \cdot \frac{bx}{2a} \cdot 2z = \frac{2bx}{3a} \sqrt{(2ax - xx)}$, (ſ. Quadratur). Der Abſchnitt des Hufes von A bis MP ſey $= Z$, ſo iſt $\partial Z = \frac{2mbx}{3a} \partial x \sqrt{(2ax - xx)}$. Es iſt

$$\int x \partial x \sqrt{(2ax - xx)} = -\tfrac{1}{3}(2ax - xx)^{\frac{3}{2}} + a \int \partial x \sqrt{(2ax - xx)}, \text{ und}$$

$$\int \partial x \sqrt{(2ax - xx)} = \tfrac{1}{2}aa. \text{Ang. coſ} \frac{a-x}{a}$$

$- \tfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{(2ax - xx)}$ (ſ. Integralformeln).

Alſo

$$\int x \partial x \sqrt{(2ax - xx)} = \tfrac{1}{2}a^3. \text{Ang. coſ} \frac{a-x}{a}$$

$- \tfrac{1}{6}(a+x)(3a-2x)\sqrt{(2ax - xx)}$. Dadurch iſt

$$Z = \frac{mb}{3a}. a^3. \text{Ang. coſ} \frac{a-x}{a}$$

$$- \frac{mb}{9a}(a+x)(3a-2x)\sqrt{(2ax-xx)}.$$

Die Conſt. iſt $= 0$, da $Z = 0$ für $x = 0$ iſt.

Setzt man in dieſer Formel für x den Werth AG, ſo erhält man den Werth des beſtimmten hufförmigen Abſchnittes, deſſen höchſter Punct in D iſt.

4. Der Schnitt DG gehe durch den Mittelpunct der Grundfläche, ſo iſt $x = a$, und der beſtimmte hufförmige Abſchnitt $H = mba^2(\tfrac{1}{6}\pi - \tfrac{2}{9})$; oder wenn die Höhe des Kegels $= h = mb$, geſetzt wird

$$H = \tfrac{1}{3}aah(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{2}{3}).$$

5. Des ganzen Kegels Inhalt iſt $\tfrac{1}{3}\pi aah$, alſo iſt die Ergänzung des Hufes zum Halbkegel cubirbar, wenn die ſchneidende Ebene durch den Mittelpunct der Grundfläche gelegt wird. Dieſe Ergänzung iſt $= \tfrac{2}{9}aah$.

Hyperbel iſt eine krumme Linie, für welche die Gleichung zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten u und y iſt $cu + m^2u^2 = y^2$, wo c eine gegebene Linie, und m der Exponent des Verhältniſſes zweyer gegebenen Linien iſt.

Die Benennung, Hyperbel (Überſchuß), ſoll anzeigen, daß das Quadrat der Ordinate größer iſt als das Rechteck von der Abſciſſe und einer conſtanten Linie. Vergl. Ellipſe.

1. Für jedes poſitive u, ſo groß es genommen werden mag, hat y zwey mögliche, gleiche, entgegengeſetzte Werthe. Eben ſo auch für negative, die der Quantität nach betrachtet größer ſind als $\frac{c}{mm}$. Für negative, die kleiner ſind als $\frac{c}{mm}$, iſt y unmöglich, oder die krumme Linie hat für ſolche Abſciſſen keine Ordinaten. Man ſetze $\frac{c}{mm} = 2a$, ſo iſt die Gleichung dieſe, $m^2(2au + u^2) = y^2$.

2. Man ſetze $u = x - a$, alſo $a + u = x$, ſo iſt $m^2(x^2 - a^2) = y^2$. Hier erhellt, daß die krumme Linie für gleiche und entgegengeſetzte x, die größer als a ſind, gleiche Ordinaten, es ſeyn poſitive oder negative, hat.

3. Man ſetze $m = \frac{b}{a}$, ſo iſt $c = \frac{2bb}{a}$, eine Linie, welche der Parameter zu der Axe 2a heißt, und es iſt $cu + \frac{c}{2a}u^2 = y^2$;

$$\frac{c}{2a}(x^2 - a^2) = y^2,$$

oder $$bb(2au + uu) = a^2y^2;$$
$$bb(x^2 - a^2) = a^2y^2.$$

4. Man nehme auf der Abſciſſenlinie Xx (Fig. 74.) von C aus CA = CB = a, und CP = x; PM = y, der Gleichung zwiſchen x und y gemäß. Die krumme Linie erſtreckt ſich von A aus durch M ins Unendliche fort, auf der andern Seite von CX eben ſo mit dem Zweige Ams, der dem AMS gleich und ähnlich iſt. Über den Theilen der Abſciſſenlinie, CA, CB iſt kein Theil der Curve vorhanden. Aber von B an ſind zwey unendliche Zweige BNs, BnS, die den Zweigen AMS, Ams

gleich und ähnlich ſind. Die beiden Theile der Hyperbel, SAs, SBs heißen **entgegengeſetzte Schnitte**, nämlich aus zwey entgegengeſetzten Kegeln.

Der Punct C heißt der **Mittelpunct** der Hyperbel; A, B, ſind ihre **Scheitel**; AB iſt ihre **Hauptaxe**, deren Verlängerung aber auch unter der Benennung, Hauptaxe, als ſenkrechter Durchmeſſer, begriffen wird. Eine Nebenaxe oder conjugirte Axe, die zugleich eine Ordinate an der Curve wäre, wie in der Ellipſe, giebt es für die Hyperbel nicht. Doch heißt die Linie 2b (in 3.) die **conjugirte** Axe oder Nebenaxe. Man ziehe durch C die ſenkrechte CY auf AB, ſo iſt dieſe ein Durchmeſſer für alle mit der Hauptaxe parallele Chorden an den entgegengeſetzten Zweigen auf derſelben Seite der Hauptaxe.

5. Der Mittelpunct C halbirt alle durch ihn an die Hyperbel gezogenen geraden Linien, wegen der gleichen und ähnlichen Zweige auf beiden Seiten der Axe und des Mittelpuncts.

6. Durch A ziehe man die gerade Dd ſenkrecht auf CA; mache $AD = Ad = b$, und ziehe die geraden CDS, Cds, welche nach den entgegengeſetzten Gegenden CS, Cs unbeſtimmt verlängert werden. Man ziehe die auf die Axe ſenkrechte PQ an die gerade CS, als Ordinate zu dieſer, und ſetze $PQ = z$, ſo iſt $z = \frac{bx}{a}$, und $zz = \frac{bbxx}{aa}$. Da $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$ iſt, ſo iſt $zz - yy = bb$, oder $(z+y)(z-y) = bb$, alſo $z - y = \frac{bb}{z+y}$. Der Unterſchied QM der an die Curve und die gerade CS gezogenen Ordinaten wird alſo immer kleiner, je größer die Abſciſſe nebſt den Ordinaten wird, ohne eine Gränze des Abnehmens.

Die geraden SCS, sCs, heißen die **Aſymptoten** (nicht zu erreichenden) der Hyperbel.

7. Man verlängere die entgegengeſetzte Ordinate Pm bis an die Aſymptote Cs in q, ſo iſt $Mq = z + y$. Da $MQ = z - y$ iſt, ſo iſt $Mq \times MQ = bb$.

8. Durch M werde mit der Aſymptote Cs die parallele ML gezogen, und durch den Scheitel A mit derſelben die parallele AE; es iſt $CL \times LM = CE \times EA$, oder $CL \times LM = \frac{1}{4}(aa + bb)$.

Denn wegen der ähnlichen Dreyecke QLM und QCq iſt $LQ : LM = CQ : Cq$, alſo $LQ = LM$. Ferner iſt $QL : QM = LC : Mq$, und auch $QL : QM = ED : DA$, wegen der Ähnlichkeit der Dreyecke QLM, DEA. Alſo iſt $LC : Mq = ED : DA$. Aus dieſer und der gleich vorhergehenden Proportion entſteht, durch Zuſammenſetzung der Verhältniſſe, dieſe,

$$LC \times QL : MQ \times Mq = ED^2 : DA^2.$$

Da $MQ \times Mq = bb = DA^2$, ſo iſt

$$LC \times QL = DE^2, \text{ oder } CL \times LM = DE^2.$$

Wegen $AD = Ad$ iſt $DE = CE$. Ferner iſt Winkel $EAC = ACd = ACE$, alſo $EA = CE$, und $DE^2 = CE \times EA$, folglich $CL \times LM = CE \times EA$.

Da $DE = \frac{1}{2}CD$, ſo iſt $DE^2 = \frac{1}{4}CD^2 = \frac{1}{4}(aa + bb)$.

9. Das Quadrat von CE oder $\frac{1}{2}CD$ heißt die Potenz der Hyperbel.

10. Aufg. Die Gleichung für die krumme Linie zu finden, auf welcher die Scheitelpuncte aller Dreyecke, wie FMG, FNG, liegen, in welchen die Seite FG gemeinſchaftlich, und der Unterſchied der beiden andern $GM - FM$ oder $FN - GN$ eine gegebene Größe iſt.

Man halbire FG in C, und ſetze FC oder $GC = e$, ferner $GM - FM = 2a$, $GM = t + a$; $FM = t - a$. Von M ziehe man die ſenkrechte MP auf GF, und ſetze $CP = x$, alſo $FP = \pm(x - e)$; $GP = x + e$. Auch ſey $PM = y$. Nun iſt

$$(x-e)^2 + y^2 = (t-a)^2,$$
$$(x+e)^2 + y^2 = (t+a)^2.$$

Daraus wird durch Addition und Subtraction

$$xx + ee + yy = tt + aa,$$
$$ex = at.$$

Durch Herausſchaffung von t wird

$$\frac{ee-aa}{aa}(xx-aa) = yy.$$

Man darf hier nicht das Entgegengeſetzte beider Factoren nehmen, wie es ohne andere Rückſichten die Rechnung erlauben würde. Denn es wird, wenn $y = 0$ genommen wird, FG oder $2e = 2t$. Nun iſt t größer als a, alſo iſt auch e größer als a, und dadurch auch $x > a$.

Der Ort des Punctes M iſt alſo eine Hyperbel, deren Hauptaxe $= 2a$, und deren conjugirte Axe, $2b = 2\sqrt{(ee-aa)}$ iſt, ſo daß $ee = aa + bb$ iſt.

11. Man nehme auf der Axe einer Hyperbel von dem Mittelpuncte C aus $CF = CG = \sqrt{(aa+bb)}$, und ziehe an irgend einen Punct der Curve M die geraden FM, GM, ſo iſt $GM - FM = 2a$.

Denn man ſetze $\sqrt{(aa+bb)} = e$, alſo $ee - bb = aa$. Nun iſt $PM^2 = \frac{bb}{aa}xx - bb$, und $FP = x - e$, daher

$$FM^2 = \frac{ee}{aa}xx - 2ex + aa,$$

$$FM = \frac{ex}{a} - a.$$

Eben ſo iſt

$$GM = \frac{ex}{a} + a,$$

folglich $GM - FM = 2a$.

12. Die beiden Puncte, F, G, heißen die Brennpuncte der Hyperbel (Ellipſe, 10.).

Da $CF^2 = aa + bb$ iſt, ſo iſt die auf der Aſymptote nach (6.) genommene $CD = CF$.

13. Die Ordinate in den Brennpuncten iſt dem halben Parameter gleich.

14. Es ſey $FM = z$, der Winkel $MFX = \varphi$, ſo iſt

I. $ex - aa = az$. II. $ee - aa = (a - e \cos \varphi) z$.
Die erſte Gleichung iſt dieſelbe mit der Gleichung $ex = at$ in (10.), da $z = t - a$ iſt. Hieraus folgt die zweyte, da $x = e + z \cos \varphi$ iſt. Wenn AFM ſpitz iſt, ſo iſt φ ſtumpf und $\cos \varphi$ negativ. Iſt $AFM = o$, ſo iſt $\cos \varphi = -1$, und $ee - aa = (a + e) z$, daher $z = e - a$, wie es ſeyn muß.

Iſt x unendlich groß, ſo muß $a - e \cos \varphi = o$ ſeyn, damit das Product eine endliche Größe bleibe. Alſo iſt bey dieſer Annahme $\cos \varphi = \frac{a}{e}$, daher $\varphi = ACD$. Die FM iſt alsdann parallel mit der Aſymptote. Kleiner als ACD kann der Winkel MFP nicht werden.

15. Auf gleiche Art wird gefunden,
I. $CF \times CP + CA^2 = CA \times GM$.
II. $ee - aa = (CG. \cos CGM - CB) GM$.

16. Es ſey MAm (Fig. 75.) die eine Hälfte einer Hyperbel, deren Hauptaxe AB, Mittelpunct C iſt; der Scheitelpunct dieſes Theils iſt A. Die verlängerte Axe iſt BAX Auf dieſe iſt durch irgend einen Punct M die ſenkrechte Mm gezogen. Durch den Mittelpunct ſey die gerade CDV gezogen, als Abſciſſenlinie, mit welcher die Ordinaten PM, PN unter dem Winkel MPV verbunden werden, Es ſey $AC = a$; die halbe conjugirte Axe $= b$; $CP = x$; $PM = y$, der Winkel $ACD = \varphi$; der Winkel $MLQ = \omega$, wo L der Durchſchnitt der MN mit der Axe iſt. Wenn $\tang \varphi . \tang \omega = \frac{bb}{aa}$ iſt, ſo wird MN und jede ihr parallele, auch in

der andern Hälfte der Hyperbel von CV, oder deren Verlängerung halbirt.

Denn man ziehe PR mit CQ, und PS mit MQ parallel, ſo erhellt, daß

$$CQ = x\cos\varphi + y\cos\omega,$$
$$MQ = x\sin\varphi + y\sin\omega,$$

iſt. Nun iſt (3.)

$$a^2b^2 = b^2(x^2\cos\varphi^2 + 2xy\cos\varphi.\cos\omega + y^2\cos\omega^2)$$
$$- a^2(x^2\sin\varphi^2 + 2xy\sin\varphi.\sin\omega + y^2\sin\omega^2).$$

Nimmt man $b^2 = a^2 \tan\varphi . \tan\omega$, ſo iſt $b^2\cos\varphi.\cos\omega = a^2\sin\varphi.\sin\omega$, und die Gleichung enthält bloß die zweyte Potenz von x und von y, daher bey jeder Annahme für die eine derſelben die andere zwey gleiche entgegengeſetzte Werthe erhält, und unmögliche, wenn das Quadrat einen negativen Werth hat.

17. Bey der jetzt gemachten Annahme für die Winkel φ und ω iſt

$$a^2b^2 = (b^2\cos\varphi^2 - a^2\sin\varphi^2)x^2$$
$$- (a^2\sin\omega^2 - b^2\cos\omega^2)y^2.$$

18. Wenn die Puncte M, N in entgegengeſetzten Schnitten liegen, ſo gilt das gefundene auch. Es ſey (Fig 76.) die Abſciſſenlinie CV innerhalb des Nebenwinkels SCs der Aſymptoten gezogen, ſo daß ſie die Hyperbel gar nicht ſchneide. Die entgegengeſetzten Ordinaten PM, PN liegen in entgegengeſetzten Schnitten. Bey denſelben Bezeichnungen wie vorher iſt eben ſo

$$CQ = x\cos\varphi + y\cos\omega,$$
$$MQ = x\sin\varphi + y\sin\omega.$$

Die übrige Rechnung iſt dieſelbe wie in (16.), und es muß, damit alle mit MN parallele Chorden von CV halbirt werden, ſeyn

$$\frac{bb}{aa} = \tan\varphi . \tan\omega.$$

19. Man ziehe durch den Mittelpunct C (Fig. 76.) mit MN die parallele ECE, ſo iſt dieſe, bey der ge-

machten Annahme der Winkel φ und ω, ein Durchmeſſer, der verlängert alle mit VCV parallele Chorden halbirt. Die Winkel φ und ω haben nun ihre Bedeutungen mit einander vertauſcht. Iſt nämlich φ der Winkel des Durchmeſſers mit der Axe, ſo iſt ω der Winkel der Ordinaten mit derſelben. Iſt ω aber jener Winkel, ſo iſt φ der letztere.

20. Zwey gerade Linien, welche durch den Mittelpunct unter den Winkeln φ, ω, der Bedingung in (16.) gemäß gezogen ſind, heißen conjugirte Durchmeſſer. Der eine halbirt alle Chorden, die dem andern parallel ſind. Der eine ſchneidet die Hyperbel in zwey entgegengeſetzten, von dem Mittelpuncte gleich entfernten Puncten, der andere ſchneidet ſie gar nicht. Die Abſciſſen ſollen auf demjenigen Durchmeſſer genommen werden, welcher die Hyperbel ſchneidet. In der Gleichung (17.) ſind daher die Coefficienten $b^2 \cos\varphi^2 - a^2 \sin\varphi^2$, und $a^2 \sin\omega^2 - b^2 \cos\omega^2$ beide poſitiv. Dadurch erhält x zwey mögliche gleiche, entgegengeſetzte Werthe für $y = 0$, aber y unmögliche, wenn $x = 0$ iſt, oder einen Werth unter einer gewiſſen Gränze hat.

21. Der beſtimmte Werth eines Durchmeſſers, der die Hyperbel ſchneidet, zwiſchen den Durchſchnittspuncten, heiße insbeſondere der Durchmeſſer, und werde durch 2f bezeichnet. Für $x = 0$, oder in dem Mittelpuncte, ſey $y^2 = -g^2$, ſo iſt 2g der conjugirte Durchmeſſer auf gleiche Art, wie 2b die conjugirte Axe. Aus der Gleichung in (17.) folgt, wie in dem Artikel, Ellipſe (17.), die Gleichung,

$$f^2 g^2 = g^2 x^2 - f^2 y^2,$$

oder $g^2(x^2 - f^2) = f^2 y^2$.

22. Man ſetze $x = f + u$, ſo folgt aus jener Gleichung dieſe:

$$g^2(2fu + uu) = f^2 y^2;$$

oder $\frac{2gg}{f} u + \frac{gg}{ff} uu = y^2$.

Beide Gleichungen haben dieſelbe Form wie die in (3.), welche ſich auf die Hauptdurchmeſſer beziehen. Auch heißt $\frac{2gg}{f}$ der **Parameter** zu dem Durchmeſſer 2f.

23. Man vertauſche die Bedeutungen von a und b, ſo daß b der Haupthalbmeſſer auf der Axe oder der Abſciſſenlinie, a aber der conjugirte Halbmeſſer ſey. Der Winkel der Aſymptoten iſt nun der Nebenwinkel von dem Winkel derſelben bey der erſtern Bedeutung von a und b. Es ſey (Fig. 76.) CF der halbe Haupthalbmeſſer auf der Axe der Abſciſſen xCx; FD der conjugirte Halbmeſſer, und CF = AD, FD = CA, jenes dem conjugirten, dieſes dem Haupthalbmeſſer für die Hyperbel MAmNBn. Die Hyperbel SFsSFS heißt die **conjugirte** von jener.

Die Gleichung für die conjugirte Hyperbel iſt, wenn die Abſciſſen von dem Mittelpuncte aus auf der Hauptaxe genommen werden,

$$aa(xx - bb) = bbyy.$$

Nennt man einen Halbmeſſer, der an die conjugirte Hyperbel gezogen iſt, g, den conjugirten f, indem man auf gleiche Art wie für die Haupthalbmeſſer, die Bedeutungen von f und g vertauſcht, ſo wird aus der Gleichung in (21.) dieſe,

$$ff(xx - gg) = ggyy.$$

Die conjugirten Halbmeſſer an der einen Hyperbel, welche als Ordinaten unmöglich ſind, ſind an der andern als Halbmeſſer möglich.

24. Es iſt

$$f^2 = \frac{\sin\omega}{\cos\varphi \, . \, \sin(\omega - \varphi)} a^2 = \frac{\cos\omega}{\sin\varphi \, . \, \sin(\omega - \varphi)} b^2.$$

$$g^2 = \frac{\sin\varphi}{\cos\omega \, . \, \sin(\omega - \varphi)} a^2 = \frac{\cos\varphi}{\sin\omega \, . \, \sin(\omega - \varphi)} b^2.$$

Denn aus der Gleichung in (17.) iſt

$$a^2 b^2 = (b^2 \cos\varphi^2 - a^2 \sin\varphi^2) f^2, \quad \text{und}$$

$a^2 b^2 = (a^2 \sin\omega^2 - b^2 \cos\omega^2) g^2$.

Hieraus werden auf eine ganz ähnliche Art wie in dem Artikel, Ellipſe (19.) die angegebenen Werthe von f^2 und g^2 erhalten.

25. Es iſt I. $\frac{ff}{gg} = \frac{\sin\omega \, . \cos\omega}{\sin\varphi \, . \cos\varphi} = \frac{\sin 2\omega}{\sin 2\varphi}$.

II. $\frac{f}{g} = \frac{\sin\omega}{\cos\varphi} \cdot \frac{a}{b}$. III. $\frac{f}{g} = \frac{\cos\omega}{\sin\varphi} \cdot \frac{b}{a}$.

26. Der kleinſte Werth von φ iſt $= 0$, der größte iſt Ang. tang $\frac{b}{a}$, oder der Winkel der Aſymptoten mit der Axe. Für jenen Winkel iſt $f = a$, für dieſen iſt f unendlich groß, da der Halbmeſſer f in die Aſymptote fällt. Der größte Werth von ω iſt ein Rechter, wobey $g = b$ iſt; der kleinſte iſt Ang. tang $\frac{b}{a}$, bey welchem der conjugirte Halbmeſſer (der an der conjugirten Hyperbel als wirklicher Durchmeſſer genommene) auch in die Aſymptote fällt. Denn aus der Formel, $bb = aa \tang\varphi \, . \tang\omega$, folgt $\tang\omega = \frac{b}{a}$, wenn $\tang\varphi = \frac{b}{a}$ iſt. Das Verhältniß $f : g$ hat alſo die Werthe von $a : b$ an bis zu $1 : 1$. Vergl. Apollonii Conicorum L. VII. prop. 21. 22.

27. Es iſt $fg \, . \sin(\omega - \varphi) = ab$. Der Winkel $\omega - \varphi$ iſt der Ordinatenwinkel, ſo daß das Parallelogramm von zwey conjugirten Durchmeſſern unter dieſem Winkel dem Rechtecke von den beiden Axen oder Hauptdurchmeſſern gleich iſt. Apollonii Conic. VII. 31.

28. Es iſt $\pm(ff - gg) = \pm(aa - bb)$.

Bew. Denn $ff - gg =$

$\frac{\sin\omega \, . \cos\omega - \sin\varphi \, . \cos\varphi}{\cos\varphi \, . \cos\omega \, . \sin(\omega - \varphi)} aa$. Der Zähler dieſes

Bruches iſt $\frac{1}{2}\sin 2\omega - \frac{1}{2}\sin 2\varphi =$ $\sin(\omega\ \ \varphi)\ \cos(\omega+\varphi)$. Alſo iſt $ff - gg =$

$$\frac{\cos(\omega+\varphi)}{\cos\varphi\,.\,\cos\omega}aa = \left(1 - \frac{\sin\varphi\,.\,\sin\omega}{\cos\varphi\,.\,\cos\omega}\right)aa = aa - bb.$$

Iſt $b > a$, ſo iſt auch $g > f$. Apollonii Conic. VII. 13.

29. Es iſt $f + g > a + b$, und $\pm(f - g) < \pm(a - b)$.

Bew. Da $ff - gg = aa - bb$, und $f > a$ iſt, ſo iſt auch $g > b$, alſo $f + g > a + b$. Zweytens, da $ff - gg = (f + g)(f - g)$, und $aa - bb = (a + b)(a - b)$ iſt, und daher beide Producte gleich ſind, ſo iſt, weil der Factor $f + g$ größer als der Factor $a + b$ iſt, dagegen der Factor $f - g$ kleiner als $a - b$. Apollon. Con. VII. 25. 27.

30. Wenn $a = b$ iſt, ſo iſt $\tang\varphi\,.\,\tang\omega = 1$, alſo $\omega = 90^\circ - \varphi$, und $2\omega = 180^\circ - 2\varphi$, daher $\sin 2\omega = 2\varphi$, folglich $f = g$ (25. I.), oder alle conjugirten Durchmeſſer ſind gleich, wenn die beiden Hauptdurchmeſſer gleich ſind. Daſſelbe folgt aus den beiden andern Formeln in 25.

31. Die Hyperbel heißt in dieſem Falle eine gleichſeitige. Der Parameter zu beiden Durchmeſſern iſt ihnen gleich. Da ein Durchmeſſer in der alten Geometrie latus transverſum (oder vielmehr obliquum) und der Parameter latus rectum, in Beziehung auf das Rechteck von beiden hieß (vergl. Ellipſe, 7.), ſo heißt bey der Gleichheit beider Linien die Hyperbel eine gleichſeitige.

Die gleichſeitige Hyperbel iſt unter den Linien ihrer Art daſſelbe, was der Kreis unter den Ellipſen iſt.

32. An der gleichſeitigen Hyperbel iſt der Winkel der Aſymptoten mit der Axe ein halber Rechter, alſo der Winkel der Aſymptoten ſelbſt ein Rechter.

33. Es iſt an derſelben $ff = \frac{aa}{\cos 2\varphi}$, wo der größte Werth von 2φ ein Rechter iſt.

Die Gleichung für dieſelbe, wenn die Abſciſſen von dem Mittelpuncte aus genommen werden, iſt $xx - yy = ff$.

Werden die Abſciſſen von dem einen Scheitel des Durchmeſſers an genommen, ſo iſt $2fu + uu = yy$.

34. Es ſeyn CS, Cs (Fig. 77.) die Aſymptoten der Hyperbel SAs, die Axe CX, der Haupthalbmeſſer $AC = a$, der conjugirte Halbmeſſer $AD = b$. Man ziehe einen Durchmeſſer CV, der die Hyperbel in E ſchneide, unter dem Winkel $ACE = \varphi$. Der Winkel, unter welchem die zu demſelben gehörigen Ordinaten die Axe ſchneiden, ſey $ACU = \omega$, der nach (16.) beſtimmt werde. Mit CU ziehe man irgend eine NPn parallel, welche die Aſymptoten in N, n, und CV in P ſchneide: es iſt $CP : PN = f : g$, und auch $CP : Pn = f : g$, wo $f = CE$ iſt, und g den conjugirten Halbmeſſer bedeutet. Dadurch iſt $PN = Pn$.

Bew. Der Winkel ACS ſey $= \alpha$, ſo iſt Winkel $CNP = \omega - \alpha$; $PCN = \alpha - \varphi$. Es iſt $\sin CNP = \sin \omega . \cos \alpha - \cos \omega . \sin \alpha$; $\sin PCN = \sin \alpha . \cos \varphi - \cos \alpha . \sin \varphi$. Da ferner $\sin \alpha = \frac{AD}{CD} = \frac{b}{\sqrt{(aa + bb)}} = \frac{b}{e}$, $\cos \alpha = \frac{a}{e}$ iſt, ſo iſt

$\sin CNP : \sin PCN$
$= a \sin \omega - b \cos \omega : b \cos \varphi - a \sin \varphi$. Aus (25. II. III.) iſt $a \sin \omega : b \cos \varphi = f : g$, und $b \cos \omega : a \sin \varphi = f : g$. Daraus wird
$a \sin \omega - b \cos \omega : b \cos \varphi - a \sin \varphi = a \sin \omega : b \cos \varphi = f : g$. Alſo iſt $\sin CNP : \sin PCN = f : g$; das iſt, $CP : PN = f : g$.

Zweytens: in dem Dreyeck PCn iſt Winkel $CnP = 180° - (\omega + \alpha)$; $PCn = \alpha + \varphi$, und $\sin CnP = \sin \omega . \cos \alpha + \cos \omega . \sin \alpha$; $\sin PCn = \sin \alpha . \cos \varphi + \cos \alpha . \sin \varphi$. Daraus folgt auf ähnliche Art, wie vorher, daß $\sin CnP : \sin PCn = f : g$ iſt, das iſt $CP : Pn = f : g$.

35. Die Linie Nn ſchneide die Hyperbel in M, m, ſo wird, wegen der angenommenen Beſtimmung des Winkels ω, die Chorde Mm in P halbirt. Dadurch iſt MN = mn.

36. Die mit CU durch E parallele iſt eine berührende in E.

Denn wenn ſie die Hyperbel noch in einem Puncte ſchnitte, ſo würde CV nicht die gerade Linie ſeyn, die alle mit CU parallelen Chorden der Hyperbel nach (35.) halbirt.

37. Der Winkel ETX der berührenden ET mit der Axe ſey = ω, und ECT = φ, ſo iſt bb = aa tang φ . tang ω, da zufolge dieſer Annahme die Lage der berührenden in E gefunden iſt.

38. Die berührende in E ſchneide die Aſymptoten in L, l, ſo iſt EL = El, und jedes, EL oder El gleich dem conjugirten Halbmeſſer von CE. Denn es iſt CE : EL = f : g, und CE : El = f : g, eben ſo wie CP : PN = f : g, und CP : Pn = f : g iſt.

Apollonius hat den Satz im III. B. 3. S. indirecte, durch Unmöglichkeit des Gegenſatzes, erwieſen, mit der Abänderung, daß das Quadrat von EL gleich iſt dem vierten Theil der Figur zu dem Durchmeſſer in dem Berührungspuncte. Dieſe Figur iſt das Rechteck von dem Durchmeſſer und dem zugehörigen Parameter.

39. Es ſey TMt (Fig. 78.) eine berührende an der Hyperbel AMS in M, und MP ſenkrecht auf die Axe der Hyperbel, deren Mittelpunct in C iſt. Es iſt CP : CA = CA : CT.

Bew. Es ſey der Winkel ATM = ω; ACM = φ, ſo iſt CMT = ω — φ, und CT = $\frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega}$ f; CP = f. coſ φ; alſo CP × CT = $\frac{\cos\varphi\,.\,\sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega}$ ff. Da TM eine berührende iſt, ſo haben die Winkel φ und ω die in (16.) beſtimmte Re-

lation (37.). Daraus wird nun zufolge des in (24.) gefundenen Werthes von ff erhalten $CP \times CT = aa = CA^2$, und hieraus die in dem Satze angegebenen Proportion.

40. Hieraus folgt $CP : PA = CA : AT$, daraus ferner $CP : PA = BP : PT$, wenn B der andere Endpunct der Axe iſt. Noch iſt $CA : AT = BP : PT$.

41. Die Aſymptote CS iſt die berührende in einem unendlich entfernten Puncte. Denn wenn CP unendlich groß gedacht wird, ſo iſt $CT = 0$.

42. Da eine berührende zwey an einander ſtoßenden Bogen der Curve gemein iſt, ſo verbindet die Aſymptote, als berührende betrachtet, auch zwey Bogen der Hyperbel. Dieſe ſind (Fig. 74.) die Bogen AS, BS in ihren unendlich entfernten Puncten, wo ſie von derſelben geraden Linie, der Aſymptote SCS, berührt werden. Dieſe unendlich von einander entfernten Puncte laſſen ſich, wegen der gemeinſchaftlichen berührenden, als ein einziger Punct betrachten, ſo daß es hier im wörtlichſten Sinne heißt, das äußerſte berührt ſich. Eben ſo ſtoßen die beiden Zweige As, Bs mit ihren unendlich entfernten Puncten an einander. Solchergeſtalt läßt ſich die Hyperbel als eine zuſammenhängende und geſchloſſene Linie betrachten. Ein ſie beſchreibender Punct gehe von A nach S ins Unendliche, ſo gelangt er da auf der gemeinſchaftlichen berührenden Aſymptote von dem Zweige AS zu dem SB, ſetzt von B ſeinen Weg ins Unendliche auf Bs fort, und kommt von da auf sA nach A, von wo er ausgegangen war. Eine den Zweig AS ſchneidende, um C ſich drehende, gerade Linie ſchneidet nach dem Durchgange durch die Aſymptote SCS in ſtetiger Fortrückung den Zweig SBs, und nach dem Durchgange durch die Aſymptote sCs wieder den Zweig sA. Eine ſolche Rückkehr durchs Unendliche findet ſich auch bey dem Durchſchnittspuncte zweyer geraden Linien, deren eine ſich um einen feſten Punct dreht. Der Durchſchnittspunct entfernt ſich von einem auf der unbewegten Linie angenommenen Puncte

immer mehr, je mehr die ſich drehende Linie ſich der parallelen Lage mit der andern nähert. In dieſer Lage kann man den unendlich entfernten Durchſchnittspunct ſo gut nach der einen als der andern entgegengeſetzten Gegend hin ſetzen. Bey fortgehender Drehung nach derſelben Richtung kommt der Durchſchnittspunct von der entgegengeſetzten Gegend her zurück, und beſchreibt ſo die ganze unendliche gerade Linie, ohne ſeine Richtung zu ändern.

Unſere neueſte phantaſievolle Philoſophie kann ihre Bilder hieraus mit einem neuen Indifferenzpunct bereichern, auch mit einer Identität neuer Art, da eine unendliche Linie zwiſchen zwey zuſammen fallenden Puncten enthalten iſt.

43. Es ſey MQ (Fig. 78.) ſenkrecht auf die berührende TMN, und ſchneide die Axe in Q, es iſt PQ $= \frac{bb}{aa} . CP$, und $CQ = \frac{ee}{aa} . CP$.

Bew. Es iſt $PQ = MP . \tang PMQ = MP . \tang PTM = f . \sin\varphi . \tang\omega =$

$f . \tang\varphi . \tang\omega . \cos\varphi = \frac{bb}{aa} . CP.$

Ferner $CQ = CP + PQ = \left(1 + \frac{bb}{aa}\right) CP$

$= \frac{ee}{aa} . CP.$

44. Es iſt $MQ = \frac{f \sin\varphi}{\cos\omega} = \frac{bb}{f \sin(\omega - \varphi)}$ aus (24.).

45. Man ziehe QR (Fig. 78.) ſenkrecht auf die verlängerte CM, es iſt $CM \times MR = bb$.

Denn $MR = MQ . \cos QMR = MQ . \sin TMC$ $= MQ . \sin(\omega - \varphi) = \frac{bb}{f}$ aus (44.).

46. Aus den Brennpuncten F, G (Fig. 78.) ziehe man an einen Punct M der Hyperbel die geraden FM,

GM; es halbirt die in M berührende TMt den Winkel FMG.

Bew. Es ſey MP ſenkrecht auf die Axe CP und $CP = x$, ſo iſt $CT = \frac{aa}{x}$ (39.), und $FT = e - \frac{aa}{x}$; $GT = e + \frac{aa}{x}$, alſo $FT : GT = ex - aa : ex + aa$. Ferner iſt $FM = \frac{ex}{a} - a$; $GM = \frac{ex}{a} + a$ (11.), und $FM : GM = ex - aa : ex + aa$. Folglich iſt $FT : GT = FM : GM$. Daher halbirt TM den Winkel FMG, zufolge des umgekehrten Satzes, Dreyeck, nr. 9.

47. Wenn die Hyperbel als eine phyſiſche, die Lichtſtrahlen zurückwerfende, Linie betrachtet wird, ſo werden die von dem einen Brennpuncte auffallenden Strahlen ſo zurückgeworfen, daß ihre rückwärts genommenen Verlängerungen nach dem andern Brennpuncte gehen. Denn es iſt der Zurückſtrahlungswinkel tMg gleich dem Einfallswinkel FMT, alſo auch gleich dem TMG., ſo daß die verlängerte gM durch G geht. Der Brennpunct G iſt nur ein virtueller.

48. Es iſt $\sin FMQ = \frac{e \cos \omega}{a}$, wo ω der Winkel der berührenden mit der Axe iſt, und MQ die Normale auf die berührende oder die Curve.

Bew. In dem Dreyeck FMQ iſt $FM : FQ = \sin FQM : \sin FMQ$. Ferner iſt $FM = \frac{ex}{a} - a$, und $FQ = CQ - CF = \frac{ee}{aa}x - e$ (43.), alſo iſt $FM : FQ = a : e$. Auch ſind in dem rechtwinklichten Dreyeck TMQ die beiden Winkel bey Q und T jeder des

andern Ergänzung zum Rechten. Daher $\sin FQM = \cos QTM = \cos\omega$, und $a : e = \cos\omega : \sin FMQ$.

49. Es iſt $FM \times GM = gg$ = dem Quadrat des zu CM conjugirten Halbmeſſers.

Bew. Da $FM = \frac{ex}{a} - a$, und $GM = \frac{ex}{a} + a$ iſt, ſo iſt $FM \times GM = \frac{e^2x^2}{a^2} - a^2$. Ferner $ee = aa + bb = (1 + \tang\varphi . \tang\omega) aa = \frac{\cos\varphi . \cos\omega + \sin\varphi . \sin\omega}{\cos\varphi . \cos\omega} aa = \frac{\cos(\omega - \varphi)}{\cos\varphi . \cos\omega} aa$.

Dann iſt $x = f\cos\varphi$, und $\frac{ff}{aa} = \frac{\sin\omega}{\cos\varphi . \sin(\omega - \varphi)}$, alſo iſt $\frac{e^2x^2}{a^2} = \frac{\sin\omega . \cos(\omega - \varphi)}{\cos\omega . \sin(\omega - \varphi)} aa$. Folglich $FM \times GM = \left(\frac{\sin\omega . \cos(\omega - \varphi)}{\cos\omega . \sin(\omega - \varphi)} - 1\right) aa = \frac{\sin\varphi}{\cos\omega . \sin(\omega - \varphi)} aa = gg$, aus (24.).

50. Noch mehrere Eigenſchaften der Hyperbel, die wie die bisher angeführten, mit Eigenſchaften der Ellipſe Analogie haben, (ſ. Ellipſe), wird man nach Anleitung des hier gebrauchten Verfahrens finden können, auch andere, die hier nicht berührt ſind. Es kann aber leicht ſeyn, daß bey Verhältniſſen der an die Hyperbel oder Ellipſe gezogenen geraden Linien die Geometrie einen kürzern Weg giebt.

51. In van Schooten Exercit. mathematicis L. IV. ſind verſchiedene Inſtrumente angegeben, eine Hyperbel durch ſtetige Bewegung eines Stiftes zu beſchreiben.

Es ſey C (Fig. 79.) der Mittelpunct der zu zeichnenden Hyperbel, CX ihre Hauptaxe, CA der Haupthalbmeſſer, AD der conjugirte, alſo CD die Richtung

der einen Aſymptote. Dieſe werde nach CS verlängert. Wird CD in E halbirt, und AE gezogen, ſo iſt AE parallel mit der andern Aſymptote. Man ſetze drey Liniale FG, FN, GMA zuſammen, ſo daß GFN dem Winkel der Aſymptoten, das iſt, AED gleich ſey, FGA aber von willkührlicher Größe, indem FG und AG ſich um einen Stift in G drehen laſſen. Das Linial FG ſey ſo lang als die Linie CE. Wird das Linial FG auf AS hingeſchoben, indem das Linial AG immer durch A geht, ſo beſchreibt ein Stift an dem Durchſchnitt der Ränder der Liniale AG, FN die Hyperbel längs der Aſymptote AS.

Es iſt hier FG : FM = EG : EA. Da FG = CE, alſo EG = CF iſt, ſo iſt CE : FM = CF : EA, daher M ein Punct in der Hyperbel, nach (8.).

Anſtatt der Haupthalbmeſſer kann man auch zwey andere conjugirte nehmen, mit dem Ordinatenwinkel DAX, wo CAX nun ein Durchmeſſer durch A iſt, zufolge (38.).

52. Man nehme (Fig. 80.) zwey Liniale DN, GP, befeſtige darauf in F, G Stifte, welche die Brennpuncte einer Hyperbel vorſtellen. Von F und G nehme man FD und EG jedes ſo groß als die Hauptaxe, und befeſtige mittelſt Stifte in D und E ein Linial DE, worauf DE der Abſtand der Brennpuncte ſey, ſo daß ſich jene Liniale mit dieſem um D und E drehen können. Die Liniale DN und EP haben Einſchnitte der Länge nach, jenes von F, dieſes von E an, um in ihrer Durchkreuzung M einen Stift fortzuführen, der die Hyperbel beſchreibt. Auf dem Papiere oder der Tafel ſteckt man die Puncte F, G für die Brennpuncte ab, in der Entfernung DE, läßt die beiden Liniale DN, GP ſich um die Stifte in F, G durch jene Puncte drehen, und führt den Stift M herum, ſo beſchreibt dieſer einen hyperboliſchen Bogen. Die Linie MT von M bis an die Durchkreuzung des Linials DE mit der Linie FG iſt die berührende in M. Die Mitte C von FG iſt der Mittelpunct der Hyperbel; A und B ſind ihre Scheitelpuncte, wenn CA und CB jedes der Hälfte von FD oder EG genommen worden.

Hyperbel höherer Art iſt diejenige, deren Gleichung iſt, $ay^{m+n} = bx^m(c+x)^n$. Sie entſteht auf eine ähnliche Art durch den Schnitt eines Konoids, deſſen Grundfläche ein Kreis höherer Art iſt, wie die vorher betrachtete aus dem Kegel. Ein Kreis höherer Art hat die Gleichung, $y^{m+n} = (c-x)^n x^m$. Die Hyperbel der erſten Art heißt zum Unterſchiede die Apolloniſche. S. Wolfii Elementa Matheſeos. T. I. Analyſis. §. 525—530. Die Formen ſind nach Beſchaffenheit der Exponenten m, n, ob dieſe gerade oder ungerade ſind, ſehr verſchieden.

Einige nennen dieſe höhern Hyperbeln auch Hyperboloiden, welches aber auch hyperboliſche Konoiden bedeutet.

Eine andere Gattung von Hyperbeln höherer Art iſt diejenige, welche unter der Gleichung, $x^m y^n = a^m b^n$, begriffen iſt, wenn $m+n$ größer als 2 iſt. Die Axen der Coordinaten ſind die Aſymptoten der Curve. Newtons Katarakta (Princip. Phil. nat. math. L. II prop. 36.) iſt nach einer ſolchen Hyperbel gebildet. Die Gleichung für dieſe iſt, $xy^4 = ab^4$. Sie iſt eine Hyperbel der vierten Ordnung.

Newton nennt in ſeiner Enumeratione linearum tertii ordinis, die Curven dieſer Gattung mit geradlinichten Aſymptoten oder mit einer einzigen auch Hyperbeln, weil ihre Zweige, die an einer Aſymptote hinlaufen, ſich immer mehr und mehr den Zweigen einer apolloniſchen Hyperbel nähern. Diejenigen, die drey Aſymptoten haben, von welchen keine ſich parallel ſind, nennt er Hyperbolas redundantes, diejenigen, die nur eine haben, Hyperbolas defectivas. Auch giebt er den Formen der Curven, nach Verſchiedenheit der Lage des hyperboliſchen Zweiges gegen die Aſymptoten, beſondere Namen, als circumſcripta, ambigena, conchoidalis, cet.

Hyperboliſch, was einer Beziehung auf die Hyperbel hat, als hyperboliſches Cylindroid (ſ. Cylindroid);

hyperboliſcher Kegel (ſ. Konoid); hyperboliſche Logarithmen (ſ. Logarithmen).

Hyperboloides, eine Hyperbel höherer Art, oder auch ein hyperboliſches Konoid.

Hypergeometriſche Reihe iſt diejenige, deren Glieder Producte aus den Gliedern einer arithmetiſchen Reihe nach ihrer Folge ſind, ſo daß das nte Glied jener Reihe das Product von den n erſten Gliedern dieſer iſt, z. B. die Reihe 1, 2, 6, 24, 120, 720, etc. in welcher das nte Glied iſt $= 1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots n$.

Wallis hat dieſe Benennung gebraucht in der Arithm. Infin. Prop. 190. Nämlich in der geometriſchen Reihe iſt das nte Glied das Product aus dem erſten Gliede in eine Anzahl von $n - 1$ gleichen Factoren, oder in die $(n - 1)$te Potenz des Exponenten. In der hypergeometriſchen Reihe ſind die zu dem Anfangsgliede geſetzten Factoren ungleich, und zwar in arithmetiſcher Fortſchreitung.

Ein Glied dieſer Reihe iſt daſſelbe, was Kramp eine arithmetiſche Facultät genannt hat, wovon ein eigner Artikel dieſes Wörterbuchs umſtändliche Nachricht giebt.

Euler hat ſchon in ſeiner Differentialrechnung von Größen dieſer Form gehandelt. In den Novis Comment. Acad. Petrop. T. XIII. iſt von ihm eine Abhandlung über die Curve enthalten, an welcher die Glieder einer hypergeometriſchen Reihe mit ihren eingeſchalteten die Ordinaten ſind, deren Natur er unterſucht. Für ganze negative Werthe der Abſciſſe ſind die Ordinaten unendlich groß, zwiſchen dieſen abwechſelnd poſitiv und negativ. Euler findet, daß das Product $1 . 2 . 3 \ldots x$ ſich durch die Reihe,

$$x^x - x(x-1)^x + \frac{x . x-1 .}{1 . 2}(x-2)^x$$

$$- \frac{x . x-1 . x-2 .}{1 . 2 . 3}(x-3)^x + \text{etc.}$$

ausdrucken laſſe, und nimmt daher Gelegenheit eine allgemeinere Reihe dieſer Form, worin ſtatt des Exponenten x eine Zahl n, und ſtatt x in den Coefficienten eine Zahl m geſetzt wird.

In den Novis Actis Ac. Petrop. T. VII. et VIII. ſind noch zwey Abhandlungen von Euler über die hypergeometriſchen Reihen enthalten. Die erſte betrifft das allgemeine Glied derſelben; die zweyte enthält verſchiedene Betrachtungen über dieſe Reihen.

In der erſten dieſer Abhandlungen findet Euler folgenden Ausdruck für das nte Glied dieſer Reihen. Es werde daſſelbe als eine Function der veränderlichen Größe n betrachtet, und durch $\Delta : n$ bezeichnet, wo Δ das Functionszeichen iſt. Die arithmetiſche Reihe ſey $a, a+b; a+2b; .. a+(n-1)b;$ etc. und α ſey eine willkührliche endliche Größe, ſo iſt

$$\Delta : n = \alpha^n \cdot \frac{a}{a+nb} \left(\frac{\alpha+b}{\alpha}\right)^n \cdot \frac{a+b}{a+(n+1)b} \times \left(\frac{\alpha+2b}{\alpha+b}\right)^n \cdot \frac{a+2b}{a+(n+2)b} \left(\frac{\alpha+3b}{\alpha+2b}\right)^n \times \frac{a+3b}{a+(n+3)b} \left(\frac{\alpha+4b}{\alpha+3b}\right). \text{ etc.}$$

Das Verfahren, wodurch Euler dieſen Ausdruck findet, iſt mit einiger Abkürzung und Abänderung folgendes.

Da $\Delta : n = a(a+b)(a+2b)\ldots(a+(n-1)b)$, und eben ſo

$\Delta : (n+i) = a(a+b)\ldots.(a+(n+i-1)b)$ iſt, ſo iſt

$\Delta : (n+i) = (\Delta : n)(a+nb)\ldots(a+(n+i-1)b)$.

Es iſt aber auch, wenn man die Theile n und i der Stellenzahl $n+i$ vertauſcht,

$\Delta : (i+n) = (\Delta : i)(a+ib)\ldots(a+(i+n-1)b)$.

Man gebe der Zahl i einen unendlich großen Werth, ſo

ſind die in dem letztern Ausdruck zu $\Delta : i$ geſetzten Factoren alle als gleich zu achten, und es iſt

$$\Delta : (i + n) = (\Delta : i)(a + ib)^n.$$

In der unendlich großen Größe darf man für a jede endliche α ſetzen, und ſo iſt

$$\Delta : (i + n) = (\Delta : i)(\alpha + ib)^n.$$

Aus der Vergleichung beider Ausdrücke für $\Delta : (n + i)$ folgt

$$\Delta : n = \frac{a}{a + nb} \cdot \frac{a + b}{a + (n + 1)b} \cdot \frac{a + 2b}{a + (n + 2)b} \times$$

$$\ldots\ldots \times \frac{a + (i - 1)b}{a + (n + i - 1)b} (\alpha + ib)^n.$$

Dieſes iſt der wahre Werth von $\Delta : n$, wofern nur i einen unendlich großen Werth erhält, es mag n eine ganze oder gebrochne, oder ſelbſt eine irrationale Zahl bedeuten.

Giebt man i einen endlichen Werth, ſo iſt der Fehler bey dem gefundenen Ausdruck von $\Delta : n$ deſto kleiner, je größer i genommen wird. Man ſetze für i folgeweiſe die Zahlen 1, 2, 3, etc. und bezeichne die dadurch entſpringenden Werthe von $\Delta : n$ durch I. II. III. etc. ſo iſt

I. $\frac{a}{a + nb} (\alpha + b)^n.$

II. $\frac{a}{a + nb} \cdot \frac{a + b}{a + (n + 1)b} (\alpha + 2b)^n.$

III. $\frac{a}{a + nb} \cdot \frac{a + b}{a + (n + 1)b} \cdot \frac{a + 2b}{a + (n + 2)b} (\alpha + 3b)^n.$

IV. $\frac{a}{a + nb} \cdots \frac{a + 3b}{a + (n + 3b)} (\alpha + 4b)^n.$

etc.

Hieraus wird erhalten

$$\frac{\text{II}}{\text{I.}} = \frac{a+b}{a+(n+1)b}\left(\frac{\alpha+2b}{\alpha\;+b}\right)^n;$$

$$\frac{\text{III.}}{\text{II.}} = \frac{a+2b}{a+(n+2)b}\left(\frac{\alpha+3b}{\alpha+2b}\right)^n;$$

$$\frac{\text{IV.}}{\text{III.}} = \frac{a+3b}{a+(n+3)b}\left(\frac{\alpha+4b}{\alpha+3b}\right)^n;$$

etc.

Multiplicirt man dieſe Quotienten und alle folgenden in einander, ſetzt darauf den Factor I noch hinzu, und giebt dem erſten Factor die Form der übrigen, ſo wird der vorher angegebene Werth von $\Delta : n$ erhalten.

Die einzelnen Factoren ſowohl als die partiellen Factoren derſelben nähern ſich immer mehr der Einheit. Die Größe α iſt willkührlich, und kann ſo genommen werden, daß die Rechnung dadurch bequemer wird. Man bemerkt leicht, daß in dem zuerſt gefundenen Werthe von $\Delta : n$ eine Reihe von Factoren als Multiplicatoren und als Diviſoren eingeſchoben iſt, wodurch das Product der abnehmenden Bruchfactoren, $\frac{a}{a+nb}$; $\frac{a+b}{a+(n+1)b}$, etc. wieder vergrößert wird.

Da der Werth von $\Delta : n$ nur für unendlich große i als richtig angeſehen werden kann, ſo bleibt die Annäherung zu dem wahren Werthe noch immer unſicher, und die Einſchaltung der Potential-Factoren iſt auch etwas willkührliches, zugleich mit dem Werthe von α. Nimmt man anſtatt der gleichen Factoren $a+ib$, die nur für ein unendliches i Statt finden, die genau richtigen $a+ib$, $a+(i+1)b$, u. ſ. f. ſo erhält man für $\Delta : n$ eben die Formel, die in dem Artikel, Facultät, 44. gefunden iſt.

Das Verfahren, welches ich daſelbſt (52. 53.) gebraucht habe, den Werth eines eingeſchalteten Gliedes in einer Reihe von Facultäten, oder einer hypergeometriſchen zu finden, ſcheint das ſicherſte und directeſte zu ſeyn. Die

Multiplication zweyer Werthe der geſuchten Größe, deren einer zu groß, der andere zu klein iſt, muß ſich dem Quadrate dieſer Größe nähern, wenn die Factoren dieſes Products ſich immer mehr der Einheit nähern, wie es daſelbſt geſchieht.

Hypotenuſe, iſt in einem rechtwinklichten Dreyeck die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt (Subtenſa angulo recto, von ὑπο und τεινω.). S. Pythagoriſcher Lehrſatz.

Hypotheſis, Vorausſetzung, iſt in der reinen Mathematik, was man auch das Gegebene für einen zu erweiſenden Satz oder eine aufzulöſende Aufgabe nennet. Bey einem Lehrſatze wird etwas über die Beſchaffenheit und Verbindung gewiſſer Größen vorausgeſetzt oder beſtimmt, um daraus neue Folgen zu ziehen. Das iſt die Hypotheſis des Satzes. Z. B. zwey Dreyecke haben eine gemeinſchaftliche Grundlinie und gleiche Höhe, ſo folgt aus dieſer Hypotheſis, daß ſie gleichen Inhalt haben, Daher iſt die gewöhnlichſte Form der mathematiſchen Lehrſätze die bedingte. Bey einer Aufgabe liegt auch immer eine gewiſſe Bedingung über die Beſchaffenheit der gegebenen und geſuchten Größen zum Grunde, woraus das geſuchte hergeleitet werden ſoll. Z. B. Zwiſchen zwey gegebenen Größen zwey mittlere geometriſch proportionale zu finden, wo die Hypotheſis die Proportionalität der vier Größen iſt. Oder: aus der Summe dreyer Größen, der Summe der Producte je zweyer und dem Producte aller drey dieſe Größen zu finden, wo die Combinationen die Hypotheſis ausmachen.

In der angewandten Mathematik ſind Hypotheſen gewiſſe Annahmen über die phyſiſche Beſchaffenheit der Größen, welche den Gegenſtand einer mathematiſchen Unterſuchung ausmachen. Z. B. daß ein Körper vollkommen dichte und gleichförmig ſey, daß ein flüſſiger Körper vollkommen flüſſig ſey Dahin gehören alle Fälle, worin etwas bey Seite geſetzt wird, das zu einer völlig ſcharfen

Beſtimmung und Auflöſung noch in Betracht zu ziehen iſt. Man kann Geſetze wirkender Kräfte annehmen, die nur nichts den allgemeinen Grundſätzen wiederſprechendes enthalten müſſen, und daraus Folgerungen ziehen, ohne dadurch zu behaupten, daß dieſe Geſetze wirklich in der Natur vorhanden ſeyn. Vergleicht man die Folgerungen mit den Beobachtungen, und ſtimmen dieſe mit jenen gehörig zuſammen, ſo iſt dieſes wenigſtens eine ſehr wahrſcheinliche Begründung des angenommenen Geſetzes. In der Optik iſt es erlaubt, das Licht als einen Ausfluß aus dem leuchtenden Körper zu betrachten, und die Lichtſtrahlen für mathematiſche Linien zu nehmen. Die Übereinſtimmung der Folgerungen aus den Geſetzen der Reflexion und Refraction mit der Erfahrung beweiſet inzwiſchen jene Annahme nicht als wirklich.

In der Aſtronomie insbeſondere heißen die verſchiedenen Syſteme von dem Laufe der Himmelskörper, Hypotheſen, als Hypotheſis Ptolemaica, Tychonica, Copernicana.

J.

Ichnographie iſt Grundriß in der Baukunſt. Von *ἴχνος*, Fußſole Fußſtapfe, und *γραφω*, zeichne. Es iſt eine Anwendung der orthographiſchen Projection.

Icoſaedrum, ein regulärer Körper von 20 gleichſeitigen Dreyecken eingeſchloſſen, ſ. Körper, reguläre.

Identiſch, was in der Größe und Form übereinſtimmt. Zwey Größen können einander gleich, und doch in der Form oder Zuſammenſetzung verſchieden ſeyn. So ſind $40 + 8$; $60 - 12$; 3×16; $\frac{96}{2}$, ſich gleich, aber in der Form verſchieden; ſo auch $(a + b)(a - b)$ und $aa - bb$. Zwey Dreyecke können einerley Inhalt haben, bey verſchiedenen Winkeln und Seiten. Von Figuren, die gleich und ähnlich ſind (in der Größe und

Form übereinkommen, ſagt man, daß ſie congruiren, oder ſich decken.

Ein **identiſcher Satz** hat allgemein die Form, $A = A$. Mit einem ſolchen Satze für ſich kann man nichts anfangen, allein man gebraucht ihn in Beweiſen zur Verwandlung eines Satzes, der ein Glied des Beweiſes iſt. Hat man nämlich gefunden, daß $P = Q$ iſt, wo P und Q zwey Größen bedeuten, die ſich gleich aber nicht identiſch ſind, ſo iſt auch $P \pm A = Q \pm A$, wo dann A eine Größe iſt, die mit denen, woraus P und Q zuſammengeſetzt iſt, in Verbindung ſteht. Man kann auch A als Multiplicator oder Diviſor von den beiden, P und Q, gebrauchen.

Wenn zwey nach den Potenzen einer veränderlichen Größe x geordnete **Reihen ſich gleich** ſind, ſie mögen nun beide ohne Ende fortgehen, oder beide mögen, jede mit welcher Anzahl Glieder es ſey, abbrechen, oder auch eine von ihnen nur mag aus einer beſtimmten Anzahl Glieder beſtehen, ſo ſind ſie **identiſch gleich**, das iſt, die zu denſelben Potenzen von x in beiden Reihen gehörigen Coefficienten ſind einander gleich.

Es ſey nämlich

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \text{etc.} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{etc.}$$

ſo iſt $a = A$; $b = B$; $c = C$; $d = D$, u. ſ. f. Denn da für x jeder Werth geſetzt werden mag, ſo ſetze man $x = 0$, und es bleibt aus beiden Reihen $a = A$. Dadurch iſt $bx + cx^2 + \text{etc.} = Bx + Cx^2 + \text{etc.}$ Wegen des gemeinſchaftlichen Factors x iſt

$$b + cx + dx^2 + \text{etc.} = B + Cx + Dx^2 + \text{etc.}$$

Dadurch iſt wie vorher $b = B$, und $cx + dx^2 + \text{etc.} = Cx + Dx^2 + \text{etc.}$ alſo $c = C$. Solchergeſtalt ſind jede zu derſelben Potenz von x gehörige Coefficienten einander gleich.

Wenn die gleichnamigen Coefficienten ſchlechtweg identiſch wären, ſo würde daraus nichts weiter zu folgern ſeyn. Allein die Coefficienten in beiden Reihen, oder in einer derſelben ſind immer aus gewiſſen Größen zuſammen-

geſetzt. In dieſer Rückſicht ſind die gleichnamigen Coefficienten nicht identiſch; ſie geben eben ſo viele Gleichungen für die Größen, woraus ſie zuſammengeſetzt ſind.

Es ſey z. B. $\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}}$ $= \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \text{etc.}$ ſo entſteht durch die Multiplication mit dem Nenner, $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.}$ aus der Reihe, $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \text{etc.}$ eine zuſammengeſetzte, $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$ deren Coefficienten aus $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, etc. und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. zuſammengeſetzt ſind. Da nun $A = a$; $B = b$; $C = c$; $D = d$, u. ſ. f. iſt, ſo erhält man dadurch Gleichungen zwiſchen den Coefficienten in dem Zähler und dem Nenner des Bruches, und in dem Quotienten, wodurch die letztern aus jenen beſtimmt werden. S. Buchſtabenrechnung, V.

Zum Beyſpiel diene ferner das Verfahren in Cyklometrie (5.), den Sinus eines Winkels φ durch den Winkel auszudrucken. Es wird angenommen $\sin\varphi = A\varphi - B\varphi^3 + C\varphi^5 - D\varphi^7 + \text{etc.}$ und es wird dann gefunden $\sin\varphi = \varphi - \frac{1}{6}A\varphi^3 + \frac{1}{20}B\varphi^5 - \frac{1}{42}C\varphi^7 + \text{etc.}$ Daraus iſt $A = 1$; $B = \frac{1}{6}A$; $C = \frac{1}{20}B$; $D = \frac{1}{42}C$, u. ſ. f.

Es ſey
$0 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{etc.}$
ſo daß dieſe Reihe eine aus mehreren zuſammengeſetzte ſey. Es iſt hier $A = 0$; $B = 0$; $C = 0$; $D = 0$; $E = 0$, u. ſ. f. Das heißt nicht, $0 = 0$, welches gar nichts enthalten würde, ſondern jeder Coefficient giebt für die Größen, woraus er zuſammengeſetzt iſt, eine Gleichung. Denn, wenn $x = 0$ genommen wird, ſo iſt $A = 0$, und $0 = Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$ Setzt man für x irgend einen Werth, der nicht $= 0$ iſt, ſo iſt der Factor $B + Cx^2 + Dx^2 + \text{etc.} = 0$. Daher iſt $B = 0$, damit für $x = 0$ die Gleichung erfüllt werde. Dadurch iſt nun $0 = Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$ und $C + Dx + Ex^2 + \text{etc.} = 0$, woraus folgt, daß

C = o ſeyn muß. Solchergeſtalt ſind alle Coefficienten = o.

Dieſes wird insbeſondere bey der Methode des unbeſtimmten gebraucht. Für die veränderliche Größe, deren Werth durch eine andere veränderliche ausgedruckt werden ſoll, wird eine Reihe angenommen, die nach dieſer letztern geordnet iſt, und in die für beide gegebene geſetzt. So erhält man eine Reihe, die aus mehreren Reihen, auch einzelnen Gliedern zuſammengeſetzt iſt, in welcher jeder Coefficient = o iſt. S. Function (41. ff.).

Inclinatio iſt, als gewöhnliche Überſetzung des von Apollonius gebrauchten Worts νευσις, ſo viel als Richtung einer geraden Linie. Pappus ſagt in der Nachricht von dieſes Geometers zwey Büchern über die Richtungen, daß eine Linie (γραμμη) nach einem Puncte gerichtet ſey (νευειν ἐπι σημειον), wenn ſie verlängert (ἐπεκβαλλομενη) den Punct trifft. Die allgemeine Aufgabe ſey dieſe: Wenn zwey Linien der Lage nach gegeben ſind, zwiſchen ihnen eine gerade, der Größe nach gegebene, Linie ſo zu legen, daß ſie nach einem gegebenen Puncte gerichtet ſey (νευουσαν). Unter den beſondern Aufgaben ſind einige ebene, einige körperliche, einige lineariſche (γραμμικα). Die letztern ſind ſolche, welche weder durch den Kreis, noch vermittelſt Kegelſchnitte aufgelöſet werden können, ſondern höhere Curven erfordern (Th. I. S. 227.). Von den ebenen Aufgaben führt Pappus folgende an. Gegeben ein Halbkreis und eine auf deſſen Grundlinie ſenkrechte gerade; oder gegeben zwey Halbkreiſe, deren Grundlinien auf derſelben geraden Linie liegen: zwiſchen ihnen eine gegebene gerade Linie ſo zu legen, daß ſie nach dem Winkel des Halbkreiſes gerichtet ſey. Ferner: Gegeben ein Rhombus, deſſen eine Seite verlängert worden, in deſſelben äußern Winkel eine gegebene gerade Linie ſo zu legen, daß ſie nach dem entgegengeſetzten Winkel gerichtet ſey. Auch dieſes: in einem der Lage nach gegebenen Kreiſe eine gegebene gerade Linie ſo zu legen, daß ſie durch einen gegebenen Punct gehe.

Dieſe Aufgaben, außer die zweyte, waren in dem erſten Buche des Apollonius abgehandelt. In dem zweyten Buche kam nur eine einzige Aufgabe vor, die von zwey Halbkreiſen. Apollonius ſcheint ſich auf den Fall eingeſchränkt zu haben, da die gerade Linie durch den einen Endpunct des Durchmeſſers eines der beiden Kreiſe geht. Pappus rechnet in ſeinem Verzeichniſſe der Schriften zur geometriſchen Analyſis die Schrift von den Richtungen noch zu der Analyſis ebener Örter. In ſeinen Hülfsſätzen (Lemmatibus) zu dieſer Schrift kommen nur ſolche Fälle von zwey Halbkreiſen vor, da die gerade Linie durch einen Endpunct des Durchmeſſers geht. Dieſe Lemmata ſind in dem 7. Buche ſeiner mathematiſchen Sammlungen von Prop. LXV bis XCV. enthalten.

Die Aufgabe von dem Rhombus iſt in Th. I. S. 118 aufgelöſet.

Die Aufgabe in dem zweyten Buche des Apollonius wird durch die Algebra leicht aufgelöſet. Es ſeyn (Fig. 81.) über AB und CD auf derſelben geraden AD zwey Halbkreiſe AEB, CGD beſchrieben. Durch den Endpunct D des Durchmeſſers CD ſoll an den Halbkreis AEB die gerade DE ſo gezogen werden, daß das zwiſchen beiden Halbkreiſen auf derſelben abgeſchnittene Stück FG eine gegebene Größe habe.

Man ziehe aus dem Mittelpuncte H des Halbkreiſes AEB die ſenkrechte HK auf DE, welche EF in K halbirt. Dadurch iſt DK das arithmetiſche Mittel zwiſchen DE und DF, alſo ihrer halben Summe gleich. Ferner iſt, nach einer Eigenſchaft des Kreiſes, $AD \times BD = DE \times DF$. Noch ziehe man CG, ſo iſt der Winkel CGD ein Rechter, und $DC : DH = DG : DK$, oder $DC \times DK = DG \times DH$. Aus dieſen Verknüpfungen der Größen kann man leicht eine Gleichung für DE oder DF oder DG herleiten. Man ſetze $AB = a$; $CD = b$; $BC = c$; $FG = d$; $DF = x$, und zur Abkürzung $a + b + c = f$; $b + c = g$, ſo

iſt $DE = \frac{fg}{x}$; $DK = \frac{1}{2}\left(\frac{fg}{x} + x\right)$,
$DG = x - d$, und

$$b(fg + xx) = (2f - a)(xx - dx),$$

oder

$$(f + c)xx - (f + g)dx = bfg.$$

Dieſelbe Gleichung wird erhalten, wenn $DE = x$, und $EG = d$ geſetzt werden.

In beiden Fällen, es mag FG oder EG die gegebene d ſeyn, iſt der Werth derſelben zwiſchen gewiſſen Gränzen eingeſchränkt. Auch iſt die negative Wurzel der Gleichung für die geometriſche Auflöſung nicht anwendbar. Dieſe ſchränkt ſich auf den Fall ein, da das Verhältniß, $x^2 + fg : xx - dx$, oder $2DK : DG$, ein gegebenes, nämlich $2DH : DC$ iſt, da die arithmetiſche Auflöſung auch den Fall begreift, daß $xx + fg : xx + dx$ daſſelbe Verhältniß ſey.

Incommenſurabel iſt ein Verhältnißbegriff, wodurch angezeigt wird, daß zwey Größen kein gemeinſchaftliches Maaß haben, ſo klein dieſes auch genommen werden mag. Dergleichen Größen ſind die Seite eines Quadrats und deſſen Diagonale; alle Potenzen in ganzen Zahlen und ihre Wurzeln, wenn die letztern ſich nicht unter den ganzen Zahlen finden; und viele andere Gattungen von Größen.

Incommenſurabel in der Potenz ſind nach Euklides (X. def. 4.) Größen, deren Quadrate kein gemeinſchaftliches Maaß haben, im Gegenſatze gegen Commenſurabel in der Potenz, ſ. Commenſurabel.

Incomplexe Größe iſt eine ſolche, die aus keinen beſonders angezeigten Theilen durch Addition und Subtraction zuſammengeſetzt, und durch ein ſolches Symbol, als a, x, bezeichnet wird. Auch nennt man benannte ganze Zahlen z. B. 16 Pfund, 30 Rthlr. eine uncomplexe Größe, hingegen die mit Bruchtheilen

vergeſellſchafteten complexe, als 16 Pfund 12 Loth 2 Qu.

Increment, die endliche Veränderung einer veränderlichen Größe, ſie mag additiv oder ſubtractiv ſeyn. In England iſt dieſe Benennung gewöhnlich; auf dem Continent nennt man die Veränderungen Differenzen, ſ. Differenzenrechnung.

Indeterminatum, das unbeſtimmte, heißt erſtlich eine veränderliche Größe in einer Reihe von Größen, deren Form entweder beſtimmt iſt, oder ſelbſt dieſe unbeſtimmt gelaſſen wird, nur daß ſie für alle Größen der Reihe dieſelbe iſt.

Zweytens, eine Aufgabe heißt unbeſtimmt, wenn ſie unendlich viele Auflöſungen zuläßt; auch wenn ſie durch eine gewiſſe Bedingung eingeſchränkt wird, insbeſondere auf rationale, ganze oder gebrochene Werthe der unbeſtimmten Größe. Eine Aufgabe kann beſtimmt ſeyn, und doch mehrere Auflöſungen zulaſſen, da es die Natur der Gleichungen mit ſich bringt, daß ſie, nach ihrem Grade, mehrere Wurzeln haben. S. unbeſtimmte Analytik.

Drittens die Methode des undeterminirten iſt diejenige, da man bloß die Form der geſuchten Gleichung beſtimmt, die Werthe der unveränderlichen Coefficienten aber unbeſtimmt läßt, und ſie nur vorläufig durch Buchſtaben bezeichnet. Aus andern Gleichungen zwiſchen den Größen, deren Verbindung unterſucht wird, leitet man mit Hülfe jener Gleichung eben dieſelbe her, worin aber die Coefficienten aus den undeterminirten in der angenommenen Gleichung und gegebenen Größen zuſammengeſetzt werden. Beide ſind identiſch dieſelben, und dadurch erhält man für die undeterminirten Coefficienten Gleichungen zu ihrer Beſtimmung, wie in dem Artikel, Identiſch, gezeigt worden iſt. Am häufigſten wird dieſe Methode gebraucht, um den Werth einer veränderlichen Größe aus einer nicht geſonderten Gleichung herauszuziehen, oder Reihen umzukehren.

Descartes wird als der Erfinder dieſer Methode angeſehen. In dem zweyten Buche ſeiner Geometrie zeigt er, wie Normalen an eine Curve zu ziehen ſind. Hier muß in einer Gleichung zwiſchen zwey veränderlichen Größen y und v die letztere durch die gegebenen Größen und durch y ſo beſtimmt werden, daß y zwey gleiche Werthe erhalte. Nun nimmt Descartes zwey Factoren an, I. $yy - 2ey + ee$; II. $y^4 + fy^3 + g^2y^2 + h^3y + k^4$, wo f, g, h, k die zu beſtimmenden Größen ſind. Das Product ſetzt er der gegebenen Gleichung gleich, ſo giebt die Vergleichung der gleichnamigen Coefficienten die Werthe jener vier Größen, und den Werth von v durch gegebene Größen und durch e, das iſt durch y.

Index iſt bey Logarithmen daſſelbe, was die Kennziffer oder Charakteriſtik derſelben heißt, ſ. Logarithmen.

Auch wird bisweilen dieſes Wort für Exponent einer Potenz gebraucht.

In der combinatoriſchen Analyſis enthält der Index oder der Zeiger die zu combinirenden Elemente mit ihren Stellenzahlen.

Indiviſibilia, ſ. Cavaleri's Methode des Untheilbaren.

Inexplicabilis functio, ſ. Facultät und Function.

Infiniteſimal-Rechnung, ſ. Unendlich.

Inhalt einer Fläche oder eines Körpers iſt ein Verhältnißbegriff, wodurch die Größe der Fläche oder des Körpers in Vergleichung mit einer gegebenen Fläche oder einem gegebenen Körper ausgedruckt wird. Dieſe dienen bey praktiſchen Rechnungen als Einheit; in allgemeinen Vergleichungen werden ſie unbeſtimmt gelaſſen. Man vergleicht z. B. ein Rechteck mit einem andern mittelſt ihrer Seiten, einen Kreis mit dem Quadrat des Halbmeſſers, einen paraboliſchen Abſchnitt mit einem Dreyeck über derſelben Grundlinie mit derſelben Höhe, eine Kugel

mit dem Würfel ihres Durchmeſſers oder mit einer andern Kugel. Dieſes geſchieht entweder nach Art der Alten bloß durch Zuſammenſetzung der Verhältniſſe, oder durch Rechnungsformeln, worin das Product zweyer Linien das Rechteck von denſelben, das Product dreyer ein ſenkrechtes Parallelepipedum mit dieſen drey Linien als Seiten bedeutet. Bey der praktiſchen Anwendung wird eine oſtenſible Einheit für die Längen angenommen, die man Fuß, Ruthe, Toiſe u. dergl. nennt. Daraus ergeben ſich die Einheiten für die Flächen und Körper, nämlich Quadratfuß, oder Quadratruthe, u. dergl. Cubikfuß, Cubikruthe, u. dergl. Oft iſt es bequem, zur Einheit eine Größe zu nehmen, die mit ihr gleichnamig iſt; z. B. eine Kreisfläche durch eine andere ſolche als Einheit auszudrucken; einen Cylinder oder cylinderartigen Körper durch einen Cylinder zu meſſen, deſſen Höhe und Durchmeſſer ſich gleich ſind, wie bey dem Viſiren der Fäſſer; eine Kugel mit einer andern Kugel von gegebener Größe zu vergleichen, wie in der Artillerie geſchieht, wo die zur Einheit genommene Kugel ein beſtimmtes Gewicht hat.

Inſtrumentale Arithmetik iſt die Ausführung numeriſcher Rechnungen durch techniſche Hülfsmittel.

Die Alten, welche die Zahlen nicht dem Syſtem ihrer Vertheilung in Claſſen gemäß bezeichneten, waren mehr als wir eines mechaniſchen Hülfsmittels bedürftig, welches daſſelbe leiſtete, was uns unſere Ziffern leiſten. Die Römer waren beſonders in dieſem Falle, da ihre Bezeichnungsart für die Zahlen die allerunbequemſte iſt. Sie gebrauchten einen Abacus, eine Rechentafel, worauf ſie die verſchiedenen Einheiten durch Merkzeichen von einander unterſcheiden konnten. Marcus Welſer, ein Augsburger Patrizier, hat einen ſolchen Abacus gehabt, den er in einem Briefe an Lipſius beſchreibt. (Marci Velſeri Opera, Norib. 1682. pag. 819.) Er war von Metall, und hatte acht längere und acht kürzere Einſchnitte, je einen von jenen mit einem von dieſen in gerader Linie. In

den Einſchnitten waren bewegliche Stifte mit Knöpfen, in einem der långern fünf Stück, in den úbrigen vier, in den kürzern eines. Die längern Einſchnitte waren bezeichnet mit ⊖.I.X.C.∞ CCIↃↃ.CCCIↃↃↃ.I×I. Der Gebrauch dieſer Rechentafel; iſt leicht einzuſehen. Die Stifte oder Knöpfchen in den längern Einſchnitten bedeuteten einzelne Einheiten ihrer Claſſe, die einzelnen Knöpfe galten 5 ſolcher Einheiten. Der mit ⊖ bezeichnete Einſchnitt enthielt die aſſes, die übrigen die uncias oder ſeſtertios, Einer, Zehner, Hunderte u. ſ. w. In dem erſtern Einſchnitte konnte man bis 11 bemerken, und wenn noch mehrere dazu kamen, ſtatt 12 daſelbſt 1 in dem Einſchnitt I. angeben. In den folgenden 7 Einſchnitten konnte man bis 9 Einheiten in jeder Claſſe von den Einern bis zu Millionen bezeichnen, wenn man die Knöpfe von dem untern Ende eines Einſchnittes bis zu dem obern verſchob, um ſie dadurch zu bedeutenden Zahlzeichen zu machen. So zeigten 2 verſchobene Knöpfe in einem längern Einſchnitte, und der einzelne in dem zugehörigen kürzern fortgerückte die Zahl 7 in der zugehörigen Claſſe an. Neben dem längern Einſchnitte für die aſſes finden ſich noch drey kleine, mit zwey oder einem Knöpfchen, und gewiſſen Beyzeichen. Vermuthlich dienten ſie zu einer Bruchrechnung.

Die Chineſer bedienen ſich eines ähnlichen Inſtruments zum Rechnen, nur daß ſie knöcherne oder elfenbeinerne Kügelchen auf Drathſaiten gezogen gebrauchen. Ihre Rechentafel hat eine Scheidung jenſeits der Mitte. Die zwey Kügelchen, die in der kleinern befindlich ſind, gelten jedes 5, die in der größern jedes Eins in ſeiner Claſſe. Sie rechnen, wie du Halde bezeugt, mit den Kügelchen ſo geſchwind, daß ein Europäer mit der Zifferrechnung es ihnen nicht gleich thun würde.

Im ſechszehnten Jahrhundert rechnete man in Deutſchland häufig auf gleiche Art mit Rechenpfennigen, welche man auf parallele Linien und in die Zwiſchenräume legte. Die erſtern bedeuteten die Einheiten in der Claſſe

der Einer, der Zehner u. ſ. f. nach der Reihe, die in den Zwiſchenräumen bedeuteten je fünf dieſer Einheiten. Die Rechenbücher damahliger Zeit führen gewöhnlich den Titel, Rechenbuch auf der Linie und Feder, oder auf Linien und mit Ziffern. Zu Geldrechnungen bekamen die kleinen Münzſorten als Groſchen und Pfennige, neben der Hauptſorte, ihre beſondere Abtheilung. Adam Rieſe, im 16ten Jahrh., der noch in ganz neuen Zeiten als ein braver Rechenmeiſter bekannt geblieben iſt, ſagt in ſeiner Rechnung auf der Linie und Feder, Frankfurt 1544, zweyte Ausg., er habe in Unterweiſung der Jugend befunden, daß alle, die auf den Linien anheben, das Rechnen fertiger erlernen, als wenn ſie mit den Ziffern, die Feder genannt, anfangen. Auf den Linien ſchöpften ſie einen beſſern Grund, und möchten alsdann mit geringer Mühe auf den Ziffern ihre Rechnung vollbringen.

Leupold erzählt in ſeinem Schauplatze der Rechen- und Meßkunſt (Leipzig 1727), daß er in ſeiner Jugend noch einige Verwalter und Beamte auf den Linien habe rechnen ſehen. Zu Dechales Zeiten (Mundus mathematicus, 1674.) war die Rechnung auf Linien bey den Kaufleuten in Frankreich ſehr in Gebrauch.

Neper, der durch die Erfindung und Anwendung der Logarithmen ſich ſo verdient gemacht hat, hat auch ein nützliches Erleichterungsmittel für gemeine Rechnungen durch ſeine Rechenſtäbe geliefert. Sie enthalten, wie bekannt genug iſt, die Vielfachen der einzelnen Ziffern bis zum Neunfachen, ſo daß die Einer unter der Diagonale jedes Faches zur Rechten, die Zehner aber über derſelben zur Linken ſtehen. Man kann alſo von jeder Zahl ſich ganz leicht eine Tabelle ihrer Vielfachen bis zum Neunfachen (einen Rechenknecht) zuſammenſetzen, welchen man bey der Multiplication und noch mehr bey der Diviſion oft gut benutzen kann, beſonders wenn ein Multiplicandus oder ein Diviſor mehrmals angewandt werden. Z. B. das 6fache der Zahl 4 7 3 8 9 7 erſcheint auf den neben einander gelegten, mit den Ziffern dieſer Zahl bezeichneten, Stäben folgendergeſtalt:

2 4 1 4 5 4
4 2 8 8 4 2

woraus man leicht das 6fache dekadiſch geordnet abſchreibt, nämlich 2 8 4 3 5 8 2.

Neper hat ſein Rechnungs-Hülfsmittel für werth gehalten, es in einer beſondern Schrift zu beſchreiben: Rhabdologiae ſeu numerationis per virgulas libri duo: Cum appendice de expeditiſſimo multiplicationis promtuario. Quibus acceſſit et Arithmeticae localis liber unus. Authore et inventore Io. Nepero, Barone Merchiſtonii, etc. Scoto. Edinburgi 1617. 154 S. gr. 12. Es ſind davon zwey Nachdrücke gemacht, eine italiäniſche Überſetzung zu Verona 1623, und zwey deutſche, 1619 und 1623. Ob die letztern vollſtändig ſind, kann ich nicht ſagen. Das auf dem Titel angezeigte Promtuarium iſt eine kunſtreiche, aber umſtändliche Stäbchenrechnung. Auf langen ſchmalen Platten ſind die Vielfachen der erſten neun Zahlen auf eine eigene Art in Quadraten mit 18 dreyſeitigen Fächern, wiederholt vertheilt. Bey dem Gebrauch werden die ausgeſuchten Platten neben einander, und darauf andere quer über gelegt, worauf bloß leere Fächer gezeichnet ſind, von welchen einige ausgeſchnitten worden. Nun erſcheinen die Vielfachen des Multiplicandus durch die offenen Fächer eben ſo wie bey dem Gebrauche der gewöhnlichen Rechenſtäbe. Die Arithmetica localis iſt eine dyadiſche Rechnung mit Marken. Bey der Addition und Subtraction genügt ein bloßes Lineal; bey der Multiplication werden die Vielfachen nach dyadiſcher Ordnung auf die Felder eines wie ein Schachbrett eingetheilten Vielecks gelegt, und darauf ſummirt. In der erſten Reihe unten bedeuten ſie die Zahlen 1, 2, 4, 8, 16, etc., in der zweyten das doppelte, in der dritten das vierfache, in der vierten das achtfache, u. ſ. f. Hier findet man den älteſten Gebrauch der Dyadik. Das kunſtreiche Büchlein verdiente dieſe Anzeige, da Käſtners Nachricht in der Geſchichte der Mathematik, III, S 95 zu unvollſtändig iſt.

Die von Neper angewieſene Art, die Vielfachen einer Zahl zu finden iſt ſchon in einem deutſchen Rechenbuche aus dem 16ten Jahrhundert gelehrt. Es hat den Titel: Ein Newe vnd wol gegrundte vnderweyſung aller Kaufmans Rechnung in dreien buchern mit ſchönen Regeln und Fragſtucken begriffen. — Durch Petrum Apianum von Leysnick, der Aſtronomie zu Ingolſtadt Ordinarium, verfertiget. Aufs new durchaus überſehen — vnd gebeſſert. Anno M.D.XLIII. Auf dem Bogen P ſind zwey Multiplications-Exempel völlig nach dem Verfahren mit den Neperiſchen Stäben vorgeſtellt Die Vielfachen der Ziffern in dem Multiplicandus ſtehen in Quadraten unter jeder Ziffer, durch eine Diagonale geſondert. Nur nimmt Apian keine beweglichen Stäbe, und ſetzt bloß die Vielfachen durch die Ziffern des Multiplicators unter einander. Auch ſagt er: Nicht von nutz oder von kürtz wegen, hab ich dieſe zwo nachfolgende figuren der Multiplication geſetzt, ſondern allein von wegen der fürwitzigen Schüler, das ſie do mit jre köpff ſpitzen. — Man iſt in Deutſchland Nepern mit ſeiner Stäberechnung beynahe ſo zuvorgekommen, wie der Schweitzer Juſt Byrg mit ſeinen Logarithmen, die freylich noch nicht die bequeme Anwendbarkeit hatten, welche Neper ſchon den ſeinigen gab.

Caſpar Schott hat die Rechenſtäbchen in cylindriſche verwandelt, und auf jedem Cylinder die Vielfachen der Zahlen 1 bis 9 und der 0 verzeichnet. Die Cylinder liegen in einem Käſtchen neben einander, und ſind auf Zäpfchen durch ein äußeres Knöpfchen beweglich, ſo daß alle Vielfachen der Ziffern in dem Multiplicandus zum Vorſchein gebracht werden können.

Leupold hat die Vielfachen der Ziffern nach Art der Neperiſchen Stäbchen auf die ſchmale Seite vieleckiger oder runder Scheiben getragen, welche auf eine Achſe geſteckt und in ein Käſtchen eingeſchloſſen werden. Jede iſt für ſich beweglich, und kann durch einen Stift unbeweglich gemacht werden. Er hat dieſe Einrichtung in ſeinem Theatro arithm. beſchrieben. Daſelbſt iſt §. 35.

noch eine, wie es ſcheint künſtliche, mechaniſche Verbindung der Neperiſchen Stäbchen aus dem Iournal des Scavans, 1678. p. 170. beſchrieben. Ihr Erfinder heißt Grillet.

Reyher, Profeſſor der Rechte in Kiel, hat im Jahr 1688 in einer deutſchen und einer lateiniſchen Schrift gezeigt, wie die Vielfachen der Zahlen von 1 bis 60 nach der Sexageſimal-Abtheilung auf Stäbchen getragen werden, zur Nachahmung der Neperiſchen Stäbe. Ein Holſteiniſcher Edelmann, von Qualen, hat es zuerſt angegeben.

Die künſtlichſten Hülfsmittel zum Rechnen ſind die Rechenmaſchinen, welche nur das Stellen der Ziffern in den aufgegebenen Zahlen, und bloßes Drehen erfordern. Die erſte dieſer Art iſt eine von Paſcal erfundene, als er erſt 19 Jahre alt war. Sie iſt in dem Recueil des machines approuvées par l'Académie des Sciences abgebildet und beſchrieben, allein ſo dunkel, daß, wie der Verfaſſer des Artikels, Machine arithmétique, in der Encyclopédie méthodique (Diderot) ſagt, es faſt ſo ſchwer iſt, dieſe Beſchreibung zu verſtehen, als eine ſolche Maſchine zu erfinden. Die Beſchreibung in dem gedachten encyklopädiſchen Wörterbuche iſt auch ſchwer zu verſtehen, wenigſtens in dem italiäniſchen Nachdruck, wo die Figuren nicht zu der Beſchreibung paſſen.

Im Jahr 1725 iſt eine Rechenmaſchine von l'Epine verfertigt, die einfacher iſt, als die von Paſcal erfundene, und als andere, die derſelben nachgeahmt waren. Sie iſt in der gedachten Sammlung von Maſchinen befindlich, wo noch eine andere von Boitiſſendeau beſchrieben iſt. Die Akademie urtheilt von beiden rühmlich.

Leibnitz bemerkte einige Unvollkommenheiten an der Paſcalſchen Rechenmaſchine, und ſann auf eine neue Einrichtung. Dieſe zeigte er ſchon im Jahr 1673 der Londoner Societät vor, und als er ihr noch Verbeſſerungen gegeben hatte, der Pariſer Akademie der Wiſſenſchaften, von der ſie mit Beyfall aufgenommen ward. Das Äußere und das Verfahren bey dem Gebrauche hat Leibnitz

in den Miscellaneis Berol. a. a. 1709 beſchrieben und mit einer Abbildung erläutert. Er iſt aber doch mit ſeiner Rechenmaſchine nie völlig zu Stande gekommen, ob er gleich einige tauſend Thaler, ja nach Einiger Angaben 24000, daran gewendet hat. Da er ſelbſt kein Mechanikus, und wie es ſcheint, auch ein ſchlechter Zeichner war, ſo mochte er ſich den Künſtlern nicht gehörig verſtändlich machen können. Er hat, wie Leupold an dem a. O. erzählt, ſeine Maſchine an einen geſchickten Mechanikus, M. Teubert in Zeitz, geſchickt, daß dieſer verſuchen ſollte, ſie völlig in Stand zu ſetzen. Da aber nach Leibnitzens Tode die Erben dazu kein Geld hergeben, ſelbſt den Vorſchuß jenes Mannes nicht vergüten wollten, ſo iſt das Werk ganz liegen geblieben. Ein Exemplar der Maſchine, aber nicht vollendetes, iſt vor dieſem in Hannover auf der königlichen Bibliothek befindlich geweſen, und hernach nach Göttingen geſchickt. Ich erinnere mich, da ich ſie in Göttingen geſehen habe, daß die Getriebe ungleich lange Triebſtecken, wie die Ordinaten an einer cylindriſchen Spirale, hatten, um die Räder mittelſt ihrer Stifte oder Zähne mehr oder weniger zu drehen. Käſtner hat eine Beſchreibung derſelben zu Pütters akademiſchen Gelehrtengeſchichte der Georgauguſtus-Univerſität geliefert. Eine kurze Nachricht giebt derſelbe in ſeiner Fortſetzung der Rechenkunſt S. 568. ff. Das göttingiſche Exemplar iſt vollſtändiger als das von Leibnitz ſelbſt in den Misc. Berol. beſchriebene, welches auch in Leupolds Theater angeführt iſt. In der Sammlung der Leibnitziſchen Werke, Th. III. N. 74. iſt die Beſchreibung aus der Berliner Sammlung eingerückt.

Polenus, Profeſſor zu Padua, der durch Nachrichten von Paſcals und Leibnitzens Rechenmaſchinen gereitzt wurde, über die Einrichtung eines ſolchen Werks nachzudenken, erfand eine andere, die er in ſeinen Miscellaneis, Venet. 1709. bekannt machte. Leupold hat die Beſchreibung in ſein Theater eingerückt. Sie hat mehrere Gewichte, und ein Pendel gleich einer Uhr, ſcheint aber wegen ihrer Größe unbequem zu ſeyn.

So ward auch Leupold, da er ſein Verlangen, den Bau einer Rechenmaſchine zu ſehen, nicht befriedigen konnte, dadurch veranlaßt, ſelbſt eine zu erfinden, die er in dem mehrmals angeführten Werke beſchreibt, und auch nach ihrer Einrichtung abbildet. Sie hat im Äußern manches Ähnliche mit der Mülleriſchen, wovon unten Nachricht ertheilt wird.

Der wirtembergiſche Pfarrer Hahn hat eine Rechenmaſchine erfunden, vermittelſt welcher man bis 100 Millionen in den vier Species rechnen kann. Eine Beſchreibung des Äußern dieſer Maſchine iſt in dem deutſchen Merkur, May 1779, anzutreffen. Ein Exemplar beſitzt der Leibmedicus Beireis in Helmſtädt.

Der Heſſen = Darmſtädtiſche Ingenieur = Hauptmann Müller erfand eine Rechenmaſchine, deren Beſchreibung 1786 herausgekommen iſt, mit einer Abbildung des Äußern begleitet. Der Gebrauch iſt ſehr deutlich gezeigt. Sie muß eine ſehr einfache Einrichtung haben. Es ſind viele Proben damit gegen Rechnungen mit Ziffern von einem ſehr fertigen Rechner angeſtellt. Bey kleinen Exempeln ward der Rechner etwas eher fertig als die Maſchine, bey großen aber iſt die Maſchine ſchneller. Wenn die Zeit aller berechneten Exempel (an der Zahl 103), vom größten bis zum kleinſten, zuſammen addirt wird, ſo iſt die von dem Rechner zugebrachte Zeit 4 St. 32 Min. 49. Sec., mittelſt der Maſchine aber nur 2 St. 50 Min. 23 Sec. In jener Zeit iſt die auf der Probe der Rechnung zugebrachte Zeit mit begriffen. Die Maſchine kann Reſultate bis zu 14 Ziffern liefern. Sie kann auch zu Rechnungen mit benannten Zahlen verſchiedener Sorten angewandt werden. In derſelben iſt ein Warnungsglöckchen angebracht, welches anzeigt, wenn bey dem Gebrauche ein Verſehen gemacht iſt. Es ſind auch noch einige Vorrichtungen vorhanden, wodurch mögliche fehlerhafte Behandlungen verhütet werden. Eine Vergleichung der Müllerſchen und Hahniſchen Maſchine iſt in dem Göttingiſchen Magazin herausgegeben von Lichtenberg und G. Forſter III. Bd. 5s. St. anzutreffen.

Hahn ſuchte die Vorzüge ſeiner Maſchine vor der Mülleriſchen zu zeigen im deutſchen Merkur, Jun. 1785. Müller hat den Bau der ſeinigen und ihre Wirkungen der Göttingiſchen Societät der Wiſſenſchaften gezeigt, wovon die Götting. gel. Anz. 1784. St. 120. Nachricht ertheilen.

Lambert hat in ſeiner Jugend, da er Paſcals Rechenmaſchine erwähnt gefunden hatte, auch eine erdacht, von der aber weiter nichts bekannt geworden iſt. Dieſe Anzeige iſt aus Lamberts gelehrtem Briefwechſel, II. S. 12.

Rechenmaſchinen ſind ohne Zweifel zu großen Rechnungen, oder zur Prüfung ſolcher ſehr brauchbar, vorausgeſetzt, daß ſie zuverläßig ſind, und auch nicht leicht durch fehlerhafte Behandlung unrichtige Reſultate geben können. Müller empfiehlt ſeine Maſchine beſonders zur Verfertigung weitläuftiger Tabellen, wozu ſie ſehr geſchickt ſey.

Rechnungen mittelſt einiger Maaßſtäbe zu vollführen, zeigte Michael Scheffelt in einer deutſchen Schrift, betitelt: Pes mechanicus artificialis, oder Maaßſtab, auf welchem alle Proportiones der ganzen Matheseos ohne mühſames Rechnen, allein durch Hülfe eines Handzirkels gefunden werden. Ulm. 1699 in 4. Es ſind acht Maaßſtäbe, für die Längen unmittelbar, für ihre Quadrate, Würfel, Kreisflächen, für die Chorden der Winkel, die Sinus, die Tangenten und für die Logarithmen. Die letztere heißt die arithmetiſche Linie. Die Längen ſelbſt verhalten ſich wie die Mantiſſen in den Logarithmen der beygezeichneten Zahlen. Dadurch dient dieſer Maaßſtaab zum Multipliciren und Dividiren. Auf ähnliche Art ſind die andern Maaßſtäbe bezeichnet. Der quadratiſche giebt die Größe der Quadrate der darauf getragenen Längen, der cubiſche ihre Würfel an, u. ſ. f. Es braucht nicht erinnert zu werden, daß ein ſolcher Maaßſtab wenig Genauigkeit gewährt; für Handwerker und ungeübte Mechaniker könnte er nützlich ſeyn, für welche auch der Verfaſſer dieſes Inſtrument insbeſondere beſtimmt hat. Es iſt viel wolfeiler als der Proportionalzirkel.

Eine von Grüſon im Jahr 1791 verfertigte Rechenmaſchine, oder vielmehr Rechenſcheibe, enthält auf den Sectoren eines Kreisringes die Vielfachen der Zahlen 2 bis 9 in der Richtung eines Halbmeſſers, und darunter die Summen jedes Vielfachen und der Zahlen 1 bis zu der vervielfachten Zahl weniger Eins, d. i. wenn n eine der Zahlen 2 bis 9 iſt, die Producte 1 n bis 9 n, darunter die Summen $n + 1$ bis $9n + 1$, darunter die Summen $n + 2$ bis $9n + 2$, u. ſ. f. zuletzt die Summen $2n - 1$ bis $10n - 1$. Man kann dieſe Rechenſcheibe bequem in ein Rechteck verwandeln.

Eine aus papiernen Scheiben zuſammengeſetzte, ſogenannte machina arithmetica portatilis gab Prahll in Kupfer geſtochen heraus, wovon in den Götting. gel. Anzeigen 1790. St. 104. Nachricht zu finden iſt.

Integral iſt eine Function einer veränderlichen Größe oder mehrerer in Beziehung auf ein gegebenes Differential, das aus jener Function entſteht, z. B. x^m iſt das Integral von $mx^{m-1}\partial x$; oder $\sqrt{(aa + xx)}$ von $\frac{x\partial x}{\sqrt{(aa + xx)}}$; und $ax^2 + by^2 + cxy$ von $(2ax + cy)\partial x + (2by + cx)\partial y$.

Da eine Differentialgleichung aufs neue wieder differentiirt werden, und dieſes noch mehrere mahle geſchehen kann, ſo kann ein Integral noch Differentiale enthalten. Nämlich das Integral eines Differentials vom zweyten Grade enthält Differentiale vom erſten Grade, ſo daß das Integral immer Differentiale enthält, die einen Grad niedriger ſind, als die in der Differentialgleichung, worauf ſich das Integral unmittelbar bezieht. Doch iſt Integral ſchlechtweg die endliche Function, worauf man durch die ſucceſſiven Integrationen kommt.

Ein Integral wird in Beziehung auf das zugehörige Differential durch das dieſem vorgeſetzte $\int$ bezeichnet, z. B. $\int x^m \partial x = \frac{1}{m+1} x^{m+1}$; oder $\int \frac{x\partial x}{\sqrt{(aa+xx)}}$

$\sqrt{(aa + xx)}$; oder $\int (2ax + cy)\partial x + \int (2by + cx)\partial y = ax^2 + by^2 + cxy$; oder $\int \sin\varphi . \partial\varphi^2 = -\cos\varphi . \partial\varphi$; oder $\int e^x \partial x^2 = e^x \partial x$. Dieſe Bezeichnung vertritt die Stelle der endlichen Function, wenn das Integral noch erſt zu finden iſt, oder nicht vollſtändig ausgedruckt werden kann, auf ähnliche Art, wie $\sqrt[m]{a}$ die mte Wurzel aus a vollſtändig anzeigt, insbeſondere bey allgemeinen Formeln, wenn die Function, die in ein Differential multiplicirt iſt, unbeſtimmt gelaſſen wird. So bezeichnet $\int X \partial x$ den Flächeninhalt zwiſchen zwey Ordinaten einer Curve, des zwiſchen ihnen liegenden Stücks der Abſciſſenlinie und des Bogens der Curve, da X die Ordinate als Function von x bedeutet.

Das Integral, $\int X \partial x$, iſt die veränderliche Größe, auf deren Differential ſich das Differential von x bezieht. Wenn in der Rechnung, wodurch jene Größe gefunden wird, dieſelbe auch nicht durch ein beſonderes Symbol bezeichnet wird, ſo muß man doch in Gedanken immer eine Function y ſetzen, von der Beſchaffenheit, daß $\frac{\partial y}{\partial x} = X$ ſey. Denn ein Differential iſt keine ſelbſtſtändige oder abſolute Größe, ſondern hat nur einen relativen Werth in Vergleichung mit andern Differentialen. S. Th. I. S. 812.

Das Zeichen $\int$ deutet urſprünglich auf eine Summe. Allein ein Integral iſt keine Summe unendlich vieler unendlich kleiner Größen, da Differentiale für ſich allein genommen keine Quantität haben. Das Zeichen rührt von Leibnitz her, ſ. Th. I. S. 843. Es wäre ſchicklicher der Buchſtab *J* dafür geweſen, den Johann Bernoulli anfangs gewählt hatte, wie man aus dem Commercio phil. et mathem. Leibnitii et Bernoullii ſieht. Aus Gefälligkeit gegen Leibnitz nahm er die Bezeichnung durch $\int$ an.

Wenn der Werth eines Integrals gefunden iſt, ſofern daraus das Differential entſteht, ſo iſt noch eine

Conſtante zuzuſetzen, weil bey der Differentiation der unveränderliche Theil in einer Function wegfällt, oder man muß ſich verſichern, daß die Conſtante Null ſey. Ihr Werth wird dadurch beſtimmt, wenn man den Werth des Integrals für einen gewiſſen Werth der veränderlichen Größe beſtimmen kann. Der leichteſte und häufigſte Fall iſt, da ein Integral $y = 0$ iſt, wenn die dazu gehörige $x = 0$ genommen wird.

Integrale höherer Differentiale enthalten mehrere Conſtanten. Iſt das Differential vom zweyten Grade, ſo kommt in das erſte Integral eine Conſtante, und in das zweyte noch eine. So viel ſucceſſive Integrationen, ſo viele Conſtanten.

Ein negatives Integral bedeutet, daß der abſolute Werth von einer Conſtante abzuziehen iſt. Wenn nämlich X eine Function von x iſt, ſo haben X und $C - X$ einerley Differentiale in Beziehung auf ∂x, nur entgegengeſetzte; alſo iſt, wenn bey einem poſitiven ∂x das Integral von ∂X negativ iſt, dieſes $= C - X$.

Ein vollſtändiges Integral iſt dasjenige, worin die geſuchte Function in ihrer ganzen Ausdehnung mit einer willkührlichen Conſtante dargeſtellt wird. Ein particuläres Integral iſt dasjenige, worin die Conſtante auf eine gewiſſe Weiſe beſtimmt worden iſt. So erklärt ſich Euler in den Institt. Calc. integr. §. 36. Aber ebendaſ. §. 540. ſchränkt er die Bedeutung des Ausdrucks, particuläres Integral, darauf ein, daß es eine ſolche Relation der veränderlichen Größen ſey, welche der gegebenen Differentialgleichung Genüge thut, ohne eine neue Conſtante zu enthalten, doch müſſe es in dem vollſtändigen Integral enthalten ſeyn. Jene erſtere Erklärung iſt vorzuziehen, da ſie dieſe andere auch in ſich begreift, wenn nämlich die zugefügte Conſtante $= 0$ genommen wird. Dieſe andere kann zu einem Mißverſtande Anlaß geben. Es giebt Differentialgleichungen, die durch eine gewiſſe Relation der veränderlichen Größen erfüllt werden, ohne eine willkührliche Conſtante, und ohne daß dieſe Relation für ein Integral der Gleichung gehalten

werden kann. Euler erinnert dieſes allerdings, und hat das 4te Kap. der 2. Section im 1. Theile der Unterſuchung gewidmet, wie man beſtimmen möge, ob eine gefundene Relation, die der Differentialgleichung Genüge thut, zugleich ein wahres particuläres Integral iſt, ohne daß man das vollſtändige Integral kennt.

Eine Differentialgleichung kann nämlich in zwey Theile zerfallen, deren jedem durch eine gewiſſe Function von x und y Genüge geſchieht, ohne daß dieſe die eigentliche Integralgleichung iſt. Oder die endlichen Differentialfactoren der Gleichung, $P\partial x + Q\partial y = 0$, können einen gemeinſchaftlichen Factor haben, der alſo, wenn er $= 0$ geſetzt wird, die Gleichung erfüllt. Oder in der urſprünglichen endlichen Gleichung, $V = 0$, werde eine der darin enthaltenen unveränderlichen Größen a, als eine veränderliche behandelt, ſo daß dadurch die Differentialgleichung werde, $P\partial x + Q\partial y + R\partial a = 0$, wo R eine Function von a ſey. Setzt man hier $R = 0$, ſo erhält man, wenn der daraus hervorgehende Werth von a in P und Q geſetzt wird, eine Differentialgleichung für x und y allein, deren Integral auch, bey gehöriger Beſtimmung der Conſtante der Gleichung $P\partial x + Q\partial y = 0$ Genüge thut.

Z. B. die Gleichung
$x\partial x + y\partial y \pm \partial y\sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)} = 0$ zerfällt in zwey Theile, die durch die Annahme, $x^2 + y^2 - b^2 = 0$, jeder Null werden. Die eigentliche Integralgleichung iſt, $x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = 0$, und die einfachere Differentialgleichung iſt, $x\partial x - a\partial y = 0$. Setzt man aus der endlichen Gleichung den Werth von a in die Differentialgleichung, ſo wird jene vorgegebene erhalten. Differentiirt man die endliche Integralgleichung, ſo daß a zugleich als veränderlich betrachtet wird, ſo erhält man $x\partial x - a\partial y - y\partial a - a\partial a = 0$. Nimmt man $a + y = 0$, und ſetzt für a ſeinen Werth in dem zweyten Terminus, ſo iſt $x\partial x + y\partial y = 0$, alſo $x^2 + y^2 =$ const. Setzt man const. $= + b^2$, ſo iſt
$x^2 + y^2 - b^2 = 0$ die Function, welche der vorgegebe-

nen Gleichung genügt. Beide entſtehen aus derſelben endlichen Gleichung durch Elimination derſelben Größe a.

Ein anderes Beyſpiel iſt die Gleichung,

$$y - ax - b\sqrt{(1 + aa)} = 0.$$

Hieraus iſt $\partial y - a\partial x = 0$, und aus beiden, durch Wegſchaffung von a,

$$(xx - bb)\partial y - xy\partial x \pm b\partial x\sqrt{(xx + yy - bb)} = 0.$$

Dieſer thut die Gleichung, $xx + yy - bb = 0$, Genüge. Man findet dieſe Relation auch durch die Differentiation der endlichen Gleichung, wenn a veränderlich genommen wird. Nach dem gezeigten Verfahren iſt $a = \frac{x}{\sqrt{(b^2 - x^2)}}$, wodurch wird $\partial y - \frac{x\partial x}{\sqrt{(bb - xx)}} = 0$, und $y + \sqrt{(bb - xx)} = 0$, wenn die Conſtante der neuen Differentialgleichung Null geſetzt wird.

Man wird mit la Place und la Croix die Functionen, welche der Differentialgleichung Genüge thun, ohne in der eigentlichen Integralgleichung enthalten zu ſeyn, lieber particuläre Auflöſungen nennen, weil ſie nicht auf dem Wege der Integration aus der vorgegebenen Differentialgleichung gefunden werden.

Es möchte ſchicklicher ſeyn, anſtatt vollſtändiges Integral zu ſetzen, allgemeines, weil dem Vollſtändigen dasjenige entgegenſteht, woran etwas fehlt, dem Allgemeinen aber das beſondere entgegen geſetzt wird. Wenn keine willkührliche Conſtante dem Integral beygefügt iſt, ohne daß der Werth Null für die Conſtante ausdrücklich beſtimmt wird, ſo möchte man es ein unvollſtändiges, und das mit einer Conſtante begleitete ein vollſtändiges nennen.

Clairaut hat in den Mém. de l'Ac. des Sc. 1734 die Bemerkung gemacht, daß es Differentialgleichungen gebe, welche man durch neue Differentiation integriren kann, daß aber die ſolchergeſtalt gefundenen Integrale nie unter den vollſtändigen begriffen ſind, welche die gewöhnlichen Regeln der Integration geben. Hernach

haben ſich die Analyſten viel mit den beſondern Auflöſungen der Differentialgleichungen beſchäftigt. Euler in den Schriften der Berliner Akad. 1756, und in dem Werke über die Integralrechnung, T. I. Sect. II. Cap. IV.; d'Alembert in den Mém. de l'Acad. des Sc. 1769; allgemeiner Laplace in denſelben 1772; Lagrange in den M. de l'Ac. de Berlin 1774, und in der Théorie des fonctions anal. nr. 69.; Trembley in den Schriften der Turiner Geſellſchaft für 1790. 91. Man ſehe auch Käſtners Analyſis des Unendl. S. 575.

Eine duplicirte Integralformel iſt eine ſolche, die eine zweyfache Integration nach einander erfordert. Das dazu gehörige Differential hat die Form $Z\partial x\partial y$, worin Z irgend eine Function von x und y iſt. Das Integral davon wird durch $\int\int Z\partial x\partial y$ bezeichnet. Bey der erſten Integration wird eine der veränderlichen Größen, ſie ſey x, als unveränderlich betrachtet, und die Integration bloß in Abſicht auf die andere, y, vorgenommen. In dieſem erſten Integral wird x allein veränderlich geſetzt, wenn nämlich x und y nicht von einander abhängen; die willkührlichen zuzuſetzenden Functionen ſind eine von x und eine von y. Wenn aber x und y in irgend einer Verbindung ſtehen, ſo muß das erſte Integral ſo genommen werden, daß es alle Werthe von y begreift; und in der mit ∂x behafteten Differentialformel wird nun für y ſein Werth durch x geſetzt, um ſie in Beziehung auf x zu integriren. Euler hat von dieſen Integralformeln eine Abhandlung in den Comm. novis Acad. Petr. T. XIV. geliefert, die in den 4. Theil der Integralrechnung eingerückt iſt. Er gebraucht ſie zu einigen künſtlichen Cubirungen und Complanationen. Die Florentiniſche Aufgabe hat er dadurch auf einem von geometriſchen Conſtructionen ganz befreyeten Wege, und ſehr allgemein, aufgelöſet. Bey der Rechnung über die Anziehung eines Körpers auf einen andern kommen auch triplicirte Integrale vor. Jedes Element eines Körpers mag als ein rechtwinklichtes Parallelepipedum angeſehen werden, deſſen Seiten die Differentiale dreyer rechtwinklichten Coordina-

ten x, y, z ſind, und der ganze Körper mag durch $\int\int\int \partial x \partial x \partial z$ bezeichnet werden, oder die anziehende Kraft deſſelben durch $\int\int\int V \partial x \partial y \partial z$. S. la Place Théorie du mouvement et de la figure des Planètes.

Joh. Bernoulli gebraucht auch das vervielfachte Integrationszeichen, aber in einer andern Bedeutung als die von Euler angenommene, in dem Commercio epistolico Leibnitii et Io. Bernoullii, T. I. p. 75. 76. Bey ihm iſt $\int z = \frac{z^2}{1.2 \partial z}$; $\int^2 z = \frac{z^3}{1.2.3 \partial z^2}$; $\int^3 z = \frac{z^4}{1.2.3.4 \partial z^3}$, u. ſ. f. wo ∂z conſtant iſt. Deutlicher und allgemeiner iſt folgende Erklärung dieſer Notation. Es ſey Z eine Function von z, und $\int Z \partial z = P$; $\int P \partial z = Q$; $\int Q \partial z = R$, u. ſ. f. ſo iſt $P \partial z = \partial z \int Z \partial z = \int Z \partial z^2$. Denn da ∂z conſtant iſt, ſo kann man es, wie jede conſtante Größe, vor oder unter das Integralzeichen ſetzen. Folglich iſt $\int\int Z \partial z^2$ oder $\int^2 Z \partial z^2 = Q$. Ferner iſt $\int Q \partial z$, oder $\int^2 P \partial z^2$, oder $\int^3 Z \partial z^3 = R$, u. ſ. f.

Bernoulli betrachtet auch die Integrationen verſchiedener Ordnungen als Differentiationen im entgegengeſetzten Verſtande in Beziehung auf die eigentlichen, und bezeichnet ſie dem zu folge. Alſo iſt $\partial^{-1} z = \int z$; $\partial^{-2} z = \int^2 z$; $\partial^{-3} z = \int^3 z$, u. ſ. f. Deutlicher: $\partial^{-1} z = \frac{\int z \partial z}{\partial z}$; $\partial^{-2} z = \frac{\int^2 z \partial z^2}{\partial z^2}$; $\partial^{-3} z = \frac{\int^3 z \partial z^3}{\partial z^3}$, u. ſ. f.

Integralrechnung iſt die Methode, aus der gegebenen Relation der Differentiale zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen die Relation dieſer Größen zu finden. Das Verfahren, wodurch man dazu gelangt, heißt die Integration.

Die Integralrechnung iſt das Umgekehrte der Differentialrechnung, da die letztere aus der Relation der ver-

änderlichen Größen das Verhältniß ihrer Differentiale, es ſey der erſten oder der höhern ſucht. Jene aber iſt ſchwer und noch unvollendet, dieſe iſt leicht und mag als geſchloſſen betrachtet werden. Zu jeder Function kann man leicht ihr Differential in Beziehung auf die Differentiale der darin enthaltenen veränderlichen Größen finden; allein von jedem Differential läßt ſich nicht das Integral angeben. Es iſt hier, aber auf eine viel höhere Art, ein Fall, wie in der gemeinen Arithmetik mit den Irrationalzahlen. Nicht aus jeder Zahl läßt ſich die Wurzel von einem gegebenen Grade vollſtändig angeben. Ja es können Differentialgleichungen ſo beſchaffen ſeyn, daß gar keine Relation der veränderlichen Größen möglich iſt, woraus jene entſtänden, und daß ſie erſt durch einen zugeſetzten Factor eine Form erhalten, bey welcher ein reales Integral Statt hat.

Die Differentialgleichungen enthalten entweder nur zwey veränderliche Größen, oder mehrere. Dieſes giebt zwey Hauptabtheilungen der Integralrechnung. Jede derſelben enthält zwey Theile. In dem erſten wird die Integration ſolcher Differentialgleichungen geſucht, worin nur Differentiale vom erſten Grade vorkommen; in dem andern ſolcher, worin Differentiale vom zweyten Grade und höhern enthalten ſind. Der erſte Theil der erſten Hauptabtheilung iſt bisher am vorzüglichſten bearbeitet worden; der zweyte Theil noch nicht hinlänglich. Die zweyte Hauptabtheilung aber, und insbeſondere der zweyte Theil derſelben, iſt ſo ſchwierig, daß dasjenige, was darin geleiſtet worden, unbeträchtlich iſt gegen dasjenige, was noch darin zu wünſchen übrig bleibt.

Der erſte Theil der erſten Hauptabtheilung enthält drey Abſchnitte zu Folge der Beſchaffenheit der dahin gehörigen Differentialgleichungen, zwiſchen zwey veränderlichen Größen x und y.

Erſter Abſchnitt. Die Differentialgleichung habe die Form, $\partial y = X \partial x$, wo X irgend eine Function von x iſt. Dieſer Abſchnitt iſt der leichteſte, der in den deutſchen Lehrbüchern beynahe nur allein vorgetragen wird.

Euler nennt den Ausdruck, worin eine Function von x mit dem Differential von x verbunden iſt, eine Differential-Formel.

Zweyter Abſchnitt. Die Differentialgleichung habe die Form: $P\partial x + Q\partial y = o$, wo P und Q jede irgendwelche Functionen von x und y ſind. Hier hat man noch keine allgemeine Methoden, ſondern nur für beſondere Fälle Auflöſungen gefunden. Iſt P bloß von x eine Function, und Q von y, ſo läßt ſich die Integration durch die Methoden in dem erſten Abſchnitte bewerkſtelligen. Differentialgleichungen, worin die veränderlichen Größen und ihre Differentiale nicht geſondert ſind, heißen insbeſondere Differentialgleichungen.

Dritter Abſchnitt. Die Differentialgleichung enthalte Potenzen von ∂x und ∂y, und Producte dieſer Differentiale. Dieſer Fall iſt ſo ſchwierig, daß nur äußerſt wenig bisher darin geleiſtet worden iſt.

Der zweyte Theil der erſten Hauptabtheilung betrifft die Auflöſung ſolcher Differentialgleichungen, worin nebſt den veränderlichen x und y und ihren erſten Differentialen noch höhere vorkommen. Man ſetze $\frac{\partial y}{\partial x} = p$;

$\frac{\partial p}{\partial x} = q$; $\frac{\partial q}{\partial x} = r$; u. ſ. w., ſo iſt hier die Frage, wie aus einer Gleichung zwiſchen x, y, p, q, r, etc. die Gleichung zwiſchen x und y gefunden werden möge.

Die zweyte Hauptabtheilung, worin Gleichungen mit mehr als zwey veränderlichen Größen behandelt werden, enthält die Rechnung mit partiellen Differentialen, wie man ſie in Frankreich beſonders zu nennen pflegt. Die Differentialgleichung ſey dieſe: $P\partial x + Q\partial y + R\partial z = o$, wo P, Q, R Functionen von x, y, z ſind, ſo iſt die Gleichung $P\partial x + Q\partial y = o$ eine partielle, weil nach derſelben die veränderliche z als unveränderlich betrachtet wird. So auch die Gleichungen $P\partial x + R\partial z = o$, und $Q\partial y + R\partial z = o$. Es bedeute

$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ den partiellen Differentialquotienten für z in Beziehung auf x allein, und $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ den partiellen Differentialquotienten für z in Beziehung auf y allein, ſo enthält der erſte Theil der zweyten Hauptabtheilung ſolche Aufgaben, worin eine gewiſſe Relation zwiſchen den Größen x, y, z, und $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ vorgelegt wird, um daraus eine Gleichung zwiſchen x, y, z allein herzuleiten.

In dem zweyten Theile kommen außer den Formeln $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ und $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ auch folgende Formeln $\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial y}\right)$ und $\left(\frac{\partial \partial z}{\partial y \partial y}\right)$ in Rechnung, von welchen die erſte bedeutet den Differentialquotienten für $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ in Beziehung auf x allein; die zweyte den für $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ in Abſicht auf y, oder welches daſſelbe iſt, den von $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ in Abſicht auf x (zufolge Differentialgleichung, 12); und die dritte Formel den Differentialquotienten für $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ wieder in Beziehung auf y allein. Nun ſey eine Gleichung zwiſchen x, y, z, den partiellen Differentialquotienten $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, und den zuletzt angezeigten des zweyten Grades gegeben, ſo iſt die aufzulöſende Aufgabe, daraus eine Gleichung zwiſchen x, y und z allein herzuleiten. Dergleichen Aufgaben kommen in der höhern Mechanik und Hydrodynamik häufig vor, daher die Methoden zu ihrer Auflöſung ſehr wichtig ſind.

zu Gleichungen mit höhern Differentialen iſt noch bisher keine Veranlaſſung geweſen.

Wenn die Functionen, welche durch die Integralrechnung geſucht werden, algebraiſch nicht können dargeſtellt werden, ſo ſind ſie transſcendente. Doch werden logarithmiſche und circulare Functionen mit den algebraiſchen faſt für gleichgeltend genommen, weil man hier die zuſammengehörigen Größen mittelſt der Tafeln oder der entwickelten Formeln immer hinlänglich genau eine aus der andern beſtimmen kann. Daher wird eine Integration für vollendet angeſehen, wenn ſie auf logarithmiſche oder circulare Functionen, es ſey allein oder in Verbindung mit algebraiſchen gebracht iſt.

Bey der Integration einer Gleichung von der Form, $\partial y = X \partial x$ läßt ſich das Integral y oder die geſuchte Function von x oft nicht anders, als durch eine Reihe näherungsweiſe angeben. Dieſe Functionen mag man als algebraiſche irrationale betrachten. Die andern Differentialgleichungen, wenn ſie nicht algebraiſche Integrale, oder auch circulare oder logarithmiſche haben, führen auf eigene Gattungen von transſcendenten Functionen, deren Anzahl unbeſtimmbar bleibt.

Geſchichte der Integralrechnung.

Es iſt ſchwer eine Geſchichte der Integralrechnung abzufaſſen. Die Methoden der Integrationen mit allen dazu gehörigen Unterſuchungen ſind theils in ſehr vielen einzelnen Abhandlungen enthalten, theils in den Schriften über die höhere Geometrie, Mechanik und phyſiſche Aſtronomie zerſtreut, woraus man die allmählige Ausbildung und Erweiterung der Methoden hervorziehen müßte. Dabey würde man nicht umhin können, ſich auf die Rechnungen ſelbſt etwas einzulaſſen, um zu zeigen, worin eine Entdeckung oder Erweiterung beſtanden habe, wenn man auch ſich nicht vornähme, den Leſer von den Gegenſtänden zu unterrichten, ſondern ihn deshalb auf gute Bücher verwieſe. Hier möchte es manchmal ſchwer ſeyn, entweder nicht unverſtändlich oder nicht zu ausführlich zu wer-

den. Montücla beengt ſich in ſeiner Geſchichte der Mathematik, auch bey der Integralrechnung, den Raum dadurch, daß er dem Leſer zugleich Unterricht von den Elementen der Wiſſenſchaft ertheilt, der doch nur unvollſtändig ſeyn kann.

In dem Artikel: Differentialrechnung, Th. I. S. 832. iſt gezeigt, daß Newton ſeine Schrift: Methodus fluxionum et ſerierum infinitarum ſchon im J. 1671 aufgeſetzt habe. In dieſer macht die Anwendung der Integralrechnung auf Quadraturen und Rectificationen der Curven den größten Theil aus, daher Horsley in ſeiner Ausgabe der Newtonſchen Werke ihr den Titel giebt: Artis analyticae ſpecimina, vel Geometria analytica. Die Abhandlung: de quadratura curvarum, welche 1704 mit der Optik heraus kam, enthält allgemeinere Integrations-Formeln, als jene Abhandlung, welche durch viele Exempel die neue Methode erklärt. Doch haben beide die Tafeln für gewiſſe algebraiſche Integrale, und ſolche, die auf Quadratur der Ellipſe oder Hyperbel gebracht werden können, gemein. Übrigens ſind auch die Principien der Naturwiſſenſchaft, die Newton 1686 zuerſt herausgab, ein Beweis, daß ihr Verfaſſer die Integralrechnung, wenigſtens ſo fern ſie die Formen, wie $X\partial x$, betrifft, im Beſitz hatte. Die Differentialgleichungen, in welchen die veränderlichen Größen nicht geſondert ſind, löſet Newton in der erſten Schrift, der Methodus fluxionum, durch Verwandlung der einen veränderlichen Größe in eine, nach Potenzen der andern geordnete, Reihe auf, wovon er ein Glied nach dem andern findet, aber doch auf eine nicht bequeme Art. Es würde leichter ſeyn, eine Reihe mit unbeſtimmt gelaſſenen Coefficienten zu gebrauchen, eine Methode, die Newton nicht entgehen konnte, wenn er ſie nicht aus gewiſſen Gründen zurückſetzte. Eine beſondere Methode, durch eine endliche Anzahl von Ordinaten eine Curve faſt genau zu quadriren, lehrte Newton in der Schrift: Methodus differentialis.

In England blieben Newtons Methoden noch unbekannt, oder wurden nur wenigen anvertraut. Erſt im

J. 1699 erſchienen Newtons Briefe an Leibnitz in dem dritten Theile der Werke von Wallis. Die zwey Überſetzungen der von Newton gebrauchten geheimen Schrift waren ſelbſt noch Räthſel. Craig bediente ſich in ſeiner zweyten Schrift über die Quadratur der krummen Linien (London, 1693) der Leibnitziſchen Differentialrechnung. Er nahm dabey eine zweyte Curve zu Hülfe, an welcher die Subnormalen den Ordinaten der vorgegebenen Curve, bey gemeinſchaftlicher Abſciſſe, gleich ſind; daher das Quadrat einer Ordinate an der zweyten Curve das doppelte der zugehörigen Area an der vorgegebenen iſt. Das Quadrat diente ihm ſtatt des Integrals, die Subnormale ſtatt des Differentials. Er nahm die Form des Integrals an, differentiirte es, verglich dieſes Differential mit dem vorgegebenen, und beſtimmte dadurch die Coefficienten in der angenommenen Form.

In Deutſchland zeigte Leibnitz die Anwendung ſeiner Infiniteſimalrechnung, ganz unabhängig von Newtons noch nicht bekannten Entdeckungen, durch mancherley wichtige und ſchwere Aufgaben aus der Geometrie und Phyſik. Dadurch machte er einen der ſcharfſinnigſten Geometer ſeiner Zeit, Jakob Bernoulli, auf ſeine Methode aufmerkſam, und erwarb an dieſem und deſſen Bruder, Johann Bernoulli, für den neuen, hernach ſo wichtig gewordenen Theil der Analyſis die eifrigſten Beförderer, für ſich ſelbſt an dem letztern einen ſehr warmen Freund und Vertheidiger. Er ſelbſt, durch vielerley Beſchäftigungen zerſtreut, konnte nur ſeine Gedanken flüchtig in Zeitſchriften hinwerfen. Auch hat er für die Integralrechnung ſelbſt wenig gethan. In einem Aufſatze in den Actis Erud. 1684 zeigte er an, daß er eine Methode habe, Curven zu quadriren mittelſt anderer Curven, erklärte ſie aber nicht. Im J. 1686 ſagt er daſelbſt, die Quadraturen ſeyn ihm nur ein beſonderer Fall einer viel größern Aufgabe, welche er die umgekehrte Methode der Berührenden nenne. Wieder nichts, als etwas hingeworfen! Endlich im J. 1693 erklärt er in dem Supplemento Geometriae dimenſoriae ſeine Methode

der Quadraturen, die auf die Conſtruction einer andern Curve ankommt, deren Ordinaten den Flächenräumen der zu quadrirenden proportional ſind. Dieſe Curve ſoll durch eine gewiſſe Bewegung beſchrieben werden. Leibnitz hatte alſo damahls noch keine Methode unmittelbar zu integriren. In den A. Er. 1694 giebt er die Conſtruction der Iſochrona paracentrica; aber das Integral, $\int \partial z : \sqrt{(a^2 z - a z^3)}$, worauf ſie beruht findet er nur durch Conſtruction einer Curve, deren Rectification von dieſem Integral abhängt. Das heißt freylich nur die Form des Differentials verwandeln, nicht es integriren. In einem Aufſatze, Supplementum Geometriae practicae, cet. A. Er. 1693 gebraucht Leibnitz die Methode des Unbeſtimmten zur Integration durch Reihen, und macht die Anwendung auf Logarithmen und den Kreis. Aus einer ganz kurzen Bemerkung in den A. Er. 1696. Mart. über eine von Jakob Bernoulli vorgegebene ungeſonderte Differentialgleichung ſieht man, daß er nicht allein dieſe nicht leichte Gleichung auf eine einfachere Form zu bringen wußte, ſondern auch darin die veränderlichen Größen ſondern konnte, welche Methode er aber nur in Briefen andern mitgetheilt hat. In dem Aufſatze: Specimen novum Analyſeos, cet. A. Er. 1702 zeigt Leibnitz, wie rationale gebrochene Functionen in einfache zerlegt werden, aber auf eine undeutliche Art. Hierauf gründet er die Integration der Differentialformeln $X \partial x$, wo X ein ſolcher Bruch iſt. Er bemerkt, daß bey unmöglichen Wurzeln des Nenners jedes Paar einen quadratiſchen Factor giebt, macht ſich aber wegen Nenner, wie $x^4 + a^4$; $x^8 + a^8$ eine Schwierigkeit, da er ſie nicht in quadratiſche zu zerlegen weiß. (Th. I. S. 163) Freylich können ſie nicht in binomiſche, aber wohl in trinomiſche, quadratiſche Factoren zerlegt werden. S. Th. I. S. 158. ff. mit Zuziehung von Goniometrie, IX.

In dem Commercio epiſtolico Leibnitii et Io. Bernoullii findet man, wie manche Integrations-Methoden durch die gegenſeitige Mittheilung dieſer beiden ſcharfſinnigen Männer entwickelt worden ſind. Bernoulli möchte den größten Antheil daran haben; er konnte aber

auch ſich der neuen Analyſis ohne Zerſtreuung widmen. Man muß dieſe für die literariſche Geſchichte der Mathematik und Phyſik in dem Zeitraume dieſes Briefwechſels reichhaltige Sammlung ſelbſt nachſehen. Nur ein paar Bemerkungen von Leibnitz laſſen ſich hier in der Kürze anführen. Er zeigt (p. 21), wie die Integration der Formel $x^m (lx)^n \partial x$ erhalten wird. Er differentiirt das Product $x^p (lx)^q$, welches ein zweytheiliges Differential giebt. Nun werden ſucceſſiv für q die ganzen Zahlen von 1 an geſetzt, wodurch für ein gegebenes n das Integral mittelſt der für kleinere Werthe des Exponenten gefundenen Integrale erhalten wird. Dieſe Reductions-Methode iſt bequem, und auch auf andere Formen der Differentiale anwendbar. Joh. Bernoulli ſcheint ſich ihrer auch bey der Differentialformel $x^n \partial x : \surd(a^{2n} - x^{2n})$, bedient zu haben, da er (p. 285) meldet, daß er die Fälle angeben könne, wo ſie ſchlechthin integrirbar iſt, wo ſie die Rectification der Kreisbogen erfordert, und wo weder das eine noch das andere Statt hat. Von der Reihe, die Bernoulli für das Integral der Formel, $y \partial x$, angegeben hatte, nahm Leibnitz Veranlaſſung eine dergleichen Reihe auch zur erſten Integration einer höhern Differentialformel: $x^m \partial^n y$, zu ſuchen, wobey er einen Rechnungsfehler begieng, den Bernoulli verbeſſerte.

Durch die Aufgabe von der Iſochrona (der Linie des gleichförmigen Falles), die Leibnitz im J. 1687 vorlegte, erkannte Jakob Bernoulli die Brauchbarkeit der neuen Analyſis. Sein erſter Verſuch in derſelben betraf dieſe Curve, in den A. Er. 1690. Die Aufgabe führt auf eine Differentialgleichung, die leicht zu integriren iſt. Er ſelbſt aber gab dagegen eine ſchwerere auf, die von der Figur einer an zwey Puncten aufgehangenen, ſchweren, vollkommen biegſamen Linie, ohne doch ſchon die Auflöſung gefunden zu haben, zufolge der Nachricht, die Joh. Bernoulli in ſeiner nachher gefundenen Auflöſung (A. Er. 1691. Iun., Opp. T. I. p. 48) von der Veranlaſſung der Aufgabe giebt. Dieſe Aufgabe überzeugte die Geometer von der Kraft der neuen Analyſis. Die Differentialglei-

chung für die Curve führt auf ein logarithmiſches Integral. Die horizontalen Ordinaten verhalten ſich wie die Logarithmen einer Function der Abſciſſe. Hierauf folgten im J. 1691 Anwendungen der Integralrechnung auf die Geometrie der Curven, als die ſpiraliſche Parabel, die logarithmiſche Spirale, die loxodromiſche Linie, die Flächen ſphäriſcher Drenecke, und eine Erweiterung der Aufgabe von der Kettenlinie auf ungleich ſchwere oder dehnbare Fäden. Er gab zugleich die Frage von der Figur der elaſtiſchen, durch ein Gewicht gekrümmten Linie mit der in Chiffern verſteckten Auflöſung auf, und erwähnte auch der Segellinie, oder der Figur eines vom Winde geſpannten Segels. Hierbey bemerkte er, daß durch keine andere Methode, als durch die Leibnitziſche Infiniteſimalrechnung es möglich ſey, dergleichen Aufgaben aufzulöſen, und legte dieſer Rechnung großen Vorzug vor der Barrowſchen bey. Von der Krümmung eines Segels, als einer einfach gekrümmten Linie betrachtet, gab er 1692 die Reſultate; in demſelben Jahre auch die Auflöſung der Vivianiſchen Aufgabe von dem Gewölbe mit vier Öffnungen, und der Aufgabe von der Jahreszeit der kürzeſten Dämmerung. Im J. 1694 machte er ſeine Conſtruction der elaſtiſchen Linie nach einem unbeſtimmt gelaſſenen Geſetze der Dehnung in Beziehung auf die dehnende Kraft bekannt, und insbeſondere für den Fall, da die Dehnung ſich wie die dehnende Kraft verhält. Er gebraucht dazu im Allgemeinen die Quadratur einer andern Curve, die dabey vorausgeſetzt wird. Für den beſondern vorher erwähnten Fall integrirt er aber die Gleichung,

$$\partial y = \frac{xx\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}},$$ ſchon durch Verwandlung des

Factors von ∂x in eine Reihe, und ſagt (p. 647), daß er dieſes durch die von Wallis gelehrte Interpolations-Methode gefunden habe; zufolge einer feinen Bemerkung von Leibnitz werde die Reihe auch durch Erhebung des Binomium auf eine unbeſtimmte Potenz erhalten. Nach dieſer Methode integrirt er auch das Differential des Bogens der Elaſtica. Zu gleicher Zeit gab er die Conſtruction

der von Leibnitz aufgegebenen Curva iſochrona paracentrica (der Curve der gleichförmigen Annäherung oder Abrückung in Beziehung auf einen fixen Punct), welche die Integration der Formel $\frac{\partial u}{\sqrt{(1-u^4)}}$ erfordert. Er conſtruirt ſie mittelſt der Rectification der Elaſtica, auch durch eine algebraiſche Curve vom vierten Grade. Im J. 1695 legte er die Aufgabe vor, die ungeſonderte Differentialgleichung, $a\partial y = yp\partial x + by^n q\partial x$, worin p und q Functionen von x ſind, zu conſtruiren, wenigſtens durch Quadraturen, das iſt, die veränderlichen Größen zu ſondern. Die Auflöſung gab er in dem folgenden Jahre, nachdem er ſtatt jener Gleichung dieſe: $a\partial y = y\partial x + q\partial x$, geſetzt hatte, worauf ſich jene, wie er ſagt, bringen laſſe. Im J. 1698 bediente Bernoulli zur Integrirung von Differentialformeln mit einem irrationalen Factor ſich noch der Methode durch Subſtitution dieſe rational zu machen. Bey der Beſtimmung der Länge auf der Loxodromica wird dieſes Verfahren weitläufig, da drey Subſtitutionen nöthig ſind; doch findet er zugleich beſſere Subſtitutionen. Im J. 1704 zeigt er in einer akademiſchen Schrift die Verwandlung der Wurzeln aus Binomien in eine Reihe, und dadurch die Integration der damit behafteten Differentiale.

Was Jakob Bernoulli vorzüglich als einen ſcharfſinnigen Analyſten zeigt, iſt das berühmte iſoperimetriſche Problem, wozu er durch ſeines Bruders Aufgabe von der Linie des ſchnellſten Falles (1696) veranlaßt wurde, dasſelbe, was beyde Brüder ſo ſehr entzweyte. Eine Aufgabe ähnlicher Art hatte Newton ſchon aufgelöſet, in ſo fern, daß er die Differentialgleichung für dieſelbe gefunden hatte, nämlich die Aufgabe von der Figur des Körpers, bey welcher der Widerſtand des Mittels, worin er ſich bewegt, am kleinſten wird. Jakob Bernoulli fand nicht allein eine kurze und feine Auflöſung jener Aufgabe, ſondern legte zugleich eine viel allgemeinere vor, dieſe: unter allen Curven gleichen Umfanges über einer gemeinſchaftli-

chen Grundlinie diejenige zu finden, durch deren Ordinaten oder Bogen die Ordinaten einer andern Curve nach irgend einem zuſammengeſetzten oder getheilten Verhältniſſe zu einer gegebenen geraden ſo beſtimmt werden, daß dieſe zweyte Curve den größten Raum einſchließe. In der Schrift: Analyſis magni problematis iſoperimetrici (Baſileae, 1701), bemerkt Bernoulli mit Recht, daß dieſe Aufgabe zu einer höhern Claſſe gehöre, als die bis dahin behandelten, und daß dadurch neue Gegenden der Wiſſenſchaft entdeckt würden. Es genügt bey derſelben nicht an zwey Elementen einer Curve, ſondern es ſind drey neben einander liegende zu betrachten, oder es iſt eine hiemit gleichgeltende Bedingung einzuführen. Dieſe Schrift wird für ein Meiſterſtück der Erfindung und des Scharfſinns gehalten.

Joh. Bernoulli war zwar in der Aufloͤſung dieſer neuen ſchweren Aufgabe nicht ſo glücklich als ſein Bruder, da er noch einen wichtigen Umſtand aus der Acht ließ, allein in vielen andern Stücken hat er die Rechnung des Unendlichen ungemein erweitert. Die erſte Probe von ſeiner Bekanntſchaft mit der Infiniteſimalrechnung war die mit einer ausführlichen Anzeige ihrer Eigenſchaften begleitete Aufloͤſung der Aufgabe von der Kettenlinie in den A. Er. 1691, wo die Analyſis noch nicht beygefügt war. Die Lectiones mathematicae, welche er während ſeines Aufenthalts in Paris in den Jahren 1691 und 1692 für den Marquis de l'Hopital aufſetzte, enthalten ſchon einen ſehr methodiſchen, und wegen der vielen Anwendungen auf geometriſche und dynamiſche Aufgaben noch jetzt zu empfehlenden Unterricht von der Integralrechnung, weil man darin nicht bloß Differentiale zu integriren vorgelegt bekommt, ſondern zugleich die Veranlaſſungen zu den Differentialen ſelbſt. Die Differentialformeln, die darin integrirt werden, ſind ſolche, die entweder integrirbar ſind, oder von der Quadratur des Kreiſes oder der Hyperbel abhangen. Unter der Rubrik: methodus tangentium inverſa, werden Methoden zur Integrirung von mancherley Differentialgleichungen, auch einige von

höhern Graden, vorgetragen. Von der Abſonderung der veränderlichen Größen nur ein leichtes Beyſpiel. Wichtige Bemerkung, daß den Differentialgleichungen manchmahl ein Factor oder Diviſor beyzufügen iſt, um ſie integrirbar zu machen. Zuletzt wird einiges von dem Gebrauche unendlicher Reihen zu Integrationen beygebracht, auch der binomiſche Lehrſatz in ſeiner Allgemeinheit wird hieben, doch ohne Beweis, angeführt. Wenn dieſes Werk gleich aufangs ſo beſchaffen geweſen iſt, wie es in der Sammlung aller Werke ſeines Verfaſſers im J. 1742 erſchienen iſt, ſo hat derſelbe den Geiſt der Integralrechnung gleich anfangs vollkommen gefaßt. Sein Bruder und Leibnitz ſelbſt behalfen ſich mit Quadraturen und Rectificationen ſtatt wirklicher Integrationen, dagegen Joh. Bernoulli meiſtens durch Rechnung und Reduction auf Kreis und Hyperbel die Integration vollführt. Als Beweis, daß in den Lectionen nichts verbeſſert ſey, könnte dienen, daß das

$\int \frac{\partial x}{x} = \text{infin.}$ geſetzt wird, als pag. 388, 417, 420,

dagegen es ſchon in einem Aufſatze vom J. 1697 heißt, daß $\frac{\partial x}{x}$ das Differential des Logarithmen zu der Zahl x iſt. Im Jahr 1694 machte Bernoulli eine allgemeine Reihe für $\int X \partial x$ bekannt, dieſe: $\int X \partial x =$

$$Xx - \frac{x^2 \partial X}{1.2 \partial x} + \frac{x^3 \partial^2 X}{1.2.3 \partial x^2} - \frac{x^4 \partial^3 X}{1..4 \partial x^3} + \text{etc.}$$

Die Methode hiezu, welche ſehr einfach iſt, wandte er in der Folge auf Integrationen von allerhand Formeln an. Im J. 1696 legte er die ſchöne Aufgabe von der Linie des ſchnelleſten Falles vor. Er ſcheint durch die Unterſuchung über die Trajectoria eines Lichtſtrahls darauf gekommen zu ſeyn, bey welcher angenommen ward, daß der Strahl von einem Puncte in dem einem Mittel zu einem Puncte in dem andern Mittel in der kürzeſten Zeit bey einem gegebenen Verhältniſſe der Geſchwindigkeiten gelange. Da durch das Geſetz der Geſchwindigkeiten die

Trajectoria des Lichts in jener Hypotheſe gegeben iſt, ſo iſt auf gleiche Art die Linie des ſchnellſten Falles gegeben, weil auf einer Fall-Linie die Geſchwindigkeiten den Wurzeln aus den Fallhöhen proportional ſind. Hernach iſt er auf einen directen Beweis aus dynamiſchen Gründen gekommen. Er theilte aber nur den indirecten, aus optiſchen Principien hergeleiteten, mit, um jenen noch geheim zu halten. Mit der Abſonderung der veränderlichen Größen in einer Differentialgleichung beſchäftigte B. ſich früh. Im J. 1694 ſchrieb er an Leibnitz, daß er dazu mehrere beſondere Wege habe. Im J. 1697 zeigte er, wie dieſes bey der Gleichung, $ady = yp\partial x + by^n q\partial x$, wo p und q Functionen von x ſind, geſchehen könne, die Integration gegebener Differentialformeln zu dem Ende voraus geſetzt. Die Größen x und y werden durch eine dritte eingeführte veränderliche gefunden. Auf ähnliche Art conſtruirt er die Curve für das Solidum des geringſten Widerſtandes. Er findet für daſſelbe die Differentialgleichung, $y\partial y^3 \partial x = a\partial s^4$, wo ∂y conſtant iſt. Nach geraumer Zeit gab er eine Methode an, homogene Differentialgleichungen zu integriren, in den Petersb. Commentarien, 1726. Hier behandelt er umſtändlich die Gleichung $ax\partial y + \partial x \sqrt{(xx+yy)} = 0$, und dieſe. $x\partial y + \partial x\sqrt{(xx+yy)} = 0$, welche man in Paris um die Zeit, als Bernoulli ſich da aufhielt, noch nicht hatte integriren können. Auch mag bemerkt werden, daß Bernoulli aus gegebenen Reihen ungeſonderte Differentialgleichungen herleitete, in einem Briefe an Leibnitz vom Decemb. 1696. Im J. 1702. zeigte er in den Mém. de l'Acad. des Sc. die Integration der Formel $\frac{P\partial x}{Q}$, wo P und Q rationale Functionen von x ſind, deutlicher als es Leibnitz zu derſelben Zeit in den A. Er. that. Im Jahr 1719 lehrte er die Integrationen der Formeln, $z^{mq-1} : (e + fz^q + gz^{2q})$ und $z^{mq-1} : (e + fz^q + gz^{2q} + hz^{3q})$, die Taylor aufgegeben hatte, wo m ein poſitiver oder negativer Bruch iſt, deſſen Nenner eine

Potenz der 2 iſt. Zugleich zeigte er an, in welchen Fällen die Formel $x^m \partial x : (e + f x^q)^n$ integrirbar iſt, oder von der Integration einer einfachern Formel abhängt. In den geometriſchen und mechaniſchen Unterſuchungen hat B. noch manche ſcharfſinnige Anwendungen der Integralrechnung gemacht. Auf die von Newton ſo glücklich angefangene hohe Mechanik der Weltkörper hat er ſich aber nicht eingelaſſen, es ſey aus unrichtigen Vorſtellungen von der Phyſik des Weltſyſtems, oder aus Abneigung mit einem Geometer wie Newton hierin einen Wettſtreit einzugehen. Nur die umgekehrte Aufgabe der Centralkräfte löſete er allgemein auf. (Mém. de l'Ac. des Sc. 1710.). Newton hatte eigentlich nur bewieſen, was das Geſetz der Schwerkraft iſt, wenn der Körper ſich in einem Kegelſchnitte bewegt, und der Mittelpunct der Kraft in dem (einen) Brennpuncte iſt. Bey dem umgekehrten Satze hatte er angenommen, daß der Körper ſich nicht anders als in einem Kegelſchnitte bewegen könne, und nur die Gattung deſſelben geſucht.

Roger Cotes, der Erfinder eines geometriſchen Satzes, wodurch die Binomien $a^n - x^n$ und $a^n + x^n$ in einfache Factoren zerlegt werden, bemerkte, daß anſtatt der Quadratur der Hyperbel und der Ellipſe bey Integrationen beſſer Logarithmen und Kreisbogen gebraucht werden. Jenes Verfahren iſt wirklich zur Anwendung ganz unbrauchbar, und bringt nur eine Aufgabe auf eine andere. Es bleibt dabey ja noch die Frage, wie ein hyperboliſcher oder elliptiſcher Raum, der durch gewiſſe Coordinaten gegeben wird, durch das Quadrat einer gegebenen Linie ausgedruckt werden möge. Dazu dienen die Logarithmen und Winkel oder Kreisbogen, für welche Tafeln berechnet ſind, ſo daß man zu jedem Verhältniſſe oder jeder Zahl den zugehörigen Logarithmen oder umgekehrt, ſo wie zu jedem Winkel die zugehörigen trigonometriſchen (cyklometriſchen) Linien, oder dieſe aus jenen hinlänglich genau finden kann. Cotes hat den Weg zu der gegenwärtigen Form der Integralrechnung für die Fälle, wo das Integral von Logarithmen oder Winkeln abhängt,

gebahnt. Er machte ſeine Lehrſätze in den Schriften der Londoner Geſellſchaft 1714, Nro. 338, unter dem Titel: Logometria, bekannt. Es waren 18 Formen von Differentialen, worin der Differential-Factor eine Potenz von z enthält; zugleich mit einem Binomium $e + fz^\eta$ im Diviſor, oder der Quadratwurzel aus einem ſolchen Binomium, oder zweyerley Binomien, einem rationalen und einem quadratiſch irrationalen, auch zwey irrationalen, ferner mit einem Trinomium oder der Quadratwurzel daraus, auch mit einem Binomium verbunden. Bey der weitern Ausführung ward Cotes durch einen frühzeitigen Tod (1716) unterbrochen. Robert Smith, Profeſſor zu Cambridge vollendete nach Anleitung der von Cotes nachgelaſſenen Papiere das angefangene Werk, welches man als das erſte völligere über die Integralrechnung anzuſehen hat. Er gab es zugleich mit den von Cotes ſchon in den Transactionen darüber gelieferten Aufſätzen zu Cambridge 1722 heraus, unter dem Titel: Harmonia menſurarum, ſive Analyſis et Syntheſis per rationum et angulorum menſuras promotae, 250 S. in 4. nebſt einem Anhange kleiner Abhandlungen von Cotes. 126 S. Was hier menſurae heißen, ſind Logarithmen von Verhältniſſen mit ihrem Modulus, und Kreisbogen für zugehörige Winkel mit ihrem Halbmeſſer. Die Harmonie dieſer Maaße beruht darauf, daß Integrale, die nach dem einem dieſer Maaße unmögliche Größen ſind, nach dem andern möglich werden, ſo daß die analytiſche äußere Form dieſelbe bleibt. (S. Differentialformeln, III.). Cotes bezeichnete in den von ihm ſelbſt ausgearbeiteten Integralformeln beiderley Maaße auf einerley Art. Z. B. das Integral von $\dfrac{z^{\frac{1}{2}\eta - 1}\,\partial z}{e + fz^\eta}$ giebt Cotes an durch

$$\frac{2}{\eta e} R \left| \frac{R + T}{S} \right., \text{ wo } R = \sqrt{\frac{-e}{f}};\ T = z^{\frac{1}{2}\eta};$$

$S = \sqrt{\dfrac{e + fz^\eta}{f}}$ iſt. Bey der Berechnung wird aber

$R = \sqrt{\frac{e}{f}}$ genommen. Dieſe Formel bedeutet $\frac{2}{\eta e} \cdot \sqrt{\frac{e}{f}} \cdot \text{Ang. tang}\, z^{\frac{1}{2}\eta} \sqrt{\frac{f}{e}}$. Iſt $\frac{e}{f}$ negativ, ſo giebt Cotes das Integral ganz durch dieſelbe Formel an. Sie bedeutet aber nun $\frac{2}{\eta e} R \log.\,\text{nat.} \frac{R+T}{S}$, wo $S = \sqrt{\frac{fz^{\eta} - e}{f}}$ iſt. Man ſieht, daß die Bezeichnungsart noch unbequem und gezwungen iſt. Auch hat Smith ſie in dem von ihm allein ausgearbeiteten Werke geändert. Er bezeichnet den natürlichen Logarithmen eines Verhältniſſes m:n durch (m:n) mit Vorſetzung des Modulus; die Tangente eines Winkels PBO durch (PBO) mit Vorſetzung des Radius, indem der Winkel ſelbſt durch einen Kreisbogen mit dem Halbmeſſer als Einheit ausgedrückt wird. Er hat 94 Formen mit Einſchluß der darunter aufgenommenen 18 Formen, die Cotes ſchon bearbeitet hat. Dieſe bringt er auf 11 Claſſen verwandter Formen. Für jede Form iſt eine Tabelle berechnet, nach den verſchiedenen Werthen des Exponenten der veränderlichen Größe außer dem binomiſchen oder trinomiſchen Factor, mit einer Anweiſung die Tabelle zu erweitern. Das Werk iſt uns gegenwärtig noch brauchbar als ein Repertorium für viele, zum Theil verwickelte Integrale, wenn man nur die Bezeichnungen ändert Da nur einige Erläuterungen, aber keine Beweiſe beygefügt ſind, ſo hat Walmesley, ein engländiſcher Benedictiner, dem Werke eine neue Geſtalt durch die Entwickelung der Integrale gegeben. Dieſe Bearbeitung hat den Titel: Analyſe des meſures des rapports et des angles, ou reductions des Intégrales aux Logarithmes et aux arcs de cercle, par D. C. Walmesley, B. A. à Paris, 1753. S. 445 in 4. Die Tafeln für die Formen von Cotes ſind hierin enthalten. Auch hat W. die Theorie derjenigen Fälle beygefügt, wo die von Cotes gebrauchte

Methode die Integrale nicht gab. Die Rechnungen ſind noch nicht genug geſchmeidig, und die Bezeichnungsart noch unbequem, beſonders was die cyklometriſchen betrifft, inzwiſchen war ohne Zweifel das Werk zu ſeiner Zeit ſehr nützlich, und mag auch jetzt dienlich ſeyn, ſich daraus in ſchweren Fällen Raths zu erholen.

Cotes fand durch Hülfe ſeines analytiſch-geometriſchen Lehrſatzes die Integration der Differentialformel:

$$\frac{z^{\theta\eta+\frac{\delta}{\lambda}\eta-1}\partial z}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}$$, für den Fall, da der Nenner

ſich nicht in zwey binomiſche Factoren zerlegen läßt, wofern nur λ eine der Zahlen aus der Reihe 2, 4, 8, 16, etc. und δ eine ganze Zahl iſt. Die durch θ bezeichnete Zahl iſt eine ganze bejahte oder verneinte. Für $\lambda = 2$ und 4 ſind die Integrale in den Formen XXX und XXXII von Smith angegeben. Dieſe Integration ſchien in England wichtig genug, daß Taylor ſie allen Mathematikern außer England aufgab. Joh. Bernoulli leiſtete ſie in den Act. Erud. 1719, doch ohne die Theilung eines Winkels zu gebrauchen. Auch von Hermann erſchien in den A. Er. deſſelben Jahres eine Auflöſung, wozu in den Petersburger Commentarien T. VI. ein Nachtrag folgte. Die Einſchränkung der Auflöſung wegen der Form von λ hob Moivre durch ſeine Erweiterung des Coteſiſchen Lehrſatzes (Th. I. S. 564.), ſo daß der Exponent von z jede gebrochene Zahl ſeyn darf, in den Miſcellaneis analyticis, Londini 1730. L. I. Probl. V., L. III. Probl. XII. Zur Erläuterung diene folgendes. Wenn die Function $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}$ ſich in in zwey reale binomiſche Factoren auflöſen läßt, welches möglich iſt, wenn $ff > 4eg$ iſt, ſo läßt ſich der Differential-Factor in zwey Brüche zerlegen, die rational werden, wenn x^{λ} für z^{η} geſetzt wird. Läßt ſich aber jene Function nicht in zwey reale binomiſche zerlegen, ſo muß ſie in trinomiſche zerfällt werden Iſt λ eine Potenz der Zwey, und wird

x^{λ} ſtatt z^{ν} geſetzt, ſo läßt ſich die Function $e + fx^{\lambda} + gx^{2\lambda}$ in zwey trinomiſche Factoren von derſelben Form zerlegen, ſo daß die Exponenten von x Potenzen von 2 bleiben. Durch fortgeſetzte Zerlegung kommt man ſolchergeſtalt auf Factoren, wie $a \pm bx^2 + cx^4$, und die Integration des zufolge der gefundenen Factoren zerlegten Differentials wird nun möglich. Iſt aber λ eine andere Zahl als eine Potenz der Zwey, ſo bekommen die trinomiſchen Factoren eine andere Form als die vorgegebene. Hier war es, wo Cotes ſich aufgehalten fand. Man ſehe das von Walmesley angeführte Werk. S. 200. ff. Auch hat Thomas Simpſon in den Essays on several subjects in speculative and mix'd Mathematiks, (London, 1740. Nr. XIII.) eine Auflöſung für den Fall, da der Nenner des Differentialfactors nicht in zwey reale binomiſche Factoren zerlegbar iſt, gegeben, wobey der von Moivre erweiterte Coteſiſche Lehrſatz gebraucht iſt. Doch iſt dieſe Auflöſung weitläufig. In den engliſchen Transactionen, Nr. 417. iſt eine Auflöſung von Klingenſtierna, ohne Beweis, enthalten.

Die fernere Erzählung von dem Fortgange der Integralrechnung wird kürzer ſeyn müſſen, als die von ihrer anfänglichen Bearbeitung. Dieſe war gleichſam ein Beſuch bey den Quellen eines großen Fluſſes.

Taylor war ein ſehr ſcharfſinniger Analyſt, wenn gleich Joh. Bernoulli ihn aus Leidenſchaft wegen eines nationalen Zwiſtes zwiſchen ihnen herabzuſetzen ſucht. Der nach ihm genannte Lehrſatz iſt nicht allein ein vortreffliches Mittel zur Entwickelung einer veränderlichen Größe durch die ihr zugehörige, ſondern dient auch aus einer Differentialgleichung die eine der veränderlichen Größen durch die andere darzuſtellen, wenn gleich die Reihe nicht immer convergent ſeyn kann. In ſeiner Schrift, Methodus incrementorum. Londini 1715. giebt er S. 38. noch zwey Reihen für ein Integral, $\int y\,dx$ an, wenn y eine Function von x iſt, die auch mittelbar durch eine Differentialgleichung gegeben ſeyn mag. Es wird dazu eine

willkürliche Function w von x eingeführt, die ſo zu wählen iſt, daß die Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial w}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial w^2}$, etc. leicht zu finden ſeyn. Davon in dem Artikel: Integralformeln. In dem zweyten Abſchnitte jenes Buchs macht Taylor die Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf einige geometriſche und phyſiko mathematiſche wichtige Aufgaben Es iſt nur übel, daß das Werk durch die zu große Kürze und unbequeme Bezeichnungsart dunkel iſt.

In Italien ward die Integralrechnung mit Fleiß und glücklich bearbeitet. Gabriel Manfredi gab 1707 eine Schrift über die Conſtruction der Differentialgleichungen vom erſten Grade heraus, die wegen der Geſchicklichkeit in der Behandlung gerühmt wird. In den Abhandlungen des Bononiſchen Inſtituts und in Zeitſchriften ſind von ihm gute Aufſätze enthalten. Der Conte Giacomo Riccati und ſein Sohn Vincent haben über die Integralrechnung viele tiefſinnige Abhandlungen geliefert. Der erſtere gerieth auf eine Differentialgleichung vom erſten Grade, zwiſchen zwey veränderlichen Größen, eine dem Anſehen nach ſehr einfache, die er nicht allgemein auflöſen konnte, und ſie daher den Analyſten in den Act. Er. 1722. T. VIII. supplem. vorlegte. Sie hat daher von ihm ihren Namen erhalten. Jakob Bernoulli hatte ſchon einige beſondere Fälle derſelben aufgelöſet. Drey Bernoulli, Nikolaus und Daniel (Söhne von Johannes) und Nikolaus der Neffe, und Goldbach haben ſich damit nach verſchiedenen Methoden beſchäftigt. Die Gleichung iſt dieſe: $\partial y + yy\partial x = ax^m \partial x$. Für eine gewiſſe Form des Exponenten m laſſen ſich die veränderlichen Größen von einander ſondern, wodurch die Aufgabe auf die Integration einer Differentialformel gebracht wird. Boſſut vergleicht die Riccatiſche Gleichung mit der Quadratur des Kreiſes in der Geometrie. Wenn eine Aufgabe auf die Auflöſung derſelben gebracht iſt, ſo wird ſie als aufgelöſet angeſehen.

Unter den italieniſchen Mathematikern in der erſten Hälfte des 18ten Jahrhunderts zeichnete ſich auch der Conte Fagnano durch manche Unterſuchungen höherer Art ſeit etwa 1720 aus, insbeſondere durch die Beſtimmung elliptiſcher oder hyperboliſcher Bogen, deren Unterſchied eine algebraiſche Größe iſt. Leibnitz und Johann Bernoulli, die daſſelbe verſucht hatten, urtheilten, daß die neue Rechnung nicht darauf anwendbar ſey. Euler hat in der Folge dieſe Aufgabe auf eine viel allgemeinere Art nach einer andern Methode behandelt. (Comm. Ac. Petr. T. VIII.) Mit der Curve, die man Lemniscata nennt, beſchäftigte ſich Fagnano ſo viel, daß er ſie vor der Sammlung ſeiner Werke (Produzioni matematiche, in Pesaro, 1750. 2 Voll. in 4.) auf dem Titel abbilden ließ.

Maclaurin lehrt in ſeinem Werke über die Fluxionen (Edinburg 1742) viele Anwendungen der Integralrechnung auf geometriſche und mechaniſche Aufgaben, die aber mehr in Abſicht auf die Gegenſtände und die Kunſt der Behandlung, als für die Rechnung ſelbſt wichtig ſeyn möchten. Dieſe iſt auch gegenwärtig in der Form bequemer eingerichtet, da ſie von der ehemaligen Lehnsverbindung mit der Geometrie befreyt iſt. Unter den Artikeln, welche von der Integralrechnung ſelbſt handeln, wird derjenige am merkwürdigſten ſeyn, worin gezeigt wird, welche Integrale ſich auf die Rectification eines hyperboliſchen und elliptiſchen Bogens mit einander verbunden bringen laſſen. Man vergleiche mit Maclaurins geometriſch-ſynthetiſcher Methode die rein analytiſche von d'Alembert in den Mém. de l'Acad. de Berlin, 1746 u. 1748. Vincent Riccati hat ſich ſehr umſtändlich mit der Integration der Differentialformel $\frac{\partial x \sqrt{(f + gxx)}}{\sqrt{(a + bxx)}}$ beſchäftigt. Das Integral iſt in einigen Fällen ein Bogen einer Ellipſe, in andern einer Hyperbel, in andern eines Aggregats von beiden, oder iſt keiner dieſer Formen fähig. (Vinc. Riccati, S. I. Opuscula. Luccae 1757. 1772.

tomi 2.). Landen hat in ſeinen Mathematical Lucubrations, London 1755. einige hieher gehörige merkwürdige Integrale ohne Beweis mitgetheilt. Die Reduction eines Integrals auf Bogen einer Curve iſt freylich nur der Aufgabe eine ſolche Geſtalt geben, wodurch die Auflöſung faßlicher wird.

Die Integration der Differentialformeln bedurfte noch mancher Verbeſſerungen und Erweiterungen. Dieſe erhielt ſie vornämlich, ja faſt gänzlich, durch Euler, deſſen unerſchöpflich fruchtbarem Geiſte die ganze Analyſis einen großen Theil ihres Reichthums, und faſt ganz ihre gegenwärtige Geſtalt zu danken hat. Er kündigte ſich ſchon im 20ſten Jahre ſeines Alters (1727) durch eine ſchöne Auflöſung der Aufgabe von den reciproken Trajectorien an, woraus Joh. Bernoulli, ſein Lehrer, die künftige Größe ſeines Zöglings vorher ſagte. In dem folgenden Jahre zeigte er eine neue und allgemeine Methode an, ganze Claſſen von Differentialgleichungen des zweyten Grades, mit Vorausſetzung gewiſſer Bedingungen, zu integriren. Nicht allein in einer langen Reihe von Jahren (er ſtarb 1783) ſondern auch noch gegenwärtig nach ſeinem Tode durch ſeine zahlreichen hinterlaſſenen Abhandlungen hat Euler die Analyſis theils durch neue Unterſuchungen erweitert, theils den nach ihm gekommenen ihm am Geiſt ähnlichen Geometern die Wege eröffnet, theils die von andern gefundenen Methoden verbeſſert, erleichtert, und ſowohl allgemeiner als zur Anwendung geſchmeidiger gemacht. Die Anwendungen analytiſcher Rechnungen, welche Euler auf die ſchwerſten Fragen in der mathematiſchen Phyſik und der phyſiſchen Aſtronomie insbeſondere machte, ſind alle zugleich Erweiterungen der Analyſis ſelbſt. Denn das Phyſikaliſche macht hier nur die Bedingungen der Aufgabe aus, und ſobald dieſe auf irgend eine Art durch Gleichungen ausgedruckt ſind, geht die ganze Bearbeitung in das Gebiet der reinen Analyſis über. Dadurch werden die Fortſchritte in der höhern mathematiſchen Phyſik zugleich Erweiterungen jener, und die Schwierigkeiten,

die in jener zu löſen ſind, werden Veranlaſſungen zu neuen analytiſchen Aufgaben.

Euler hat alle ſeine Unterſuchungen über die Integralrechnung bis gegen das Jahr 1770 ſelbſt geſammelt, und in Verbindung mit den von andern Analyſten gefundenen Methoden ſyſtematiſch bearbeitet, in einem großen Werke, Institutiones Calculi Integralis, Petropoli 1768-1770, 3 vol. in 4. Nach ſeinem Tode iſt eine neue Ausgabe dieſes Werks mit Verbeſſerungen, aber mit derſelben Anzahl der Paragraphen, herausgekommen, und mit einem vierten Bande vermehrt. Dieſer enthält die zur Integralrechnung gehörigen Abhandlungen von Euler, welche theils noch nach der erſten Ausgabe jenes Werks in die Schriften der Petersburger Akademie der Wiſſenſchaften eingerückt ſind, theils handſchriftlich vorhanden waren, in allem 27 Abhandlungen. Die neue Ausgabe iſt von den Jahren 1792-1794. Das Verzeichniß aller Werke und einzelnen Abhandlungen Eulers findet man hinter der ſchönen Gedächtnißrede von Fuß, Petersburg, 1783.

Die Integration der Differentialgleichungen iſt hauptſächlich von den Geometern des Continents betrieben worden. Leibnitz und die beiden Bernoulli hatten die Wege eröffnet. Goldbach, Hermann und Nicolaus Bernoulli, fanden die Integrationen verſchiedener vieltheiliger Differentialgleichungen, die bis dahin noch nicht verſucht waren. Ihre Aufſätze findet man in den erſten Bänden der ältern Petersburger Commentarien. Unter den ältern franzöſiſchen Analyſten beſchäftigten ſich Carré, Nicole nnd Saurin mehr mit Anwendungen der Integralrechnung, als daß ſie dieſelbe erweitert hätten. Clairaut und Fontaine fanden die Bedingungen der Integrabilität für Gleichungen vom erſten Grade, wiewohl Euler ſie noch etwas früher ſchon angewandt hat, wovon im I Th. S. 885 ff. gehandelt iſt. Von einer allgemeinern, die Euler gefunden hat, ſ. Th. I. S. 905.

Clairaut gab in dem Memoire von 1740, wo er von den Bedingungsgleichungen handelt, einige Regeln

zur Entdeckung des ſchicklichen Factors, die aber gar nicht allgemein, und dabey ſehr unbequem in der Anwendung ſind. In Eulers Werke über die Integralrechnung iſt ſowohl für Gleichungen vom erſten Grade als von höhern hierin vieles geleiſtet. Er hat die Methode ſehr vervollkommnet, ſo daß la Croix ſie ihm auch zuſchreibt. Am Ende jenes Werks zeigt Euler noch in einem Anhange, wie vorzüglich die Methode vermittelſt Multiplicatoren zu integriren ſey. Uebrigens iſt Clairauts Werk über die Geſtalt der Erde (Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'Hydrostatique, 1743) wegen der dabey angewandten Integralrechnung auch für dieſe wichtig, und zum Theil ein Commentar über Maclaurins ſynthetiſche Darſtellung. Seine Theorie der gegenſeitigen Störungen der Planeten und der Ungleichheiten des Mondslaufes gehören beide zu den erſten genauen Auflöſungen der ſchwerſten Aufgabe aus der analytiſchen Mechanik. Es verdient noch angeführt zu werden, daß Clairaut Differentialgleichungen des erſten Grades in einigen Fällen mittelſt einer zweyten Differentiation integrirt hat, wenn das Differential des Quotienten $\frac{dy}{dx}$ (= p) aus der zweyten Differentialgleichung durch Diviſion herausgeht, ſo daß man eine Gleichung für p erhält, welche mit der vorgegebenen verbunden wird, um p wegzuſchaffen, worauf eine endliche Gleichung zwiſchen den veränderlichen Größen allein erhalten wird. Euler hat dieſes in der Folge mehr auseinander geſetzt.

D'Alembert hat in ſeinen vielen Schriften über Dynamik und phyſiſche Aſtronomie aus dem Innerſten der Analyſis die Hülfsmittel zu den feinſten Unterſuchungen geholt. Sehr häufig fand er neue Wege zur Integration verwickelter Differentialgleichungen. Auch hat man ihm die Einführung einer neuen Art zu integriren zu danken, die nicht allein in der abſtracten Rechnung, ſondern auch in der höhern mathematiſchen Phyſik von der größten Wichtigkeit iſt, die Integration der Gleichungen mit partiellen

Differentialen. Euler war freylich ſchon daraufgerathen, in einer Abhandlung in dem 7ten Theile der Petersburger Commentarien für 1734. T. VII. und hatte auch bey ſeiner ganz allgemeinen Auflöſung der Aufgabe vou der curva synchrona (Mechanicae T. II. §. 106.) davon Gebrauch gemacht, allein er vernachläſſigte gleichſam dieſe neue Anſicht von allgemeinen Auflöſungen, bis daß d'Alembert in ſeiner Schrift: sur la cause générale des vents 1747. und in den Unterſuchungen über ſchwingende Saiten ſie benutzte, welches er noch mehr in der Schrift über den Widerſtand flüſſiger Mittel that. Nun ſah Euler ein, daß die Auflöſungen verſchiedener Aufgaben, die er für allgemein g halten hatte, es noch nicht waren. Er bemächtigte ſich nun gleichſam ſeines Eigenthums wieder, und gab der neuen Methode eine beſſere und einfachere Form, als in welcher d'Alembert ſie eingeführt hatte, und in dieſer verbeſſerten Geſtalt wird ſie von allen Analyſten gebraucht. Euler hat ihr ven ganzen dritten Theil ſeines Werks über die Integralrechnung gewidmet. Vorher hatte er ſchon in einer wichtigen Abhandlung: Investigatio functionum ex data differentialium conditione, (Novi Comm. Acad. Petrop. T. IX. a. a. 1762.) dieſe Methode von Grund aus entwickelt, und den Algorithmus derſelben angegeben.

Die Integrirung der Gleichungen mit partiellen Differentialen veranlaßte eine Unterſuchung, über welche die größten Analyſten ſich nicht ganz vereinigten. Sie betraf die Beſchaffenheit der willkürlichen Functionen, welche in die Integralgleichung einzuführen ſind, wie die conſtanten Größen in den gewöhnlichen zwiſchen zwey veränderlichen Größen. D'Alembert behauptete, daß die willkürlichen Functionen dem Geſetze der Stetigkeit unterworfen bleiben müßten, daß ſie durch irgend eine Curve dargeſtellt werden könnten, daß dieſe aber einen ſtetigen Zug haben müſſe, ſo daß ſie ganz durch eine und dieſelbe Gleichung zwiſchen ihren Coordinaten ausgedruckt würde. Euler hingegen behauptete, daß jene Functionen auch unſtetige (discontinuae) ſeyn dürften, oder daß die abbil=

dende Curve auch eine geſetzloſe, wie eine aus freyer Hand gezogene ſeyn möchte. Den Schriftwechſel darüber zwiſchen beiden findet man in den Berliner und Petersburger Abhandlungen, und in den Opuscules von d'Alembert. La Grange trat (Miscell. Taurinensia, T. I. II.) zuerſt Eulern ganz bey, ſchränkte aber in der Folge die Geſetzloſigkeit etwas ein. Condorcet gab ſie auch nur mit gewiſſen Einſchränkungen zu. Die Curve möchte aus Portionen von verſchiedener Form beſtehen, dieſe ſollten aber zuſammenhängen, und bey Gleichungen vom zweyten Grade an ihren Endpuncten eine gemeinſchaftliche Berührende haben. (Mém. de Paris, 1772). La Place gab zu, daß bey der Aufgabe von ſchwingenden Saiten, wobey die Frage entſtanden war, die unſtetigen Functionen Statt haben könnten, und ſchränkte überhaupt die Zuläſſigkeit derſelben nur auf gewiſſe Weiſe ein. (Mém. de Paris, 1779). Arbogaſt vertheidigte in der Preisſchrift, die von der Petersburger Akademie 1790 gekrönt ward, Eulers Behauptung.

Integrationen einzelner Differentialgleichungen von d'Alembert findet man in den Mém. de l'Acad. de Berlin 1746, 1748, 1750, und in der Sammlung ſeiner Opuscules. Von jenen iſt ſchon vorher etwas angeführt. Eben daſelbſt (1748) zeigt er, wie Differentialgleichungen integrirt werden, worin außer dem Differentialquotienten $dx : dy$ nur x und y in der erſten Potenz vorkommen, wie $x = y\varphi z + \varphi' z$, wo $z = \frac{dx}{dy}$ iſt, und φ, φ' Functionszeichen ſind. Noch daſelbſt, wie ein Syſtem von zwey Gleichungen,

$$\partial x + (Cx + Dy)\,\partial t = o,$$
$$\partial x + (Kx + Ly)\,\partial t = o,$$

oder ein Syſtem von noch mehrern ſolchen, worin mehrere veränderliche Größen enthalten ſind, integrirt werden kann. Er iſt darauf durch ſeine Unterſuchungen über die Urſachen der Winde, und den Widerſtand flüſſiger Mittel

geleitet. Montücla ſchreibt ihm auch eine Methode zu, die Gleichung,
$AXy^n dy + By^{n+1} X' \partial x + Cy^q X'' dx = o$, zu integriren (Hist. des Mathém. T. III. p. 177.) Es ſind hier X, X', X'' Functionen von x, und A, B, C, unveränderliche Größen. Die Methode findet man in Bougainville's Traité du Calcul intégral, T. II. Ch. 7. Man vergleiche die Auflöſung der Gleichung,

$$\partial y + P y \partial x = Q y^{n+1} \partial x,$$

in Eulers Integralrechnung, T. I. §. 429. Hier ſind P und Q Functionen von x. In den genannten Memoiren iſt eine Methode von Alembert, Gleichungen von höhern Graden, wie

$$\partial^n y + a \partial^{n-1} y \partial x + b \partial^{n-2} y \partial x^2 \ldots + X \partial x^n = o,$$

zu integriren. Euler hatte ſchon in dem 7ten Bande der Miscell. Berol. 1743. die Gleichung, $o = Ay + \frac{B \partial y}{\partial x} + \frac{C \partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{D \partial^3 y}{\partial x^3} +$ etc, aufgelöſet, wo das Glied X, eine Function von x, noch fehlte. Hernach aber hat er dieſe Einſchränkung beſeitigt, und in den neuen Petersb. Commentarien gezeigt, wie eine ſolche Gleichung allgemein, ohne daß X = o iſt, integrirt wird. Man ſehe auch die Institt. Calc. integr. T. II. Cap. 2 et 3. La Grange hat in den Mém. de Berlin 1772 ſogar die Bedingungen gefunden, unter welchen eine ſolche Gleichung ſelbſt bey veränderlichen Coefficienten integrirbar iſt.

Der Staatsrath Fuß in Petersburg, Eulers Zögling und arbeitſamer Gehülfe in den vielen Jahren ſeiner Blindheit, hat in den Schriften der dortigen Akademie der Wiſſenſchaften viele wichtige Abhandlungen zur höhern Analyſis des Unendlichen geliefert.

Die beiden erſten Analyſten unſerer Zeit, la Grange und la Place, haben ſowohl durch ihre Unterſuchungen über die Integralrechnung unmittelbar, als durch die höchſt feinen Rechnungen in der phyſiſchen Aſtronomie

mehr geleiſtet als man vor einiger Zeit noch vielleicht nicht erwarten durfte. Ich muß es dem künftigen Verfaſſer einer ausführlichern Geſchichte der Integralrechnung, als in dieſem Artikel möglich war, überlaſſen, die Verdienſte dieſer beiden Analyſten würdig darzuſtellen. Aus dem unten anzuzeigenden Werke von la Croix, über Differential- und Integralrechnung, kann man ſich von ihren Erweiterungen der höhern Analyſis am vollſtändigſten und bequemſten unterrichten. Das Regiſter liefert eine ſehr gute Ueberſicht derſelben. In Abſicht auf die phyſiſche Aſtronomie findet man ihre wichtigſten Unterſuchungen ziemlich ausführlich angezeigt in dem vierten Theile der Geſchichte der Mathematik von Montücla, die durch La Lande vollendet iſt.

La Grange iſt der Erfinder einer neuen und ſehr verbeſſerten Methode die Veränderungen in der Relation zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen zu betrachten. Zwey veränderliche Größen x und y haben irgend eine Relation, wodurch für jedes x die zugehörige y beſtimmt wird. Giebt man allen y oder einigen y Werthe, die unendlich wenig von den durch jene Relation beſtimmten Werthen verſchieden ſind, ſo ſind die Unterſchiede der Werthe das, was Variationen heißen. Die ganze Unterſuchung von der Erfindung einer Function, welcher eine gewiſſe Eigenſchaft im größten oder kleinſten Maaße zukommt, beruht auf dieſer Methode. Die beiden Bernoulli hatten Fragen dieſer Art aufgelöſet, aber nicht ſowohl nach einer ſichern Methode, als durch eine ſehr ſcharfſinnige Bemerkung des Eigenthümlichen der Frage, worauf ſie ſehr künſtlich die Auflöſung gründeten. Euler hatte in ſeiner vortrefflichen Schrift über das iſoperimetriſche Problem im allgemeinſten genommen, 1744, viel geleiſtet, aber die Methode noch zu ſehr an die Geometrie gebunden. La Grange gab ſeinen erſten Entwurf in den Abhandlungen der Turiner Geſellſchaft für 1760 und 1761. Euler erkannte die Vorzüge dieſer ganz analytiſchen Methode, und ſetzte ſie mit mehrerer Deutlichkeit auseinander, gab ihr auch den Namen, Calculus variationum, in den Petersburger Commentarien für 1766. Eine ausführliche

Behandlung derſelben iſt in dem dritten Theile ſeiner Integralrechnung befindlich. Aus dem 16ten Bande der Petersburger Schriften für 1772 iſt in den Supplementen eine Abhandlung darüber beygefügt.

Noch eine Nachricht von einigen allgemeinen, aber nur vorgeſchlagenen, Integrations-Methoden.

Hermann lehrt eine gewiſſe Methode für alle Differentialgleichungen, (Comm. vet. Acad. Petrop. T. I.), und wendet ſie auch auf leichte Fälle an; allein ſie erfordert zu vieles Herumſuchen, und iſt auch nicht allgemein hinreichend, daher auch nicht weiter befolgt.

Mit den beiden von Fontaine angegebenen Methoden iſt es eben ſo gegangen. Man hat ſie gerühmt, und ſich ihrer nicht bedient.

Condorcet hat in ſeinem Werke über die Integralrechnung (1765) den Abriß einer allgemeinen Integrations-Methode, für jeden Grad der Gleichung und jede Anzahl veränderlicher Größen, geliefert. In dem Dictionnaire encyclopédique iſt dieſer Abriß auch mitgetheilt. Er verlangt gewiſſe Hülfstafeln, wozu er den Entwurf giebt. Aber niemand hat es gewagt, ſich auf dieſe Arbeit einzulaſſen. Die Methode ſcheint mehr wegen des dadurch gezeigten Scharfſinns gerühmt, als für ausführbar erkannt zu ſeyn.

Der Freyherr von Pacaſſi hat in einer Abhandlung über eine neue Methode zu integriren, Wien 1785, und in einem Aufſatze, der in die phyſikaliſchen Arbeiten der einträchtigen Freunde zu Wien, 2ter Jahrg. 1786, eingerückt iſt, eine allgemeine Integrationsmethode angeben wollen, wovon in Lamberts gelehrten Briefwechſel, Bd. V. S. 344. ff, eine von L. Oberreit verfaßte Nachricht und Beurtheilung zu finden iſt.

Einige Annäherungs-Methoden, das $\int X \partial x$ durch einzelne berechnete Werthe von X zu finden, lehrten Newton in der Methodus differentialis; Thomas Simpſon in Mathematical diſſertations, 1743; Lambert in ſeinen Beyträgen zum Gebrauch der Mathematik, Th. II. Nro. IX.

Verzeichniß einiger Werke zur Integralrechnung.

D'Alembert ſchlägt in dem von ihm herrührenden ganz kurzen Artikel, Integral, in dem Dictionn. encyclopédique, folgende Werke zum Nachleſen vor, etwa in der Ordnung, wie ſie genannt ſind. Zuerſt die Lectiones von Joh. Bernoulli, die ſchon oben von mir empfohlen ſind. Nach dieſen der zweyte Theil von Maclaurins treatiſe on fluxions, wovon eine franzöſiſche Ueberſetzung vorhanden iſt. Ferner die Abhandlung von Newton de quadratura curvarum, und das Werk von Cotes: Harmonia menſurarum, wozu man in den Act. Er. 1718, 1719, und in den Petersb. Comment. T. VI. gute Erläuterungen finde, mehr in dem auch ſchon angeführten Werke von Walmesley. Insbeſondere empfiehlt er den Traité du Calcul intégral par de Bougainville, le jeune, à Paris 1754, 1756 2 Voll. in 4. Der zweyte Theil dieſes Werks, der von den Differentialgleichungen handelt, ſcheint mir ſehr gut abgefaßt zu ſeyn, und das beſte, was bis dahin über die Integration derſelben bekannt war, zu enthalten. Der erſte Theil, von den Differentialformeln, möchte hin und wieder kürzer und netter ſeyn können. Montücla rühmt auch das Werk wegen der guten Methode und der Klarheit des Vortrages.

Die PP. Leſueur und Jacquier, aus dem franzöſiſchen Hauſe der Minimen zu Rom, gaben 1768. zu Parma in zwey Quartbänden heraus: Elémens du calcul intégral, welche Montücla auch wegen der Ordnung und Deutlichkeit rühmt. Einige neue Theorien, die um die Zeit der Ausgabe dieſes Werks nur erſt waren gegründet worden, ſind darin ſchon aufgenommen. Von dem Werke iſt eine neue Auflage 1782 zu Parma und Leipzig (bey Weidmanns Erben und Reich) erſchienen.

Von Eulers großem Werke über die Integralrechnung iſt ſchon oben Nachricht gegeben. Die Deutlichkeit des Vortrages dieſer ſchweren und weitläuftigen Wiſſenſchaft iſt ein merkwürdiger und auszeichnender Vorzug dieſes Werks.

Den gegenwärtigen Zuſtand der Integralrechnung nach den Methoden und Erweiterungen durch die franzöſiſchen Analyſten lernt man aus folgenden Werken kennen.

Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral, par J. A. J. Cousin, à Paris, l'an IV. 1796. 2 voll. in 4. 320 u. 284 S. Die erſte Ausgabe erſchien im Jahr 1777 in zwey Octavbänden. Man verbinde damit zur Anwendung der allgemeinen Rechnung die Introduction à l'étude de l'Astronomie physique desſelben Verfaſſers, à Paris 1787. in 4. 324 S.

Traité du calcul différentiel et du calcul intégral par *S. F. la Croix*, à Paris, An. V. = 1797. VI. = 1798. 2 voll. in 4. 520 u. 732 S. Damit iſt verbunden Traité des différences et des séries, à Paris, An VIII. = 1800. in 4. 578 S. Die Nummern der Paragraphen laufen aus jenem Werke in dieſes fort. Ein ausführliches Real-Regiſter von 34 Seiten erleichtert den Gebrauch dieſes Werkes gar ſehr.

Traités du Calcul différentiel et du Calcul intégral par Charles Bossut, à Paris An VI. 2 Tom. in 8. 600 und 562 S. So ſchätzbar auch das Werk durch manches dem Verfaſſer Eigene iſt, ſo ſieht man doch auch, daß er ſich mehr nach ältern Analyſten gebildet hat. Daher findet man auch in Abſicht auf die Integrationsmethoden nicht die Allgemeinheit und Vollſtändigkeit bey ihm, wie bey la Croix, dem er überhaupt an philoſophiſcher Behandlungsart nachſteht.

In Deutſchland fehlt es zwar nicht an guten Lehrbüchern über die Integralrechnung, allein wir beſitzen noch kein ausführliches Syſtem, das dem jetzigen Zuſtande der Wiſſenſchaft angemeſſen wäre. Die Leichtigkeit, womit wir uns ausländiſcher Werke bedienen, iſt vielleicht Schuld daran. Käſtners Analyſis des Unendlichen kam zuerſt 1761 heraus. Die neuern Theorien konnten in den folgenden Ausgaben nur kurz eingeſchaltet werden. Um dieſelbe Zeit (1760) kam Karſtens erſtes Lehrbuch der Mathematik, Mathesis theoretica elementaris et subli-

nior, 1760. heraus, worin die Euleriſchen Schriften ſehr gut benutzt ſind, und die Integralrechnung einen beträchtlichen Theil einnimmt. Segner hat in ſeinem Curſu mathematico nur den Anfang zur Integralrechnung in dem 5ten und letzten Bande geliefert. Zum erſten Unterricht iſt zu empfehlen: Pasquichs mathematiſche Analyſis, zweyter Band, Leipzig 1791, und zur weitern Ausbildung, deſſelben Verfaſſers: Elementa Analyſeos et Geometriae ſublimioris, ex evidentiſſimis notionibus principiiſque deducta, Lipſiae 1799, 4, wozu als zweyter Band eine Sammlung von ſtatiſch-mechaniſchen Abhandlungen gehört.

Integralformel iſt die Function einer einzigen veränderlichen Größe, die durch die Integration einer Differentialformel entſtanden iſt. Wenn nämlich der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ eine Function von x allein, $= X$ iſt, ſo iſt $X \partial x$ eine Differentialformel, und diejenige Function von x, welche dem Werthe von y gleich iſt, iſt die Integralformel, welche ſich auf jene Differentialformel bezieht, oder auch, wie man gewöhnlich es ausdrückt, das Integral von $X \partial x$. Man bezeichnet ſie ſo: $y = \int X \partial x$.

Die Function X iſt entweder eine algebraiſche oder transſcendente. Die algebraiſchen Functionen ſind entweder rationale oder irrationale. Die rationalen Functionen ſind entweder ganze oder gebrochne. Die transſcendenten ſind ſolche, die Logarithmen oder Exponentialgrößen, oder Winkel und trigonometriſche Functionen enthalten. Zufolge dieſer Eintheilung der Functionen wird auch die Eintheilung der Differentialformeln mit ihren Integralformeln am bequemſten gemacht.

Durch ſchickliche Subſtitutionen kann man dem Differentialfactor oft eine bequemere Form geben. Z. B. in dem Differential $\frac{a \partial x}{bb - xx}$ ſetze man $x = \frac{z - 1}{z + 1} b$, ſo

verwandelt es ſich in $\frac{a\partial z}{2bz}$. Ferner in dem Differential $\frac{\partial x}{\sqrt{(x+bbxx)}}$ ſetze man $x = \frac{1}{zz-bb}$, ſo entſteht daraus $\frac{2\partial z}{bb-zz}$. Oder es ſey $\partial y = \frac{\partial x}{x\sqrt{(ax-xx)}}$, ſo ſetze man $ax-xx = \frac{aaxx}{uu}$ und es iſt $dy = \frac{2\partial u}{uu}$. Noch ſey $\partial y = \frac{x\partial x\sqrt{(aa-xx)}}{\sqrt{(aa+xx)}}$, und $aa+xx = uu$, ſo iſt $\partial y = \partial u\sqrt{(2aa-uu)}$.

Unter den Integralformeln hat man ſich beſonders diejenigen zu merken, durch deren Hülfe andere mehr zuſammengeſetzte gefunden werden. Ein Integral iſt häufig aus mehrern Integralen zuſammen geſetzt, ſo daß man es ſtückweiſe findet, zuerſt einen Theil P nebſt einem Theile Q, der ein noch nicht entwickeltes Integral iſt, woran blos durch das Zeichen $\int$ die damit vorzunehmende Operation bezeichnet wird. Dieſes involutoriſche Integral, wie man es nennen mag, enthalte wiederum zwey Theile, Q' und R, von welchen R auf gleiche Weiſe in zwey Theile R' und S zerfalle, und ſo ferner, bis man auf eine Elementarformel kommt, die entweder ein algebraiſches Integral giebt, oder auf logarithmiſche oder circulare Functionen führt, welche man durch die berechneten Tafeln hinlänglich genau finden kann, oder die eine transſcendente Function anderer Art anzeigt, bey welcher weiter keine Reduction auf jene Functionen ſich entdecken läßt.

Den Gang dieſer Entwicklung kann man folgendergeſtalt darſtellen. Es ſeyn X und Z Functionen von x, und $\partial y = Z\partial X$, ſo iſt $y = ZX - \int X\partial Z$. Setzt man $X\partial Z = Z'\partial X'$, indem man das Differential $X\partial Z$ in zwey andere Factoren zerlegt, von welchen $\partial X'$ das Differential ∂x enthält, ſo iſt $\int Z'\partial X' = Z'X' - \int X'\partial Z'$,

und es iſt $y = ZX - Z'X' + \int X' \partial Z'$. Auf die gezeigte Art wird mit der Zerlegung fortgefahren.

I. Claſſe, in welcher der Differentialfactor eine rationale Function von x iſt.

1. $\partial y = x^m \partial x$.

$$y = \frac{1}{m+1} x^{m+1} + \text{Const.}$$

Aus Differentialformeln (1.). Die Function gilt für jede Beſchaffenheit von m. Eine Potenz mit einem gebrochenen Exponenten braucht bey einer eintheiligen formloſen Größe nicht als irrational angeſehen zu werden, da x ſelbſt nicht nothwendig eine rationale Größe iſt.

Beyſpiele.

$$\int x^3 \partial x = \tfrac{1}{4} x^4 + C; \quad \int x^{-3} \partial x = C - \tfrac{1}{2} x^{-2}.$$
$$\int x^{\frac{3}{2}} \partial x = \tfrac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C; \quad \int x^{-\frac{3}{2}} \partial x = C - 2x^{-\frac{1}{2}}.$$

2. $\partial y = (a x^\alpha + b x^\beta + c x^\gamma + \text{etc.})\, \partial x$.

$$y = C + \frac{1}{\alpha+1} a x^{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} b x^{\beta+1} + \frac{1}{\gamma+1} c x^{\gamma+1} + \text{etc.}$$

3. $\partial y = \frac{\partial x}{x}$.

$$y = \text{log. nat. } \frac{x}{\text{const.}}.$$

(Aus Diff. Formeln 14.). Die Conſtans eines logarithmiſchen Integrals wird am bequemſten als ein Logarithmus angenommen, deſſen Zahl ein Multiplicator oder Diviſor der zu dem veränderlichen Logarithmen gehörigen Größe iſt. Wenn in dem obigen Integral x eine Linie oder ſonſt eine benannte Größe iſt, ſo iſt dazu als Conſtante im Nenner eine Größe derſelben Art zu ſetzen, da

Logarithmen ſich immer auf abſolute Zahlen beziehen. In Integralformeln werden immer die natürlichen Logarithmen verſtanden, wenn es auch nicht ausdrücklich bemerkt wird.

4. $\partial y = (a + b x^n)^m x^{n-1} \partial x.$

$$y = \frac{1}{n(m+1)b}(a + b x^n)^{m+1} + C.$$

Die Formel gilt auch für negative und gebrochne Exponenten, ſ. Differential=Formeln (8.).

5. $\partial y = \frac{\partial x}{a + b x}.$

$$y = \frac{1}{b} \log. \frac{a + bx}{\text{conſt.}}.$$

6. $\partial y = \frac{\partial x}{x(a + b x)}.$

$$y = \frac{1}{a} \log. \frac{x}{a + b x} + C.$$

Das Integral in (5.) aus (3.) durch Subſtitution, $a + b x = u$. Das Integral in (6.) durch Zerlegung in die Brüche $\frac{\partial x}{a x} - \frac{b \partial x}{a(a + b x)}$.

7. Das $\int \frac{x^m \partial x}{a + b x}$ wird gefunden, wenn x^m durch $b x + a$ dividirt wird, bis zu dem Reſte, der kein x enthält. Die Theile des Quotienten von der Potenz x^{m-1} an bis zu x geben Integrale wie in (2.), die Ergänzung des Quotienten giebt ein Integral wie in (5.).

Das $\int \frac{dx}{x^m (a + b x)}$ zu finden, dividire man x^{-m} durch $a + b x$ bis zu dem Reſte, der x^{-1} enthält, ſo geben die entwickelten Theile des Quotienten Integrale wie in (2.), die Ergänzung ein Integral, wie in (6.).

8. I. $\partial y = \frac{\partial x}{(a+x)(b+x)}$.

$$y = \frac{1}{b-a} \log. \frac{a+x}{b+x} = \frac{1}{a-b} \log. \frac{b+x}{a+x}.$$

Durch Zerfällung des Differentialfactors in die beiden Brüche, $\frac{1}{(b-a)(a+x)} - \frac{1}{(b-a)(b+x)}$.

II. $\partial y = \frac{\partial x}{(a+x)(b-x)}$.

$$y = \frac{1}{a+b} \log. \frac{a+x}{b-x}.$$

Die Conſtante iſt noch beyzufügen.

9. $\int \frac{\partial x}{xx - aa} = \frac{1}{2a} \log. \frac{x-a}{x+a} + C.$

10. $\int \frac{x\partial x}{xx - aa} = \frac{1}{2} \log. \frac{xx - aa}{\text{conſt.}}$.

11. $\int \frac{\partial x}{x(xx - aa)} = \frac{1}{2aa} \log. \frac{xx - aa}{xx} + C.$

12. $\int \frac{\partial x}{aa - xx} = \frac{1}{2a} \log. \frac{a+x}{a-x} + C.$

13. $\int \frac{x\partial x}{aa - xx} = \frac{1}{2} \log. \frac{\text{conſt.}}{aa - xx}$.

14. $\int \frac{\partial x}{x(aa - xx)} = \frac{1}{2aa} \log. \frac{xx}{aa - xx} + C.$

15. $\int \frac{\partial x}{aa + xx} = \frac{1}{a} \text{Ang. tang} \frac{x}{a} + C.$

16. $\int \frac{x\partial x}{aa + xx} = \frac{1}{2} \log. \frac{aa + xx}{\text{conſt.}}$.

17. $\int \frac{\partial x}{x(aa+xx)} = \frac{1}{2aa} \log. \frac{xx}{aa+xx} + C.$

Die logarithmiſchen Integrale durch Zerlegung des Differentialfactors in zwey Brüche, außer 13 und 16, welches Formeln wie (3.) ſind. Die Factoren in (14. u. 17.) müſſen in die Brüche, $\frac{1}{aax} \pm \frac{x}{aa(aa \mp xx)}$, zerlegt werden, worauf ſtatt log. x geſetzt wird $\frac{1}{2}$ log x^2. Die Formel 15. aus Differentialformel 31. oder 38.

18. Wenn in den Differentialformeln 8 bis 17. das Quadrat oder höhere Potenzen von x als Factoren im Zähler oder im Nenner vorkommen, ſo ſondert man ſie auf eine ähnliche Art ab wie in 7. durch die Diviſion.

19. $\partial y = \frac{x^m \partial x}{(a+bx)^n}$, wo m und n ganze poſitive Zahlen ſind, wie in den folgenden Formeln.

$$y = \text{Conſt.} + \frac{1}{(m-n+1)b} \cdot \frac{x^m}{(a+bx)^{n-1}}$$
$$- \frac{ma}{(m-n+1)b} \cdot \int \frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx)^n}.$$

Bey der ſtückweiſe vorzunehmenden Integration kommt man zuletzt auf das Integral,

$$\int \frac{\partial x}{(a+bx)^n} = -\frac{1}{(n-1)b} \cdot \frac{1}{(a+bx)^{n-1}}.$$

Bey dieſer und einigen folgenden Formeln genüge es, daß man ſich durch die Differentiation von der Richtigkeit der Integration verſichere. In dem folgenden Abſchnitte wird im Allgemeinen gezeigt, wie dergleichen Integrale durch einen algebraiſchen und durch einen involutoriſchen (ſummatoriſchen) Theil ausgedruckt werden.

Durch die Subſtitution, $a + bx = z$, verwandelt ſich das Differential in dieſes, $\partial y = \frac{(z-a)^m \partial z}{b^{m+1} z^n}$.

Nach der in der Einleitung zu dieſem Artikel angegebenen Methode iſt auch

$$y = \text{Conſt.} - \frac{m}{(n-1)b} \cdot \frac{x^m}{(a+bx)^{n-1}}$$
$$+ \frac{m}{(n-1)b} \int \frac{x^{m-1} \partial x}{(a+bx)^{n-1}}.$$

Wenn n kleiner als m iſt, ſo iſt dieſe Integralformel brauchbar, weil man dadurch zuletzt auf das $\int \frac{x^\mu dx}{a+bx}$ kommt, welches nach (7.) gefunden wird.

20. $$\partial y = \frac{\partial x}{x^m (a+bx)^n}.$$

$$y = \text{Conſt.} - \frac{1}{(m-1)a} \cdot \frac{1}{x^{m-1}(a+bx)^{n-1}}$$
$$- \frac{(m+n-2)b}{(m-1)a} \cdot \int \frac{\partial x}{x^{m-1}(a+bx)^n}.$$

Durch die Subſtitution, $x = \frac{1}{u}$, verwandelt ſich das Differential in dieſes, $\partial y = - \frac{u^{m+n-2} \partial u}{(au+b)^n}$.

21. $$\partial y = \frac{\partial x}{(a+bxx)^n}.$$

$$y = \text{Conſt.} + \frac{1}{2(n-1)a} \cdot \frac{x}{(a+bxx)^{n-1}}$$
$$+ \frac{2n-3}{2(n-1)a} \cdot \int \frac{\partial x}{(a+bxx)^{n-1}}.$$

Bey der Entwicklung dieſer involutoriſchen Formel kommt man zuletzt auf das Integral, $\int \frac{dx}{a+bxx}$, welches aus einer der Formeln, 9, 12, 15, gefunden wird.

22. $\partial y = \frac{x^m \partial x}{(a+bxx)^n}$.

I. $y = C. + \frac{1}{(m-2n+1)b} \cdot \frac{x^{m-1}}{(a+bxx)^{n-1}}$

$- \frac{(m-1)a}{(m-2n+1)b} \cdot \int \frac{x^{m-2}\partial x}{(a+bxx)^n}$.

Für ein ungerades m kommt man in dem $\frac{1}{2}(m+1)$ten Gliede auf das Integral,

$$\int \frac{x\,dx}{(a+bxx)^n} = - \frac{1}{2(n-1)b} \cdot \frac{1}{(a+bxx)^{n-1}}.$$

Für ein gerades m erhält man in dem $(\frac{1}{2}m+1)$ten Gliede das Integral, $\int \frac{\partial x}{(a+bxx)^n}$, welches durch eine neue Reihe zufolge (21.) entwickelt wird, und von den Logarithmen oder von Winkeln abhängt.

II. $y = C. - \frac{1}{2(n-1)b} \cdot \frac{x^{m-1}}{(a+bxx)^{n-1}}$

$+ \frac{m-1}{2(n-1)b} \cdot \int \frac{x^{m-2}\partial x}{(a+bxx)^{n-1}}$.

Dieſe Form für y iſt bey einem geraden n dadurch brauchbar, daß mit dem Exponenten von x zugleich der Exponent des Binomium abnimmt, wodurch man auf eine der Elementarformeln, 9 — 17, kommt.

III. $y = C. + \frac{1}{2(n-1)a} \cdot \frac{x^{m+1}}{(a+bxx)^{n-1}}$

$- \frac{m-2n+3}{2(n-1)a} \cdot \int \frac{x^m \partial x}{(a+bxx)^{n-1}}$.

23. $\partial y = \frac{\partial x}{x^m(a+bxx)^n}$.

$$y = C. - \frac{1}{(m-1)a} \cdot \frac{1}{x^{m-1}(a+bxx)^{n-1}}$$

$$- \frac{(m+2n-3)b}{(m-1)a} \cdot \int \frac{\partial x}{x^{m-2}(a+bxx)^n}.$$

Durch dieſe involutoriſche Formel wird der Exponent von x ſucceſſiv um 2 vermindert. Iſt m eine gerade Zahl, ſo kommt man zuletzt auf das Integral, $\int \frac{\partial x}{(a+bxx)^n}$. Iſt m ungerade, ſo würde für $\int \frac{\partial x}{x(a+bxx)^n}$ der Diviſor in den Coefficienten beider Theile des Integrals nach jener Formel Null. In dieſem Falle dient die nächſtfolgende Formel, nachdem man auf das gedachte Integral gekommen iſt.

24. $\partial y = \frac{\partial x}{x(a+bxx)^n}$.

$$y = C. + \frac{1}{2(n-1)a} \cdot \frac{1}{(a+bxx)^{n-1}}$$

$$+ \frac{1}{a} \int \frac{\partial x}{x(a+bxx)^{n-1}}.$$

Hierdurch kommt man zuletzt auf das Integral, $\int \frac{\partial x}{x(a+bxx)}$, welches in einer der Formeln, 11, 14, 17, gefunden iſt.

25. $\partial y = \frac{\partial x}{aa+2bx+xx}$, wo $aa < bb$ oder ſubtractiv iſt.

$$y = C. + \frac{1}{2\sqrt{(bb-aa)}} \log. \frac{x+b-\sqrt{(bb-aa)}}{x+b+\sqrt{(bb-aa)}}.$$

Denn es ſey $aa + 2bx + xx = (p+x)(q+x)$,

ſo iſt $pq = aa$; $p + q = 2b$, und $\partial y = \frac{\partial x}{(p+x)(q+x)}$.

Dadurch iſt $y = \frac{1}{p-q} \log \frac{q+x}{p+x}$. (8. I.) Nun iſt aus den beiden Gleichungen für p und q, die eine $p = b + \sqrt{(bb-aa)}$, wenn die andere $q = b - \sqrt{(bb-aa)}$ iſt. Aus dieſen Werthen wird die für y aufgeſtellte Formel erhalten.

26. $$\partial y = \frac{\partial x}{aa + 2bx - xx}.$$

$$y = C. + \frac{1}{2\sqrt{(aa+bb)}} \log. \frac{\sqrt{(aa+bb)} - b + x}{\sqrt{(aa+bb)} + b - x}.$$

Denn es ſey $aa + 2bx - xx = (p+x)(q-x)$, ſo iſt $pq = aa$; $q - p = 2b$, und $\partial y = \frac{\partial x}{(p+x)(q-x)}$.

Dadurch iſt $y = \frac{1}{p+q} \log. \frac{p+x}{q-x}$ (8. II.). Aus den beiden Gleichungen für p und q folgt, daß $p = -b + \sqrt{(aa+bb)}$, und $q = b + \sqrt{(aa+bb)}$, welche Werthe in die Formel für y geſetzt, diejenige des Satzes geben.

27. $$\partial y = \frac{\partial x}{aa + 2bx + xx}, \text{ wo } aa > bb \text{ iſt.}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{(aa-bb)}} \text{Ang. tang} \frac{b+x}{\sqrt{(aa-bb)}} + C.$$

oder

$$y = \frac{1}{\sqrt{(aa-bb)}} \text{ Ang. tang } \frac{x\sqrt{(aa-bb)}}{aa+bx} + C.$$

Denn man ſetze $x = u - b$, ſo verwandelt ſich das Differential in $\frac{\partial u}{uu+aa-bb}$; alſo iſt

$$y = \frac{1}{\sqrt{(aa-bb)}} \text{ Ang. tang. } \frac{u}{\sqrt{(aa-bb)}},$$ aus (15.), woraus der angegebene Werth für y ſogleich folgt. — Das Integral konnte auch unmittelbar aus 37. des Art. Differentialformeln gefunden werden.

Da Ang. tang. $\frac{b+x}{\sqrt{(aa-bb)}}$ den Winkel zu der Tangente $\frac{b}{\sqrt{(aa-bb)}}$ enthält, welcher unter der Conſtante begriffen werden mag, ſo nehme man den Unterſchied dieſer Winkel, welcher iſt

Ang. tang $\frac{x\sqrt{(aa-bb)}}{aa+bx}$ (Goniometrie, 33.), und es erhält nun y den zweyten angegebenen Werth, welcher von dem erſtern in der Conſtante verſchieden iſt.

28. $$\int \frac{\partial x}{aa+2ax+xx} = C. - \frac{1}{a+x}.$$

Dieſes algebraiſche Integral macht den Übergang von einem der transſcendenten Integrale (25, 27.) zu dem andern.

29. $$\partial y = \frac{cx\partial x}{aa+2bx+cxx},$$

$$y = \tfrac{1}{2}\log.(aa+2bx+cxx) - \int \frac{b\partial x}{aa+2bx+cxx} + \text{Conſt.}$$

Erhellt ſogleich durch die Differentiation. Der zweyte Theil wird aus den Formeln (25 — 27.) gefunden.

30. $$\partial y = \frac{\partial x}{x(aa + 2bx + cxx)}.$$

$$y = \frac{1}{2aa} \log. \frac{xx}{aa + 2bx + cxx}$$

$$- \frac{b}{aa} \int \frac{\partial x}{aa + 2bx + cxx} + \text{Conſt.}$$

Der Differentialfactor wird in zwey Brüche, $\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{aa + 2bx + cxx}$, zerlegt, wo $Aaa = 1$; $B = - Ac$; $C = - 2Ab$ iſt.

31. $$\partial y = \frac{x^m \partial x}{aa + 2bx + cxx},$$

wo m eine ganze, poſitive oder negative, Zahl iſt.

Das Integral wird gefunden, wenn mittelſt der Diviſion der Exponent von x bis auf 1 oder 0 gebracht wird.

32. $$\partial y = \frac{\partial x}{(aa + 2bx + cxx)^n}.$$

Zur Abkürzung ſey $aa + 2bx + cxx = u$, ſo iſt

$$y = \frac{1}{2(n-1)(caa-bb)} \left\{ \frac{b + cx}{u^{n-1}} + (2n - 3) \int \frac{c\partial x}{u^{n-1}} \right\}.$$

Denn man ſetze $cx = z - b$, ſo iſt

$\partial y = \frac{\partial z : c}{(aa - bb : c + zz : c)}$. Nun folgt das Integral aus (21.), wenn für z wieder deſſelben Werth geſetzt wird, mit Beybehaltung der Bezeichnung u. Das In-

tegral $\int \frac{\partial x}{u^{n-1}}$ wird auf ähnliche Art gefunden, und ſo

ferner bis zu dem $\int \frac{\partial x}{u}$ aus den Formeln in (25—27.).

33. $\partial y = \frac{x \partial x}{(aa + 2bx + cxx)^n}$.

Es ſey wiederum die Wurzelgröße $= u$, ſo iſt

$$y = -\frac{1}{2(n-1)cu^{n-1}} - \frac{b}{c}\int \frac{\partial x}{u^n}.$$

34. $\partial y = \frac{(A + Bx)\partial x}{(aa + 2bx + cxx)^n}$,

wo A und B gegebene Größen ſind. Die Function y wird mittelſt (32. 33.) gefunden.

35. $\partial y = \frac{M}{N}\partial x$, wo M und N rationale ganze Functionen von x ſind. Auch ſey die höchſte Potenz von x in der Function M niedriger als die höchſte in N. Sollte dieſes nicht ſeyn, ſo ſind durch Diviſion die höhern Potenzen abzuſondern, ſo daß die Function im Zähler einen niedrigern Grad erhalte als die Function im Nenner. Der abgeſonderte Theil gehört für den Fall in (2.).

I. Die Function N werde in ein Product aus Factoren von der Form $x \pm p$, oder $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$, verwandelt, dadurch daß man $N = 0$ ſetzt und die Wurzeln dieſer Gleichung ſucht. Jede mögliche Wurzel p giebt einen Factor $x - p$; je zwey unmögliche, deren Summe möglich iſt, geben einen trinomiſchen Factor. Sind zwey unmögliche Wurzeln, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, ſo geben dieſe den Factor $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$. (Gleichung, 42.), welchem man auch die Form, $x^2 - 2ax\cos\zeta + aa$, geben kann.

II. Nun werde der Bruch $\frac{M}{N}$ in partielle Brüche zerlegt. Sind alle Factoren ungleich, ſo entſteht aus

jedem einfachen Factor von N ein partieller Bruch $\frac{A}{x+p}$, und aus einem Doppelfactor der partielle Bruch, $\frac{(A+Bx)\partial x}{x^2-2ax\cos\zeta+aa}$. Sind zwey gleiche einfache Factoren in N vorhanden, ſo entſtehen daraus die partiellen Brüche, $\frac{A}{(x+p)^2}+\frac{B}{(x+p)}$, und aus zwey gleichen Doppelfactoren die partiellen Brüche,

$$\frac{A+Bx}{(xx-2ax\cos\zeta+aa)^2}+\frac{C+Dx}{xx-2ax\cos\zeta+aa}.$$

Aus drey gleichen einfachen Factoren entſtehen die partiellen Brüche, $\frac{A}{(x+p)^3}+\frac{B}{(x+p)^2}+\frac{C}{x+p}$, und aus drey gleichen Doppelfactoren, die man zur Abkürzung durch u bezeichne, die Brüche, $\frac{A+Bx}{u^3}+\frac{C+Dx}{u^2}+\frac{E+Fx}{u}$. Auf ähnliche Art entſtehen aus vier oder mehr gleichen Factoren vier oder mehrere ſolcher Brüche, deren Nenner Potenzen von dem Factor ſind. S. Function, (28. ff.)

III. Die Integration jeder der Differentialformeln mit einem Factor zu ∂x, der ein Bruch, wie die in II. angegebenen, iſt, ergiebt ſich aus den vorher behandelten Formeln.

IV. Es wird hiebey vorausgeſetzt, daß die Wurzeln der Gleichung, $N=0$, alle gefunden werden können. Dieſes iſt freylich durch beſtimmte Methoden nur für Gleichungen bis zum vierten Grade möglich, und bey höhern Graden muß man mit Annäherungen zufrieden ſeyn, wie es ſelbſt bey jenen niedrigern wegen der Irrationalität der Wurzeln der Fall iſt. Bey den Fortſchritten in der höhern Analyſis muß das, was ſie aus der niedern vorausſetzt, als vollkommen gegeben betrachtet

werden. Es kommt hier nicht auf Erweiſe von Sätzen an, ſondern auf Methoden. Die Integration der Formel $\frac{M}{N}\partial x$ leidet dadurch als Methode nicht, wenn man auch in einem und dem andern Falle die Factoren von N nicht angeben könnte. Das gehört nicht für die Integralrechnung, ſondern für die Algebra.

36. $\partial y = \frac{x^m \partial x}{x^n + a^n}$, wo $m < n$ iſt, und beide ganze poſitive Zahlen ſind.

Der Nenner hat $\frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$ Paare trinomiſcher Factoren von der Form $xx - 2ax\operatorname{coſ}\varphi + aa$, wo $\varphi = \frac{2k+1}{n}\pi$ iſt, und $2k+1$ jede der ungeraden Zahlen von 1 bis $n-1$ oder bis $n-2$ bedeutet. Jeder dieſer Factoren giebt einen partiellen Bruch,

$\frac{(A + Bx)\partial x}{xx - 2ax\operatorname{coſ}\varphi + aa}$, worin iſt

$$A = + \frac{2a^{m+2}}{na^n} \operatorname{coſ} \frac{m}{n}(2k+1)\pi;$$

$$B = - \frac{2a^{m+1}}{na^n} \operatorname{coſ} \frac{m+1}{n}(2k+1)\pi.$$

Für ein ungerades n kommt zu den $\frac{1}{2}(n-1)$ Brüchen mit dreytheiligem Nenner noch der Bruch,

$\frac{(-a)^m}{na^{n-1}} \cdot \frac{\partial x}{x+a}$, hinzu. Wie die Werthe von A und B bequem gefunden werden, ſ. in dem Zuſatze zu dieſem Abſchnitte.

Aus den partiellen Brüchen findet man mittelſt (25. ff.) die Integrale.

37. Exempel. $\int \frac{\partial x}{x^4 + 1} =$

$$-\tfrac{2}{4}\cos\frac{\pi}{4}\log\sqrt{(xx - 2x\cos\frac{\pi}{4} + 1)}$$
$$+\tfrac{2}{4}\sin\frac{\pi}{4}\,\text{Ang. tang}\,\frac{x\sin(\pi:4)}{1 - x\cos(\pi:4)}$$
$$-\tfrac{2}{4}\cos\frac{3\pi}{4}\log\sqrt{(xx - 2x\cos\frac{3\pi}{4} + 1)}$$
$$+\tfrac{2}{4}\cos\frac{3\pi}{4}\,\text{Ang. tang}\,\frac{x\sin(3\pi:4)}{1 - x\cos(3\pi:4)}.$$

Es iſt der Logarithme von der Wurzel des Trinomium genommen, und dagegen der Factor 2 vorgeſetzt, um die numeriſchen Coefficienten gleich groß zu haben.

38. $\partial y = \frac{x^m \partial x}{x^n - a^n}$, wo $m < n$ iſt.

Der Nenner hat, wenn n gerade iſt, $\frac{1}{2}(n-2)$ Paare trinomiſcher Factoren von der Form, $xx - 2ax\cos\varphi + aa$, nebſt den beiden einfachen $x+a$ und $x-a$. Iſt n ungerade, ſo iſt die Anzahl jener $= \frac{1}{2}(n-1)$, wozu der Factor $(x-a)$ kommt. Der Winkel φ hat die Form $\frac{2k\pi}{n}$, wo $2k$ alle gerade Zahlen von 2 bis $n-2$ oder bis $n-1$ bedeutet. In dem partiellen Bruche $\frac{(A + Bx)\partial x}{xx - 2ax\cos\varphi + aa}$ iſt

$$A = -\frac{2a^{m+2}}{na^n}\cos\frac{m}{n}2k\pi,$$
$$B = +\frac{2a^{m+1}}{na^n}\cos\frac{m+1}{n}2k\pi.$$

Für ein gerades n kommen hinzu die partiellen Brüche,

$$\frac{(+a)^m\partial x}{na^{n-1}(x-a)} - \frac{(-a)^m\partial x}{na^{n-1}(x+a)};$$

für ein ungerades n der Bruch $\frac{(+a)^m\partial x}{na^{n-1}(x-a)}$.

39. Exempel I. $\partial y = \frac{\partial x}{x^4 - 1}$, das iſt,

$$\partial y = \tfrac{1}{4}\frac{\partial x}{x-1} - \tfrac{1}{4}.\frac{\partial x}{x+1} - \tfrac{2}{4}.\frac{\partial x}{xx+1}.$$

Der trinomiſche Factor iſt hier in einen binomiſchen übergegangen, weil $\operatorname{coſ}\varphi = \operatorname{coſ}\frac{2\pi}{4} = 0$ iſt. Es iſt $A = -\tfrac{2}{4}.1$; $B = 0$. Die Integration dieſer Brüche giebt $y = \tfrac{1}{4}\log(x-1) - \tfrac{1}{4}\log(x+1) - \tfrac{2}{4}$ Ang. tang x.

Exempel II. $\partial y = \frac{\partial x}{x^5 - 1}$, das iſt

$$\partial y = \tfrac{1}{5}.\frac{\partial x}{x-1} + \tfrac{2}{5}.\frac{(-1 + x\operatorname{coſ}72^\circ)\partial x}{xx - 2x\operatorname{coſ}72^\circ + 1}$$

$$+ \tfrac{2}{5}.\frac{(-1 + \operatorname{coſ}144^\circ)\partial x}{xx - 2x\operatorname{coſ}144^\circ + 1}, \text{ wo}$$

$\operatorname{coſ}\frac{2\pi}{5} = \operatorname{coſ}72^\circ$, und $\operatorname{coſ}\frac{4\pi}{5} = \operatorname{coſ}144^\circ$ iſt. Zufolge (27, 29.) da $aa - bb$ in (27.) hier iſt $1 - \operatorname{coſ}\varphi^2 = \sin\varphi^2$, iſt hieraus

$$y = +\tfrac{1}{5}\log(x-1)$$
$$-\tfrac{2}{5}\sin 72^\circ.\ \text{Ang. tang}\ \frac{x\sin 72^\circ}{1 - x\operatorname{coſ}72^\circ}$$
$$+\tfrac{2}{5}\operatorname{coſ}72^\circ\ \log\sqrt{(x^2 - 2x\operatorname{coſ}72^\circ + 1)}$$
$$-\tfrac{2}{5}\sin 144^\circ.\ \text{Ang. tang}\ \frac{x\sin 144^\circ}{1 - x\operatorname{coſ}144^\circ}$$
$$+\tfrac{2}{5}\operatorname{coſ}144^\circ.\log\sqrt{(x^2 - 2x\operatorname{coſ}144^\circ + 1)}.$$

40. $\partial y = \frac{x^m\partial x}{1 - 2x^n\operatorname{coſ}\alpha + x^{2n}}$.

Der Differentialfactor läßt ſich in n partielle Brüche von der Form, $\frac{A + Bx}{1 - 2x\operatorname{coſ}\varphi + xx}$, zerlegen, wo φ die

Werthe, $\frac{\alpha}{n}$, $\frac{2\pi+\alpha}{n}$, $\frac{4\pi+\alpha}{n}$, etc. hat. (S. unten 47.). Dadurch wird die Integration auf die in (25. ff) gewieſenen gebracht.

41. $\partial y = \frac{x^{pn:q-1}\partial x}{1-2x^n\cos\alpha+x^{2n}}$, wo p, q, n, ganze Zahlen ſind.

Man ſetze $x^n = z^q$, ſo iſt $x^{\frac{pn}{q}} = z^p$, und $\frac{pn}{q}x^{\frac{pn}{q}-1}\partial x = pz^{p-1}\partial z$. Daraus iſt

$$\partial y = \frac{q}{n}\cdot\frac{z^{p-1}\partial z}{1-2z^q\cos\alpha+z^{2q}},$$

welches die Differentialformel in (40) iſt.

Oder man ſetze $x = z^q$, ſo iſt

$$\partial y = \frac{qz^{pn-1}\partial z}{1-2z^{qn}\cos\alpha+z^{2qn}}.$$

42. Wenn in (41.) der Factor q in dem Exponenten qn und 2qn der zweyten Formel eine Potenz der Zahl 2 iſt, ſo läßt ſich der Nenner in zwey trinomiſche Factoren zerlegen, worin die Exponenten von 2 halb ſo groß ſind, als in jenem, alſo Potenzen von 2 bleiben. Denn es ſey die Function

$a^2+bu^2+u^4=(f+gu+u^2)(f-gu+u^2)$,

ſo iſt $f^2=a^2$, und $2f-g^2=b$, alſo $g^2=2a-b$, und die Zerlegung iſt möglich, wenn $2a>b$ iſt. Bey einem negativen b, das iſt für die Function $a^2-bu^2+u^4$, iſt ſie immer möglich. Dieſe Fälle ſind in (41.) vorhanden.

Der Bruch $\frac{1}{a^2+bu^2+u^2}$ wird nun in die Brüche, $\frac{A+Bu}{f+gu+u^2}+\frac{C+Du}{f-gu+u^2}$, zerlegt. Man

ſetze $u^2 = z^{qn}$, ſo iſt $u = z^{qn:2}$, wo der Exponent $qn:2$ eine ganze Zahl bleibt. Mit den durch dieſe Subſtitution erhaltenen beiden Brüchen wird eben ſo verfahren, wie mit dem Bruche $\frac{1}{a^2 + bu^2 + u^4}$, und ſo ferner, bis daß man auf Nenner, wie $1 - 2z^n \cos\varphi + z^{2n}$, kommt. Zuletzt werden alle partiellen Brüche mit dem Zähler in ∂y, nämlich $qz^{pn-1}\partial z$, multiplicirt. Dadurch erhält man Differentialformeln von der Form $\frac{z^{rn-1}\partial z}{1 - 2z^n \cos\varphi + z^{2n}}$, deren Integration von derjenigen der Formel $\frac{z^{n-1}\partial z}{1 - 2z^n \cos\varphi + z^{2n}}$ abhängt.

Dieſes weitläuftigere Verfahren als dasjenige, welches in (40.) angegeben iſt, hat Cotes gebraucht, da ihm das letztere noch nicht bekannt war. Man ſehe in der Harmonia menſurarum, Forma XXIX, XXX. cas. 2. und die Analyse des mesures par Walmesley, pag. 202.

43. Hier ſieht man, wie man die Potenzen der x mit gebrochnem Exponenten wegſchaffen könne. Die Differentialformel ſey $\partial y = \frac{x^{m:r-1}\partial x}{a + bx^n}$. Haben m und n keinen gemeinſchaftlichen Factor, ſo ſetze man $x = z^r$, ſo iſt $x^m = z^{mr}$; $x^{m:r} = z^m$, und

$$\frac{m}{r} x^{m:r-1}\partial x = mz^{m-1}\partial z, \text{ alſo } \partial y = \frac{rz^{m-1}\partial z}{a + bx^{nr}}.$$

Haben m und n einen gemeinſchaftlichen Factor, ſo daß $m = \mu\eta$; $n = \nu\eta$, ſo ſetze man $x^\eta = z^r$, und es iſt $x^{m:r} = z^\mu$; $x^n = z^{\nu r}$, und $\partial y = \frac{r}{\eta} \cdot \frac{z^{\mu-1}\partial z}{a + z^{\nu r}}$.

Zuſatz.

Die Zerlegung gebrochner rationaler Functionen.

44. Aufg. Es ſind M, N, P, Q, R, S, rationale ganze Functionen von x, und $\frac{M}{N} = \frac{P}{Q} + \frac{R}{S}$.
Die Function M ſey von einem niedrigern Grade als N, und N enthalte jeden Factor nur einfach, auf welchen Grad er auch ſteige: es ſoll der Zähler P des partiellen Bruchs $\frac{P}{Q}$ aus dem Nenner deſſelben gefunden werden, ohne daß es nöthig ſey, den andern Nenner S zu kennen.

I. Es iſt

$$M = PS + QR.$$
$$N = QS.$$
$$\partial N = S\partial Q + Q\partial S.$$

Da PS von keinem höhern Grade als M, alſo von einem niedrigern als N, das iſt QS, iſt, ſo iſt P von einem niedrigern Grade als Q.

II. Es ſey p eine der Wurzeln der Gleichung $Q = o$, ſo iſt, wenn $x = p$ geſetzt wird, und M', P', S', ſo wie $\frac{\partial N'}{\partial Q'}$ die Werthe von M, P, S, $\frac{\partial N}{\partial Q}$ für $x = p$ ſind, wodurch $Q = o$ wird,

$$M' : S' = P' ; \qquad \partial N' : \partial Q' = S';$$

alſo $M'(\partial Q' : \partial N') = P'$.

III. Es ſey zuerſt $Q = x - p$, ſo iſt P eine beſtimmte Größe A. Dadurch iſt $P' = P$, und $P = A = M' (\partial x : \partial N')$.

IV. Es ſey zweytens Q ein trinomiſcher Factor, $xx - 2ax + b$, und die Wurzeln der Gleichung, $Q = o$, ſeyn, p, q; die Werthe von M, P, S, $\frac{\partial N}{\partial Q}$ für $x = p$

ſeyn wie vorher M′, P′, S′, $\frac{\partial N'}{\partial Q'}$, und für $x = q$ ſeyn dieſelben M″, P″, S″, $\frac{\partial N''}{\partial Q''}$, ſo iſt $P' = M'(\partial Q' : \partial N')$; $P'' = M''(\partial Q'' : \partial N'')$.

V. Nun iſt P eine Function des erſten Grades von x, oder $P = A + Bx$, wo A und B zu beſtimmen ſind. Es iſt

$$P' = A + Bp,$$
$$P'' = A + Bq.$$

Daher $A = \frac{pP'' - qP'}{p - q}$,

$$B = \frac{P' - P''}{p - q}.$$

Das iſt

$$A = -\frac{qM'}{p-q} \cdot \frac{\partial Q'}{\partial N'} + \frac{pM''}{p-q} \cdot \frac{\partial Q''}{\partial N''}.$$

$$B = \frac{M'}{p-q} \cdot \frac{\partial Q'}{\partial N'} - \frac{M''}{p-q} \cdot \frac{\partial Q''}{\partial N''}.$$

VI. Es iſt $\partial Q = (2x - 2a)\partial x$, alſo $\partial Q' = (2p - 2a)\partial x$; $\partial Q'' = (2q - 2a)\partial x$. Nun iſt $p + q = 2a$ (Gleichung, 40.), alſo $\partial Q' = (p-q)\partial x$; $\partial Q'' = (q - p)\partial x$. Dadurch iſt

$$A = -qM' \cdot \frac{\partial x}{\partial N'} - pM'' \cdot \frac{\partial x}{\partial N''},$$

$$B = \quad M' \cdot \frac{\partial x}{\partial N'} + M'' \cdot \frac{\partial x}{\partial N''}.$$

Sind p und q unmögliche Größen, ſo muß ſich das unmögliche in den Werthen von A und B aufheben.

VII. Auf ähnliche Art kann man die Function P finden, wenn Q einen höhern Grad als den zweyten hat,

wofern nur die Wurzeln der Gleichung $Q=0$ ſich bequem angeben laſſen.

VIII. Die Function P muß von einem niedrigern Grade als Q ſeyn, weil zur Beſtimmung derſelben nicht mehr Gleichungen gegeben werden, als Factoren in Q ſind. Daher kann P nicht mehr Glieder, als Q Factoren enthalten. Da das erſte Glied eine beſtimmte Größe iſt, ſo iſt die höchſte Potenz von x in P niedriger, als die höchſte in Q. Aber es hindert nichts, daß R nicht höhern Grades ſeyn dürfte, als S, da der Zähler R gar nicht in Rechnung kommt. Daher darf auch M höhern Grades ſeyn als N, wofern man nur nicht alle partiellen Brüche auf die hier für den Bruch $\frac{P}{Q}$ gewieſene Art ſuchen will. Den letzten muß man, wenn M höhern Grades als N iſt, durch Abſonderung der gefundenen Brüche von $\frac{M}{N}$ beſtimmen.

45. I. Es ſey $Q=(x-p)^2$, ſo iſt (Function, 28.) der Bruch $\frac{M}{N}$ zu zerlegen in die Brüche,

$\frac{A}{(x-p)^2}+\frac{B}{x-p}+\frac{R}{S}$. Es iſt alſo $P=A+B(x-p)$, und $M=AS+BS(x-p)+R(x-p)^2$. Daraus iſt $M'=AS'$, aber S' kann aus der Gleichung, $\partial N=S\partial Q+Q\partial S$, nicht gefunden werden, da ∂Q wie $Q=0$ iſt, für $x=p$. Man nehme das zweyte Differential von N, nämlich

$$\partial^2 N=S\partial^2 Q+2\partial S.\partial Q+\partial^2 S.Q,$$

ſo iſt

$$\partial^2 N':\partial^2 Q'=S' \quad \text{oder} \quad \partial^2 N':2\partial x^2=S',$$

alſo $A=M'(2\partial x^2:\partial^2 N')$.

II. Ferner werde M differentiirt, ſo iſt

$$\partial M=P\partial S+S\partial P+Q\partial R+R\partial Q,$$

und $\partial M'=P'\partial S'+S'\partial P'$,

das iſt $\partial M' = A\partial S' + S'.B\partial x$.

III. Um $\partial S'$ zu erhalten, differentiire man N zum drittenmahle. Es iſt

$\partial^3 N = S.\partial^3 Q + 3\partial S.\partial^2 Q + 3\partial^2 S.\partial Q + \partial^3 S.Q$.

Daraus iſt $\partial^3 N' = 3\partial S'.\partial^2 Q'$, weil $\partial^3 Q = 0$, alſo $\partial S' = \partial^3 N' : 3\partial^2 Q'$, oder $\partial S' = \partial^3 N' : 6\partial x^2$.

IV. Hierdurch iſt $\partial M' = A(\partial^3 N' : 6\partial x^2) + B(\partial^2 N' : 2\partial x)$, ſo daß

$$B = 2\partial M'\partial x : \partial^2 N' - A(\partial^3 N' : 3\partial^2 N'\partial x),$$

oder

$$B = 2\partial M'\partial x : \partial^2 N' - 2M'(\partial^3 N'\partial x : 3(\partial^2 N')^2).$$

V. Exempel. $\frac{M}{N} = \frac{x^m}{3x^4 - 4x^3 + 1}$. Ein Quadratfactor des Nenners iſt $Q = (x-1)^2$. Es iſt $\partial N = -12x^2\partial x + 12x^3\partial x$; $\partial^2 N = -24x\partial x^2 + 36x^2\partial x^2$; $\partial^3 N = -24\partial x^3 + 72x\partial x^3$, alſo iſt $\partial N' = 0$; $\partial^2 N' = +12\partial x^2$; $\partial^3 N' = +48\partial x^3$. Ferner iſt $\partial M = mx^{m-1}\partial x$; $M' = 1$; $\partial M' = m\partial x$.

Daraus $A = +\frac{1}{6}$; $B = \frac{m}{6} - \frac{2}{9}$, und der partielle Bruch, der aus dem Factor $(x-1)^2$ des Nenners N entſteht, iſt $\frac{1}{6(x-1)^2} + \frac{3m-4}{18(x-1)}$.

Dieſes Beyſpiel kann zur Erläuterung von 44. VIII. dienen, wenn m größer als 4 genommen wird.

VI. Aus der für den Factor $(x-p)^2$ gezeigten Methode wird man abnehmen, wie man für höhere Potenzialfactoren den zugehörigen Zähler des partiellen Bruches finden könne, wenn man nicht unmittelbar den Factor S in Rechnung bringen will, der allerdings aus dem Nenner N durch den Factor Q gefunden werden kann.

VII. Nach derſelben Methode kann man auch die Zähler der partiellen Brüche ſuchen, die aus dem Qua-

drate oder einer höhern Potenz des trinomiſchen Factors, $xx + ax + b$, entſtehen. Wenn N das Quadrat deſſelben enthält, ſo entſtehen daraus zwey Brüche,

$$\frac{A + Bx}{(xx + ax + b)^2} + \frac{C + Dx}{xx + ax + b}.$$

Hier müßte man zuerſt die beiden Theile A und C zu beſtimmen ſuchen, mittelſt der Wurzeln p und q der Gleichung, $xx + ax + b = 0$, eben ſo wie es in (44. IV—VI.) grſchehen iſt. Dann würde man die Coefficienten B und D ſuchen, jeden durch dieſelben Wurzeln p und q, ſo wie vorher in (IV.) B gefunden iſt.

VIII. Das hier gezeigte Verfahren iſt ein anderes, als das von Euler in der Differentialrechnung P. II. Cap. XVIII. gelehrte, wovon in dem Artikel, Function (52—55.) etwas mitgetheilt iſt. Für Doppelfactoren ſcheint jenes deutlicher zu ſeyn. Bey Potenzialfactoren gebraucht Euler den Factor S zur Berechnung des Zählers P, ob er gleich Anfangs (§. 403.) es als einen Vorzug der Methode durch Differentiiren die partiellen Brüche zu finden, angiebt, daß man nicht nöthig habe, den zweyten Factor des Nenners zu ſuchen.

Die folgenden Zerlegungen dienen zu Beyſpielen der hier gezeigten Methode, und liegen zugleich bey den Integrationen (36. ff.) zum Grunde. In dem Artikel, Anwendung der Geometrie auf die Analyſis, VI. und VII. iſt ſchon von dieſen Zerlegungen gehandelt. Wegen der beſſern Überſicht des Ganzen ſey hier eine Wiederholung geſtattet, die aber auch ihr eigenes hat.

46. Aufg. Den Bruch $\frac{x^m}{x^n \pm a^n}$ in partielle Brüche mit binomiſchen oder trinomiſchen Nennern zu zerlegen. Der Exponent m ſey kleiner als n.

I. Aus Goniometrie (100.) iſt

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi . \sqrt{-1})^n = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi . \sqrt{-1},$$

oder

$(a\,coſ\,\varphi \pm a\,\sin\varphi.\sqrt{-1})^n = a^n(coſ\,n\varphi \pm \sin n\varphi.\sqrt{-1})$. Man ſetze $\sin n\varphi = 0$, ſo iſt $coſ\,n\varphi = +1$, oder $coſ\,n\varphi = -1$, jenes, wenn $n\varphi = 2k\pi$, dieſes wenn $n\varphi = (2k+1)\pi$, iſt und

$$(a\,coſ\,\varphi \pm a\,\sin\varphi.\sqrt{-1})^n = a^n,$$

oder $$(a\,coſ\,\varphi \pm a\,\sin\varphi.\sqrt{-1})^n = -a^n.$$

II. Der $coſ\,\varphi$ und $\sin\varphi$ erhalten in beiden Fällen n verſchiedene Werthe (Goniometrie. V.). Diejenigen Winkel, welche verſchiedene Sinus und Coſinus geben, ſind, wenn $coſ\,n\varphi = +1$ genommen wird, für ein gerades n,

$$0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n} \ldots \frac{n\pi}{n} \ldots \frac{2n-2}{n}\pi;$$

für ein ungerades n,

$$0, \frac{2\pi}{n} \ldots \frac{n-1}{n}\pi, \frac{n+1}{n}\pi \ldots \frac{2n-2}{n}\pi.$$

Iſt $coſ\,\varphi = -1$, ſo ſind dieſe Winkel für ein gerades n,

$$\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n} \ldots \frac{n-1}{n}\pi, \frac{n+1}{n}\pi \ldots \frac{2n-1}{n}\pi;$$

für ein ungerades n,

$$\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n} \ldots \frac{n\pi}{n} \ldots \frac{2n-1}{n}\pi.$$

Die Winkel, deren Summe vier Rechte oder 2π beträgt, haben einerley Coſinus, und gleiche aber entgegengeſetzte Sinus. Man hat alſo, außer den Winkeln 0 und π, nur die Winkel unter zwey Rechten zu nehmen nöthig, und für die Sinus derer über zwey Rechte zu ſetzen $-\sin\varphi$. Solchergeſtalt ſind für $\pm a^n$ je zwey Factoren, $coſ\,\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1}$ und $coſ\,\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1}$, worin φ denſelben Werth hat. In den Werthen von φ, ſie ſeyn $\frac{2k\pi}{n}$ oder $\frac{2k+1}{n}\pi$, iſt $2k$ ſo wie $2k+1$ nicht größer als n zu nehmen.

III. Man bezeichne jeden der n Factoren in $(a\cos\varphi \pm a\sin\varphi.\sqrt{-1})^n$ durch x, wie in einer Gleichung jede ihrer Wurzeln durch daſſelbe Zeichen bedeutet wird, ſo daß ein Paar Wurzeln, mit demſelben Werthe von φ ſey

$$x = a\cos\varphi + a\sin\varphi.\sqrt{-1},$$
$$x = a\cos\varphi - a\sin\varphi.\sqrt{-1}.$$

Bezeichnet man dieſe beſtimmten Werthe von x durch p und q, ſo ſind p und q zwey Wurzeln der Gleichung, $x^n - a^n = 0$, oder der Gleichung, $x^n + a^n = 0$, und die Functionen, $x^n - a^n$; $x^n + a^n$, haben die einfachen Factoren, $x - p$; $x - q$, oder den Doppelfactor, $x^2 - (p+q)x + pq$, das iſt, $x^2 - 2ax\cos\varphi + aa$. Iſt $\varphi = 0$ oder π, ſo hat die Function den Factor $x - a$ oder $x + a$. Die Function $x^n - a^n$ hat für ein gerades n die Factoren $x - a$ und $x + a$, für ein ungerades n den Factor $x - a$. In jenem Falle iſt für $\sin\varphi = 0$ der Werth von $x = \pm a$, in dieſem bloß $x = + a$. Die Function $x^n + a^n$ hat für ein gerades n keinen einfachen Factor, für ein ungerades den $x + a$. Hier iſt bloß für ein ungerades n der Werth $\sin\varphi = 0$, und $x = - a$.

IV. Der Bruch $\frac{x^m}{x^n + a^n}$ werde in die partiellen, $\frac{P}{Q} + \frac{R}{S}$, zerlegt, und Q ſey ein trinomiſcher Factor, $xx - 2ax\cos\varphi + aa$. In der Formel (44. VII.) iſt $M = x^m$, $N = x^n + a^n$; $M' = p^m$; $M'' = q^m$; $\partial N = nx^{n-1}\partial x$; $\frac{\partial x}{\partial N'} = \frac{1}{np^{n-1}}$; $\frac{\partial x}{\partial N''} = -\frac{1}{nq^{n-1}}$, alſo

$$A = -\frac{qp^m}{np^{n-1}} - \frac{pq^m}{nq^{n-1}},$$

$$B = \frac{p^m}{np^{n-1}} + \frac{q^m}{nq^{n-1}}.$$

Da $p = a(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1})$,
$q = a(\cos\varphi - \sin\varphi . \sqrt{-1})$,

ſo iſt $pq = aa$, alſo $p = \frac{aa}{q}$, und $q = \frac{aa}{p}$.

Dadurch $A = -\frac{1}{n} a^2 (p^{m-n} + q^{m-n})$

$= -\frac{1}{n} . \frac{a^2}{a^{2n-2m}} (q^{n-m} + p^{n-m})$,

und $B = \frac{1}{n} . \frac{a^2}{a^{2n-2m}} (q^{n-m-1} + p^{n-m-1})$.

Nun iſt

$p^{n-m} = a^{n-m} (\cos(n-m)\varphi + \sin(n-m)\varphi . \sqrt{-1})$,
$q^{n-m} = a^{n-m} (\cos(n-m)\varphi - \sin(n-m)\varphi . \sqrt{-1})$.

Alſo

$p^{n-m} + q^{n-m} = 2a^{n-m} \cos(n-m)\varphi$,
$p^{n-m-1} + q^{n-m-1} = 2a^{n-m-1} \cos(n-m-1)\varphi$.

Dadurch iſt

$$A = -\frac{2a^2}{na^{n-m}} \cos(n-m)\varphi,$$

$$B = +\frac{2a^2}{na^{n-m}} \cos(n-m-1)\varphi.$$

Da für die Function $x^n + a^n$ zu ſetzen iſt $\cos n\varphi = -1$, ſo iſt $n\varphi = (2k+1)\pi$, und $(n-m)\varphi$ $= (2k+1)\pi - \frac{m}{n}(2k+1)\pi$. Daher $\cos(n-m)\varphi$ $= -\cos\frac{m}{n}(2k+1)\pi$, (Goniometrie, 17.). Eben ſo iſt $\cos(n-m-1)\varphi = -\cos\frac{m+1}{n}(2k+1)\pi$.

Folglich

$$A = + \frac{2a^2}{na^{n-m}} \operatorname{coſ} \frac{m}{n}(2k+1)\pi;$$

$$B = - \frac{2a}{na^{n-m}} \operatorname{coſ} \frac{m+1}{n}(2k+1)\pi.$$

Solchergeſtalt wird jeder partielle Bruch von der Form, $\frac{A + Bx}{xx - 2ax \operatorname{coſ}\varphi + aa}$, der aus $\frac{x^m}{x^n + a^n}$ entſteht, gefunden. Für $2k+1$ werden alle ungerade Zahlen von 1 bis $n-1$ oder $n-2$ geſetzt. In dem Falle, da n ungerade iſt, giebt der Factor $x+a$ der Function $x^n + a^n$ nach (44. II.) den partiellen Bruch $\frac{(-a)^m}{n(-a)^{n-1}} \frac{1}{x+a}$, oder $\frac{(-a)^m}{na^{n-1}} \cdot \frac{1}{x+a}$. Es iſt nämlich $\partial N = nx^{n-1}\partial x$, und $\partial N' = n(-a)^{n-1}\partial x$.

V. Der Bruch $\frac{x^m}{x^n - a^n}$ wird auf gleiche Art zerlegt. Nur hat φ die Form $\frac{2k\pi}{n}$, wo für die trinomiſchen Nenner $2k$ alle gerade Zahlen von 2 bis $n-2$ oder $n-1$ bedeutet, da die Werthe 0 und n für die binomiſchen Nenner gehören. Es iſt nun $(n-m)\varphi = 2k\pi - \frac{m}{n} \cdot 2k\pi$, und $\operatorname{coſ}(n-m)\varphi = \operatorname{coſ} \frac{m}{n} \cdot 2k\pi$. (Goniometrie, 17.) ſo wie $\operatorname{coſ}(n-m-1)\varphi = \operatorname{coſ} \frac{m+1}{n} 2k\pi$. Dadurch iſt

$$A = - \frac{2aa}{na^{n-m}} \operatorname{coſ} \frac{m}{n} \cdot 2k\pi,$$

$$B = + \frac{2a}{na^{n-m}} \operatorname{coſ} \frac{m+1}{n} \cdot 2k\pi.$$

Für ein gerades n geben die Factoren $x-a$ und $x+a$ der Function x^n-a^n noch die partiellen Brüche, $\frac{(+a)^m}{na^{n-1}}\cdot\frac{1}{x-a}-\frac{(-a)^m}{na^{n-1}}\cdot\frac{1}{x+a}$. Für ein ungerades n giebt der Factor $x-a$ den partiellen Bruch $+\frac{(+a)^m}{na^{n-1}}\cdot\frac{1}{x-a}$.

VI. Der Bruch $\frac{x^m}{a^n-x^n}$ wird in dieſelben Brüche, wie der in V. zerlegt, nur daß die Werthe derſelben den daſelbſt gefundenen entgegengeſetzt ſind, und daß $a-x$ ſtatt $x-a$ zu ſetzen iſt.

47. Aufg. Den Bruch $\frac{x^m}{1-2x^n\operatorname{cos}\alpha+x^{2n}}$ in partielle Brüche von der Form $\frac{A+Bx}{1-2x\operatorname{cos}\varphi+xx}$ zu zerlegen.

Es iſt $1-2x^n\operatorname{cos}\alpha+x^{2n}$ ein Product aus n Factoren, $1-2ax+xx$; $1-2bx+xx$; $1-2cx+xx$; u. ſ. f., ſo daß $a=\operatorname{cos}\frac{\alpha}{n}$; $b=\operatorname{cos}\frac{2\pi+\alpha}{n}$; $c=\operatorname{cos}\frac{4\pi+\alpha}{n}$, u. ſ. w. (Goniometrie 107. 108.). Man bezeichne die Winkel dieſer Coſinus überhaupt durch φ, ſo iſt der Nenner eines der partiellen Brüche $=1-2x\operatorname{cos}\varphi+xx$. Es iſt alſo in der Aufgabe (44.) für dieſen Fall $M=x^m$; $N=1-2x^n\operatorname{cos}\alpha+x^{2n}$; $Q=1-2x\operatorname{cos}\varphi+xx$; $M'=p^m$; $M''=q^m$, wenn p und q die Wurzeln der Gleichung $Q=0$ bedeuten; $\frac{\partial N'}{\partial x}=2np^{n-1}$; $(p^n-\operatorname{cos}\alpha)$; $\frac{\partial N''}{\partial x}=2nq^{n-1}(q^n-\operatorname{cos}\alpha)$. Da p und q Wurzeln der

Gleichung, $1 - 2x \cos\varphi + xx = 0$, und auch der $1 - 2x^n \cos\alpha + x^{2n} = 0$, ſind, ſo iſt $pq = 1$, und $p^n + q^n = 2 \cos\alpha$. (Zu vergl. am angef. O. 107.). Dadurch iſt $\frac{\partial N'}{\partial x} = np^{n-1}(p^n - q^n)$;

$\frac{\partial N''}{\partial x} = nq^{n-1}(q^n - p^n)$, und

$$A = \frac{p^{n-m} - q^{n-m}}{n(p^n - q^n)};$$

$$B = \frac{-p^{n-m-1} + q^{n-m-1}}{n(p^n - q^n)}.$$

Da ferner die Wurzeln der Gleichung, $xx - 2x\cos\varphi + 1 = 0$, ſind $p = \cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}$, und $q = \cos\varphi - \sin\varphi . \sqrt{-1}$, ſo iſt $p^n = \cos n\varphi + \sin n\varphi . \sqrt{-1}$, und $q^n = \cos n\varphi - \sin n\varphi . \sqrt{-1}$, alſo $p^n - q^n = 2 \sin n\varphi . \sqrt{-1}$. Eben ſo iſt $p^{n-m} - q^{n-m} = 2 \sin(n-m)\varphi . \sqrt{-1}$; und $p^{n-m-1} - q^{n-m-1} = 2 \sin(n-m-1)\varphi . \sqrt{-1}$. Der $\sin n\varphi$ iſt immer $= \sin\alpha$, für jeden Werth von φ. Alſo iſt

$$A = \frac{\sin(n-m)\varphi}{n \sin\alpha},$$

$$B = -\frac{\sin(n-m-1)\varphi}{n \sin\alpha},$$

wo für φ nach der Reihe die Werthe $\frac{\alpha}{n}$, $\frac{2\pi + \alpha}{n}$, $\frac{4\pi + \alpha}{n}$, etc. zu ſetzen ſind, bis daß man n derſelben genommen hat. Irgend einer dieſer Winkel, $\frac{2k\pi + \alpha}{n}$, giebt $(n-m)\varphi = 2k\pi - \frac{2mk\pi - (n-m)\alpha}{n}$, alſo $\sin(n-m)\varphi = -\sin\frac{2mk\pi - (n-m)\alpha}{n}$. (Co-

niometrie, 16). Setzt man $n-k$ ſtatt k, ſo iſt $\sin(n-m)\varphi = -\sin(2m\pi - \frac{2mk\pi + (n-m)\alpha}{n}) = +\sin\frac{2mk\pi + (n-m)\alpha}{n}$. In dem Coefficienten B iſt $m+1$ ſtatt m zu ſetzen. Man ſehe noch Eulers Differentialrechnung, p. 879.

Eine von dieſen Methoden, rationale Brüche in einfache aufzulöſen, ganz verſchiedene, hat Euler in den Actis Acad. Petrop. T. IV. a. a. 1780. vorgetragen.

II. Claſſe, in welcher der Differentialquotient eine irrationale Function von x iſt.

48. Die mit Wurzelgrößen behafteten Differentialformeln können manchmahl rational gemacht werden, wie in folgenden Beyſpielen.

I. Die Formel $X\partial x(a+bx)^{\mu:\nu}$, worin X eine Function von x iſt, wird eine rationale dadurch, daß $a+bx=z^\nu$ geſetzt wird. Dieſes giebt $x=\frac{z^\nu - a}{b}$, und $\partial x = \frac{\nu}{b} z^{\nu-1}\partial z$. Durch die Subſtitution für x wird X eine rationale Function von z, die Z heiße, und es erhält daher die Formel die Geſtalt $\frac{\nu}{b} Z z^{\mu+\nu-1}\partial z$.

II. Es ſey $\partial y = X\partial x\left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\mu:\nu}$. Man ſetze $\frac{a+bx}{f+gx}=z^\nu$, ſo iſt $x=\frac{a-fz^\nu}{gz^\nu - b}$, und $\partial x = \frac{\nu(bf-ag)z^{\nu-1}dz}{(gz^\nu - b)^2}$. Durch die Subſtitutionen dieſer Werthe wird die Differentialformel rational.

III. Es ſey $\partial y = x^{m-1}\partial x\,(a+bx^n)^{\mu:\nu}$. Man ſetze $a+bx^n = u^\nu$, ſo verwandelt ſich die Formel in $\frac{\nu}{n}u^{\mu+\nu-1}du\left(\frac{u^\nu - a}{b}\right)^{\frac{m-n}{n}}$. Dieſe iſt rational, wenn $\frac{m-n}{n}$ oder $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl, poſitive oder negative, iſt.

Oder man ſetze $a+bx^n = x^n z^\nu$, ſo wird dadurch die Formel verwandelt in $\frac{-\nu a^{m:n+\mu:\nu} z^{\mu+\nu-1}\partial z}{n(z^\nu - b)^{m:n+\mu:\nu+1}}$.

Sie iſt rational, wenn $\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}$ eine ganze Zahl iſt.

IV. Es ſey $\partial y = \frac{X\partial x}{\sqrt{(a+bx+xx)}}$. Man ſetze die Wurzelgröße $= x+z$, ſo iſt, durch Erhebung aufs Quadrat, $a+bx = 2zx+zz$, und $x = \frac{a-zz}{2z-b}$, wovon das Differential $\partial x = -\frac{2(a-bz+zz)z\partial z}{(2z-b)^2}$.

Vermittelſt dieſer Werthe wird $\partial y = Z\partial z$, wo Z eine rationale Function von z iſt.

V. Es ſey $\partial y = X\sqrt{(a+bx-xx)}$. Man ſetze $xx-bx-a = (x-p)(x+q)$, ſo ſind p und $-q$ die möglichen Wurzeln der Gleichung, $xx-bx-a=0$, und es iſt $a+bx-xx = (p-x)(q+x)$. Nun ſey $\sqrt{(p-x)(q+x)} = (p-x)z$, ſo iſt durch Erhebung, $q+x = (p-x)z^2$, alſo $x = \frac{pz^2-q}{zz+1}$. Dadurch wird $\partial y = Z\partial z$, wo Z eine rationale Function von z iſt.

VI. Es ſey $\partial y = \partial x \sqrt{(a + 2bx + cxx)}$.

Man ſetze $a + 2bx + cxx = \frac{bb - ac}{uu - c}$,

oder $ac + 2bcx + c^2x^2 = \frac{bbc - acc}{uu - c}$,

ſo iſt

$$bb + 2bcx + c^2x^2 = \frac{(bb - ac)uu}{uu - c},$$

und, $bb - ac = e^2$ geſetzt, wenn nämlich $bb > ac$ iſt,

$$b + cx = \frac{eu}{\sqrt{(uu - c)}},$$

$$c\partial x = \frac{e\partial u}{\sqrt{(uu - c)}} - \frac{eu^2\partial u}{(uu - c)^{\frac{3}{2}}},$$

$$c\partial y = \frac{e^2\partial u}{uu - c} - \frac{e^2u^2\partial u}{(uu - c)^2}.$$

Iſt $b^2 < ac$, ſo ſey $ac - bb = ee$, und

$a + 2bx + cxx = \frac{ee}{c - uu}$. Dadurch iſt

$$c\partial y = \frac{ee\partial u}{c - uu} + \frac{eeuu\partial u}{(c - uu)^2}.$$

Auf gleiche Weiſe iſt

$$\frac{\partial x}{\sqrt{(a + 2bcx + cxx)}} = \partial u - \frac{uu\partial u}{uu - c},$$

in beiden Fällen des Verhaltens zwiſchen ac und bb.

VII. Wenn X in dem Differential $X\partial x$ auſſer $\sqrt{(a + bxx)}$, und den ganzen Potenzen dieſer Wurzel keine andere irrationale Function von x, noch eine transſcendente enthält, ſo ſetze man $\sqrt{(a + bx^2)} = \frac{z^2 + a}{2z}$,

und es iſt $x = \frac{zz - a}{2z\sqrt{b}}$; $\partial x = \frac{(zz + a)\partial z}{2zz\sqrt{b}}$,

und $z = x\sqrt{b} + \sqrt{(a + bxx)}$.

VIII. Mehrere Arten der Subſtitution ſehe man in Eulers Abhandlung: de integratione formularum differentialium irrationalium. Acta Acad. Petrop. T. IV. Noch eine hieher gehörige Abhandlung aus Eulers Nachlaß iſt in dem vierten Theile der neuen Ausgabe der Integralrechnung, S. 48 — 59. anzutreffen.

Die gegenwärtige Abſicht geht aber mehr dahin, unmittelbar die Integrale zu finden, als auf jenem Wege, der wieder eine Zurückbringung von x nöthig machen kann. Mit den einfachſten Integrationen, deren Gebrauch am häufigſten iſt, wird es dienlich ſeyn, anzufangen, da die allgemeinern auf ſie zurückgebracht werden. Die Beweiſe ſind aus dem Artickel, Differentialformel, zu nehmen.

49. $\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{(aa - xx)}}$.

$$y = \text{Ang. sin}\ \frac{x}{a} + C.$$

Iſt $\partial y = - \frac{\partial x}{\sqrt{(aa - xx)}}$, ſo iſt

$y = \text{Ang. coſ}\ \frac{x}{a} + C$, wo $C = -\frac{1}{2}\pi$ iſt, wenn y mit x zugleich = o ſeyn ſoll.

50. $\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{(aa + xx)}}$,

$$y = \log. \frac{\sqrt{(aa + xx)} + x}{\text{conſt.}} = \log. \frac{aa : C}{\sqrt{(aa + xx)} - x}$$

Es ſey $\frac{x}{a} = \text{tang}\ \varphi$, ſo iſt $\sqrt{(aa + xx)} + x$ $= a(\text{ſec}\ \varphi + \text{tang}\ \varphi) = a\ \text{tang}\ (45° + \frac{1}{2}\varphi)$ (Goniometrie, 48.), und

$$y = \log.\ \text{tang}\ (45° + \tfrac{1}{2}\varphi) + C.$$

51. $\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{(xx - aa)}}$.

$$y = \log. \frac{x + \sqrt{(xx - aa)}}{\text{conſt.}} = \log \frac{aa.C}{x - \sqrt{(xx - aa)}}.$$

Iſt $\frac{x}{a} = \sec \varphi$, ſo iſt

$$y = \log.\ \text{tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi) + C.$$

52. $\partial y = \frac{a\,\partial x}{x\sqrt{(aa - xx)}}$.

$$y = \log. \frac{a - \sqrt{(aa - xx)}}{x} + C. = \log \frac{x}{a + \sqrt{(aa - xx)}}$$

$$= \tfrac{1}{2} \log \frac{a - \sqrt{(aa - xx)}}{a + \sqrt{(aa - xx)}}.$$

Die dritte Formel für y entſteht durch Halbirung der Summe der beiden erſten.

Iſt $\frac{x}{a} = \sin \varphi$, ſo iſt $y = \log.\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\varphi + C$.

Denn $\frac{a - \sqrt{(aa - xx)}}{x} = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} =$ $\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi$, (Goniometrie. 38.). Der dritte Ausdruck für y verwandelt ſich in $\tfrac{1}{2} \log \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$.

53. $\partial y = \frac{a\,\partial x}{x\sqrt{(aa + xx)}}$.

$$y = \log. \frac{\sqrt{(aa + xx)} - a}{x} + C$$

$$= \log. \frac{x}{\sqrt{(aa + xx)} + a} = \tfrac{1}{2} \log. \frac{\sqrt{(aa + xx)} - a}{\sqrt{(aa + xx)} + a}.$$

Iſt $\frac{x}{a} = \text{tang}\ \varphi$, ſo iſt $y = \log.\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\varphi + C$.

54. $\partial y = \dfrac{a \partial x}{x \sqrt{(xx - aa)}}$.

$y = \text{Ang. sec} \dfrac{x}{a} + C = \text{Ang. coſ} \dfrac{a}{x} + C.$

55. $\partial y = \dfrac{\partial x}{\sqrt{(2ax - xx)}}$.

$y = \text{Ang. ſin verſ.} \dfrac{x}{a} + C = \text{Ang. coſ} \dfrac{a-x}{a} + C.$

56. $\partial y = \dfrac{\partial x}{\sqrt{(2ax + xx)}}$.

$y = \log. \dfrac{a + x + \sqrt{(2ax + xx)}}{\text{conſt.}}$.

Es ſey $\dfrac{a+x}{a} = \text{ſec}\,\varphi$, ſo iſt $\text{tang}\,\varphi^2$

$= \left(\dfrac{a+x}{a}\right)^2 - 1 = \dfrac{2ax + xx}{a^2}$, und

$y = \log. \text{tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi) + C.$

57. $\partial y = \partial x \sqrt{(a + bxx)}$.

$y = \tfrac{1}{2} x \sqrt{(a + bxx)} + \tfrac{1}{2} a \int \dfrac{\partial x}{\sqrt{(a + bx^2)}}$

Erhellt durch die Differentiation, oder aus (59. V.)

58. $\partial y = \partial x \sqrt{(2ax + bx^2)}$.

$y = \dfrac{a + bx}{2b} \sqrt{(2ax + bx^2)}$

$- \dfrac{a^2}{2b} \int \dfrac{\partial x}{\sqrt{(2ax + bxx)}}$.

59. Es ſey $\partial y = x^{m-1}(a + bx^n)^p \partial x$, wo m, n, p ganze oder gebrochne, poſitive oder negative Zahlen, ſeyn mögen. Sind $m - 1$ und n gebrochne rationale Zahlen, jene $= \dfrac{\alpha}{\beta}$, dieſe $= \dfrac{\gamma}{\delta}$, ſo ſetze man

$x = u^{\beta\delta}$, und es iſt $x^{\alpha:\beta} = u^{\alpha\delta}$, und $x^{\gamma:\delta} = u^{\beta\gamma}$; $\partial x = \beta\delta u^{\beta\delta-1}\partial u$, wodurch die Exponenten der eintheiligen Größen alle ganze Zahlen werden. (Vergl. 37.)

Es ſollen nun alle Arten gefunden werden, wie das vorgegebene Differential auf die Integration eines einfachern Differentials zurück geführt werden kann, entweder durch Verminderung des Exponenten von x in dem monomiſchen Factor, oder durch Verminderung des Exponenten von dem Binomium, oder beider.

Man differentiire das Product $x^\alpha (a + bx^n)^\beta = v$, und ſetze noch zur Abkürzung $a + bx^n = z$, ſo daß $x^\alpha z^\beta = v$. Es iſt

$$\alpha x^{\alpha-1} z^\beta \partial x + \beta x^\alpha z^{\beta-1} \partial z = \partial v,$$

alſo, für ∂z ſeinen Werth geſetzt,

$$\text{I.}\quad \alpha x^{\alpha-1} z^\beta \partial x + n\beta b x^{\alpha+n-1} z^{\beta-1} \partial x = \partial v.$$

In dem erſten Gliede des erſten Theils ſetze man $(a + bx^n) z^{\beta-1}$ für z^β, ſo iſt

$$\text{II.}\quad \alpha a x^{\alpha-1} z^{\beta-1} \partial x + (\alpha + n\beta) b x^{\alpha+n-1} z^{\beta-1} \partial x = \partial v.$$

In dem zweyten Gliede des erſten Theils (I.) ſetze man $z - a$ für bx^n, ſo iſt

$$\text{III.}\quad (\alpha + n\beta) x^{\alpha-1} z^\beta \partial x - n\beta a x^{\alpha-1} z^{\beta-1} \partial x = \partial v.$$

Hieraus ergeben ſich, indem ∂y den einen oder den andern Theil von ∂v bedeuten kann, drey Paare Differentialformeln, deren Integrale einen algebraiſchen und einen involutoriſchen (ſummatoriſchen) Theil enthalten.

$$\text{I.}\quad \int x^{m-1} (a + bx^n)^p \partial x = \frac{1}{m} x^m (a + bx^n)^p - \frac{npb}{m} \int x^{m+n-1} (a + bx^n)^{p-1} \partial x.$$

$$\text{II. } \int x^{m-1}(a+bx^n)^p \partial x = \frac{1}{n(p+1)b} x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} - \frac{m-n}{n(p+1)b}\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^{p+1}\partial x.$$

$$\text{III. } \int x^{m-1}(a+bx^n)^p \partial x = \frac{1}{ma} x^{m}(a+bx^n)^{p+1} - \frac{(m+np+n)b}{ma}\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^{p}\partial x.$$

$$\text{IV. } \int x^{m-1}(a+bx^n)^p \partial x = \frac{1}{(m+np)b} x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} - \frac{(m-n)a}{(m+np)b}\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^{p}\partial x.$$

$$\text{V. } \int x^{m-1}(a+bx^n)^p \partial x = \frac{1}{m+np} x^{m}(a+bx^n)^{p} + \frac{npa}{m+np}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}\partial x.$$

$$\text{VI. } \int x^{m-1}(a+bx^n)^p \partial x = -\frac{1}{n(p+1)a} x^{m}(a+bx^n)^{p+1} + \frac{m+np+n}{n(p+1)a}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p+1}\partial x.$$

60. I. Es ſey $m - kn - 1 = \mu - 1$, wo k eine ganze poſitive Zahl iſt, ſo wird nach den Formeln II. oder IV. die Integration von $x^{m-1}(a+bx^n)^p \partial x$ auf die von $x^{\mu-1}(a+bx^n)^{p+k}\partial x$ oder die von $x^{\mu-1}(a+bx^n)^p \partial x$ gebracht. Iſt nun $\mu = n$, das iſt, $m = (k+1)n$, ſo iſt das Integral algebraiſch nach (4.). Der zweyte Theil enthält den Coefficienten $\mu - n = 0$.

II. Es ſey $m + kn - 1 = \mu - 1$, ſo wird durch ſucceſſive Integration nach den Formeln, I. oder III. die Integration von $x^{n-1}(a+bx^n)^p \partial x$ auf die von $x^{\mu-1}(a+bx^n)^{p-k}\partial x$ oder auf die von

$x^{\mu-1}(a+bx^n)^p\partial x$ gebracht. Iſt $\mu=n$, ſo iſt in dem erſten Falle (I.) das Integral algebraiſch. Iſt $\mu+np+n=0$, ſo iſt in III. der Coefficient des zweyten Theils $=0$, und das Integral iſt algebraiſch, nämlich $=\frac{1}{\mu a}x^{\mu}(a+bx^n)^{p+1}$. In dieſem zweyten Falle iſt $m=-(k+p+1)n$, oder $\frac{m}{n}+p=-k-1$.

III. Es ſey $p+k=q$, und $m+n(q+1)=0$. Nach der Formel VI. wird die Integration von $x^{m-1}(a+bx^n)^p\partial x$ auf die von $x^{m-1}(a+bx^n)^p\partial x$ gebracht. Da $m+n(q+1)=0$, ſo iſt das Integral algebraiſch, und $=-\frac{1}{n(q+1)a}x^m(a+bx^n)^{q+1}$. In dieſem Falle iſt $p=-\left(\frac{m}{n}+k+1\right)$. Die Bedingung iſt dieſelbe mit der nächſt vorher gemachten.

IV. Iſt p eine ganze poſitive Zahl, ſo wird der binomiſche Differentialfactor in eine endliche Reihe verwandelt, nach dem binomiſchen Lehrſatze, und das Differential iſt aus einer endlichen Reihe monomiſcher Potenzen von x zuſammen geſetzt, wovon das Integral nach (2.) leicht gefunden wird.

V. Iſt p eine ganze negative Zahl, und ſind m und n ganze Zahlen, oder werden auf ſolche gebracht, ſo wird nach den Formeln II. oder VI die Integration von $x^{m-1}(a+bx^n)^p\partial x$ auf die von $\frac{x^{m-p}\partial x}{a+bx^n}$ oder von $\frac{x^{m-1}\partial x}{a+bx^n}$ gebracht, welche in (36. 38.) gezeigt iſt.

VI. Iſt $n=2$ und p ein Bruch von der Form $\pm\frac{2k+1}{2}$ ſo wird nach den Formeln I. V. ein poſi-

tiver Exponent des Binomium, und ein negativer nach den Formeln II. VI. ſucceſſiv um 1 vermindert, ſo daß man zuletzt auf ein Differential $\frac{x^r \partial x}{\sqrt{(a + bx^2)}}$ kommt. Dieſes läßt ſich durch ſucceſſive Verminderung des Exponenten r, wenn dieſer eine ganze, poſitive oder negative Zahl iſt, auf dieſes, $\frac{\partial x}{\sqrt{(a + bx^2)}}$, oder auf $\frac{\partial x}{x\sqrt{(a + bx^2)}}$ bringen, wovon die Integrale in (52. 53. 54.) angegeben ſind.

VII. Iſt $n = 2r$, und m durch r theilbar, ſo ſetze man $x^r = u$, ſo iſt $x^n = u^2$, und $x^m = u^{m:r}$; $m x^{m-1} \partial x = \frac{m}{r} u^{m:r-1} \partial u$, oder $x^{m-1} \partial x = \frac{1}{r} u^{m:r-1} \partial u$. Daher läßt ſich in dieſem Falle das Differential $x^{m-1}(a + bx^n)^p \partial x$ auf eine der gleich vorher bemerkten Formen bringen.

VIII. Differentialformeln von der Form, $x^m (1 - xx)^{p:2} \partial x$, wo p eine ungerade ganze Zahl iſt, laſſen ſich vollſtändig durch Functionen eines Winkels integriren, die Exponenten m und p, mögen poſitiv oder negativ ſeyn, nur ſey m wie p eine ganze Zahl. Man ſetze $x = \sin\varphi$, ſo iſt $\sqrt{(1 - xx)} = \cos\varphi$, und $\partial x = \partial\varphi \cos\varphi$, folglich jenes Differential $= \partial\varphi \sin\varphi^m . \cos\varphi^{p-1}$, wovon die Integration in dem vierten Abſchnitte dieſes Artikels gezeigt wird. Das Differential $x^m (aa - bbxx)^{p:2} \partial x$ läßt ſich leicht auf jene Form bringen. Die Differentiale, $x^m (1 + xx)^{p:2} \partial x$, und $x^m (xx - 1)^{p:2} \partial x$, laſſen ſich auf ähnliche Art durch Functionen von hyperboliſchen Sinus und Coſinus vollſtändig integriren, da der Sector einer gleichſeitigen Hyperbel iſt $\int \frac{\partial x}{2\sqrt{(xx + 1)}}$, wenn x der hyperboliſche

Sinus iſt, und $= \int \frac{\partial x}{2\sqrt{(xx-1)}}$, wenn x der hyperboliſche Coſinus iſt. Es müßten nur für die hyperboliſchen Sectoren Tafeln berechnet ſeyn, wie man ſie für Kreisſectoren oder Kreisbogen hat.

61. $$\partial y = \frac{x^{m-1}\partial x}{\sqrt{(a+bxx)}}.$$

$$y = \frac{1}{(m-1)b} x^{m-2} \sqrt{(a+bxx)} - \frac{(m-2)a}{(m-1)b} \int \frac{x^{m-3}\partial x}{\sqrt{(a+bxx)}}.$$

62. Hieraus fließen folgende Formeln, die oft gebraucht werden. Der Kürze wegen ſey $\sqrt{(1-xx)} = z$.

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \text{Ang. sin } x.$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \tfrac{1}{2}\,\text{Ang. ſin}\,x - \tfrac{1}{2}xz.$$

$$\int \frac{x^4\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1.3}{2.4}\,\text{Ang. ſin}\,x - \frac{1.3}{2.4}xz - \tfrac{1}{4}x^3z.$$

$$\int \frac{x^6\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\text{Ang. ſin}\,x - \frac{1.3.5}{2.4.6}xz - \frac{1.5}{4.6}x^3z - \tfrac{1}{6}x^5z.$$

$$\int \frac{x^8\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\text{Ang. ſin}\,x - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}xz - \frac{1.5.7}{4.6.8}x^3z - \frac{1.7}{6.8}x^5z - \tfrac{1}{8}x^7z.$$

u. ſ. f. Die Conſtante iſt noch beyzufügen. Soll das Integral mit $x=0$ anfangen, ſo iſt die Conſtante $=0$.

63. Daher ferner folgende Integrale.

$$\int \frac{x \partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = C - z.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = C - \tfrac{2}{3} z - \tfrac{1}{3} x^2 z.$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = C - \frac{2.4}{3.5} z - \frac{1.4}{3.5} x^2 z - \tfrac{1}{5} x^4 z.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = C - \frac{2.4.6}{3.5.7} z - \frac{1.4.6}{3.5.7} x^2 z$$

$$- \frac{1.6}{5.7} x^4 z - \tfrac{1}{7} x^6 z.$$

Soll das Integral mit $x = 0$ anfangen, ſo iſt $C = \frac{2.4.6 \ldots 2n}{3.5.7 \ldots 2n+1}$, wenn $2n + 1$ der Exponent von x iſt. Für $x = 0$ iſt $z = 1$.

64. Das Integral, $\int \frac{x^{2n} \partial x}{\sqrt{(1-xx)}}$ ſey $= 0$ für $x = 0$, ſo iſt für $x = 1$ der Werth deſſelben

$$= \frac{1.3.5.7 \ldots 2n - 1.}{2.4.6.8 \ldots 2n} \cdot \tfrac{1}{2}\pi.$$

Bey eben dieſer Vorausſetzung iſt der Werth des Integrals,

$$\int \frac{x^{2n+1} \partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{2.4.6 \ldots 2n}{3.5.7 \ldots 2n+1.}$$

Wird n unendlich groß genommen, ſo iſt es einerley, ob man das eine oder das andere Integral nimmt. Dadurch iſt $\tfrac{1}{2}\pi = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8 \ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9 \ldots}$, wie in dem Artikel, Cyklometrie, 29; und dem Art. Einſchalten, 49.

65. $$\partial y = \frac{\partial x}{x^m \sqrt{(a + bxx)}}.$$

$$y = \text{Const.} - \frac{1}{(m-1)a} \cdot \frac{\sqrt{(a+bxx)}}{x^{m-1}}$$

$$- \frac{(m-2)b}{(m-1)a} \cdot \int \frac{\partial x}{x^{m-2}\sqrt{(a+bxx)}}.$$

Das Integral iſt algebraiſch, wenn m gerade iſt, nach (60. II.), und hängt vom Kreiſe oder von den Logarithmen ab, wenn m ungerade iſt.

66. Es ſey $x = \sin\varphi$, und $\sqrt{(1-xx)} = z$, ſo iſt

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{(1-xx)}} = C + \log.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3\sqrt{(1-xx)}} = C - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{z}{x^2} + \tfrac{1}{2}\log.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5\sqrt{(1-xx)}} = C - \tfrac{1}{4} \cdot \frac{z}{x^4} - \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{z}{x^2}$$

$$+ \frac{1.3}{2.4}\log.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^7\sqrt{(1-xx)}} = C - \tfrac{1}{6} \cdot \frac{z}{x^6} - \frac{1.5}{4.6} \cdot \frac{z}{x^4}$$

$$- \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{z}{x^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\log.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi.$$

u. ſ. f.

67. $$\int \frac{\partial x}{x^2\sqrt{(1-xx)}} = C - \frac{z}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4\sqrt{(1-xx)}} = C - \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{x^3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6\sqrt{(1-xx)}} = C - \frac{1}{5} \cdot \frac{z}{x^5} - \frac{1.4}{3.5} \cdot \frac{z}{x^3}$$

$$- \frac{2.4}{3.5} \cdot \frac{z}{x}.$$

u. ſ. f.

68. Es iſt, wenn $\sqrt{(x-1)} = u$ geſetzt wird,

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{(xx-1)}} = \text{Ang. coſ} \frac{a}{x}, \text{ aus } (54.).$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3\sqrt{(xx-1)}} = + \frac{1}{2} \cdot \frac{u}{x^2} + \tfrac{1}{2}\,\text{Ang. coſ} \frac{a}{x},$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5\sqrt{(xx-1)}} = + \frac{1}{4} \cdot \frac{u}{x^4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{u}{x^2}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\, \text{Ang. coſ} \frac{a}{x}.$$

u. ſ. f.

69. $\int x^{m-1}(a+bxx)^{\frac{1}{2}}\partial x = \frac{1}{(m+1)b} \cdot$

$$x^{m-2}(a+bxx)^{\frac{3}{2}} - \frac{(m-2)a}{(m+1)b}\int x^{m-3}(a+bxx)^{\frac{1}{2}}\partial x.$$

Für den involutoriſchen Theil dienen die Formeln,

$$\int x\partial x\sqrt{(a+bxx)} = \frac{1}{3b}(a+bxx)^{\frac{3}{2}}.$$

$$\int \partial x\sqrt{(a+bxx)} = \tfrac{1}{2}x(a+bxx)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{a}{2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{(a+bxx)}}.$$

Das Integral in der zweyten Formel iſt in einer der Formeln, 49. 50. 51. enthalten. Auf das eine oder das andere jener beiden Integrale kommt man durch die ſucceſſive Verminderung des Exponenten von x.

Es iſt auch $\int x^{m-1}(a+bxx)^{\frac{1}{2}}\partial x$

$$= \frac{1}{m+1}x^m(a+bxx)^{\frac{1}{2}} + \frac{a}{m+1}\int \frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bxx)^{\frac{1}{2}}},$$

wovon der zweyte Theil durch die Formel in (61.) gefunden wird.

70. $$\partial y = \frac{\partial x \sqrt{(a+bxx)}}{x^m},$$

$$y = C - \frac{1}{(m-1)a} \cdot \frac{(a+bxx)^{\frac{3}{2}}}{x^{m-1}}$$

$$- \frac{(m-4)b}{(m-1)a} \int \frac{\partial x \sqrt{(a+bxx)}}{x^{m-2}}.$$

71. $$\partial y = \frac{x^m \partial x}{\sqrt{(2ax+bxx)}}.$$

$$y = C + \frac{1}{mb} x^{m-1} \sqrt{(2ax+bxx)}$$

$$- \frac{(2m-1)a}{mb} \int \frac{x^{m-1} \partial x}{\sqrt{(2ax+bxx)}}.$$

72. $$\partial y = \frac{\partial x}{x^m \sqrt{(2ax+bxx)}}.$$

$$y = C - \frac{1}{(2m-1)a} \cdot \frac{\sqrt{(2ax+bxx)}}{x^m}$$

$$- \frac{(m-1)b}{(2m-1)a} \int \frac{\partial x}{x^{m-1} \sqrt{(2ax+bxx)}}.$$

73. $$\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{(a+2bx+xx)}}.$$

$$y = \log(b+x+\sqrt{(a+2bx+xx)}) + C.$$

Man ſetze $x = u - b$, ſo wird

$\partial y = \dfrac{\partial u}{\sqrt{(uu+a-bb)}}$. Davon iſt das Integral in (50.) oder (51.) angegeben, nach dem a größer oder kleiner als b b iſt. Setzt man darin für u ſeinen Werth durch x zurück, ſo erhält man die hier aufgeſtellte Integralformel.

Oder man ſetze, um die Formel rational zu machen, $xx + 2bx + a = (x+z)^2$, ſo iſt $x = \frac{zz - a}{2(b-z)}$, und $x + z = \frac{2bz - zz - a}{2(b-z)}$. Ferner $\partial x = \frac{2bz - zz - a}{2(b-z)^2} \partial z$. Alſo iſt $\partial y = \frac{\partial z}{b-z}$, und $y = \log \frac{1}{b-z}$. Für z werde deſſen Werth aus der Gleichung, $zz + 2xz = 2bx + a$, geſetzt, ſo erhält man dieſelbe Integralformel für y.

74. $\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{(a + 2bx - xx)}}$.

$$y = \text{Ang. sin} \frac{x-b}{\sqrt{(a+bb)}} + C.$$

oder $y = \text{Ang. coſ} \frac{b-x}{\sqrt{(a+bb)}} + C.$

Denn man ſetze $x = u + b$, ſo iſt $\partial y = \frac{\partial u}{\sqrt{(a+bb-uu)}}$, und $y = \text{Ang. sin} \frac{u}{\sqrt{(a+bb)}}$ aus (49.). Setzt man $x = b - u$, ſo iſt auch $\partial y = \frac{-\partial u}{\sqrt{(a+bb-uu)}}$, alſo $y = \text{Ang. coſ} \frac{u}{\sqrt{(a+bb)}}$. Die Conſtanten in den beiden Werthen von y ſind verſchieden. Es iſt nämlich nach der erſten Formel, $y = C - \text{Ang. sin} \frac{b-x}{\sqrt{(a+bb)}}$ $= C - \frac{1}{2}\pi + \text{Ang. coſ} \frac{b-x}{\sqrt{(a+bb)}}$. Die Conſtan-

te in der zweyten Formel werde durch die Bezeichnung C' unterſchieden, ſo iſt $C' = C - \frac{1}{2}\pi$, und $C - C' = \frac{1}{2}\pi$.

75. Um die Formel rational zu machen, ſetze man $a + 2bx - xx = (p + x)(q - x)$, ſo iſt $pq = a$; $q - p = 2b$. Iſt a poſitiv, ſo ſind p und q mögliche Größen (Gleichung 34); iſt a negativ, ſo iſt p negativ zu nehmen, ſo daß $pq = a$; $q + p = 2b$, daher (nach Gleichung 36.) $a < bb$ ſeyn muß. In dem Falle, da $a > bb$ iſt, hätte die Function $a - 2bx + xx$ keine andere als poſitive Werthe (Gleichung, 46.), die Function $-a + 2bx - xx$ alſo durchaus negative, und das Differentialverhältniß $\partial y : \partial x$ wäre für jeden Werth von x ein unmögliches.

Man ſetze $\frac{p + x}{q - x} = zz$, ſo iſt $x = \frac{qzz - p}{1 + zz}$,

und $\partial x = \frac{2(p + q)z\partial z}{(1 + zz)^2}$. Da

$\sqrt{(a + 2bx - xx)} = (q - x)z = \frac{(p + q)z}{1 + zz}$ iſt,

ſo iſt $\partial y = \frac{2\partial z}{1 + zz}$, und

$$y = 2 \text{ Ang. tang } z, \text{ das iſt}$$

$$y = 2 \text{ Ang. tang } \frac{\sqrt{(p + x)}}{\sqrt{(q - x)}} + C,$$

oder $y = \text{Ang. coſ } \frac{q - p - 2x}{p + q} + C.$

Es iſt nämlich, wenn φ den Winkel zu der Tangente $\frac{\sqrt{(p + x)}}{\sqrt{(q - x)}}$ bezeichnet, $\sec \varphi^2 = \frac{p + q}{q - x}$;

$\cos \varphi^2 = \frac{q - x}{p + q}$; $\cos 2\varphi = 2 \cos \varphi^2 - 1$

$= \frac{q - p - 2x}{p + q}$, (Goniometrie, 36.).

Da $pq = a$; $q - p = 2b$; ſo iſt $(q+p)^2 = (q-p)^2 + 4pq = 4b^2 + 4a$. Dadurch wird erhalten $y = \text{Ang. coſ} \frac{b - x}{\sqrt{(a + bb}}$, wie nach der erſten Auflöſung.

76. $\partial y = \frac{a \partial x}{x\sqrt{(xx + 2bx - aa)}}$.

$$y = \text{Ang. sin} \frac{bx - aa}{cx} + C.$$

wo $c = \sqrt{(aa + bb)}$ iſt.

Das Integral folgt aus der Vergleichung der Differentialformel in Th. I. S. 873. Nr. 36. mit der vorgegebenen.

Es iſt auch $y = \text{Ang. coſ} \frac{aa - bx}{cx} + C$,

wo aber die Conſtante eine andere als in der erſtern Formel iſt. Denn in dieſer ſetze man $C = C' + \frac{1}{2}\pi$, ſo iſt

$$y = C' + \tfrac{1}{2}\pi - \text{Ang. sin} \frac{aa - bx}{cx} =$$

$$C' + \text{Ang. coſ} \frac{aa - bx}{cx}.$$

77. $\partial y = \frac{a \partial x}{x\sqrt{(xx + 2bx + aa)}}$.

$$y = \log \frac{\pm a\sqrt{(xx + 2bx + aa)} \mp bx \mp aa)}{cx} + C,$$

wo $cc = aa - bb$, oder $cc = bb - aa$ iſt, jenes für das obere Vorzeichen, dieſes für das untere.

I. Denn man ſetze $\frac{bx + aa}{cx} = z$, ſo iſt

$\partial z = -\frac{aa\partial x}{cxx}$, und $\sqrt{(zz + 1)} =$

$\frac{a\sqrt{(xx+2bx+aa)}}{cx}$, wenn $cc+bb=aa$ iſt.

Es iſt alſo $\partial y = -\frac{\partial z}{\sqrt{(zz+1)}}$, und $y=\log(\sqrt{(zz+1)}-z)$, (50.), da überhaupt $\log\frac{\alpha}{\beta} = -\log\frac{\beta}{\alpha}$ iſt. Setzt man für z deſſelben Werth, ſo entſteht die angegebene Formel.

II. Es bleibe $z=\frac{bx+aa}{cx}$, ſo iſt $\sqrt{(zz-1)} = \frac{a\sqrt{(xx+2bx+aa)}}{cx}$, wenn hier $bb-cc=aa$ genommen wird. Nun iſt $\partial y = -\frac{\partial z}{\sqrt{(zz-1)}}$, und daher $y=\log(z-\sqrt{(zz-1)})$ aus (51.). Setzt man hier für z deſſelben Werth, ſo wird das angegebene Integral mit den untern Vorzeichen erhalten.

78. $\partial y = \frac{a\partial x}{x\sqrt{(aa+2bx-xx)}}$.

$$y=\log.\frac{aa+bx-a\sqrt{(aa+2bx-xx)}}{cx},$$

wo $cc=aa+bb$ iſt.

Die Rechnung iſt der in (77.) ähnlich.

79. Durch Hülfe der Formeln (73—78.) läßt ſich das Integral von $\frac{x^m\partial x}{\sqrt{(a+2bx+cxx)}}$ finden.

Denn es ſey $\sqrt{(a+2bx+cxx)}=R$, und $y=x^{m-1}R$, ſo iſt

$$\partial y=(m-1)x^{m-2}R\partial x+x^{m-1}\partial R,$$

oder

$$\partial y = \frac{(m-1)x^{m-2}R^2\partial x}{R} + \frac{(b+cx)x^{m-1}\partial x}{R}.$$

Für R^2 werde deſſen Werth geſetzt, ſo iſt

$$\partial y = [(m-1)ax^{m-2}\partial x + (2m-1)bx^{m-1}\partial x + mcx^m\partial x]:R,$$

und

$$\int\frac{cx^m\partial x}{R} = \frac{1}{m}x^{m-1}R - \frac{(m-1)a}{m}\int\frac{x^{m-2}\partial x}{R} - \frac{(2m-1)b}{m}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{R}.$$

Das Integral $\int\frac{x^m\partial x}{R}$ wird alſo aus den Integralen $\int\frac{x^{m-2}\partial x}{R}$ und $\int\frac{x^{m-1}\partial x}{R}$, gefunden. Für $m=1$, ſind dieſe aus den vorher gefundenen Formeln bekannt. Dadurch wird das $\int\frac{x\partial x}{R}$ gefunden. Aus dieſem und $\int\frac{\partial x}{R}$ wird das $\int\frac{x^2\partial x}{R}$ hergeleitet, und ſo weiter für alle folgende ganze Exponenten m.

Aus dem entwickelten Werthe von ∂y läßt ſich auch das $\int\frac{\partial x}{x^m R}$ herleiten.

Euler hat nach einer andern Methode dieſes Integral zu finden gelehrt, in den Actis Acad. Petrop. T. VI. P. II.

80. Die in der Form $\int x^{m:2}(a+bx+cxx)^{p:2}\partial x$ begriffenen Integrale, wo m und p ungerade, poſitive oder negative, ganze Zahlen bedeuten, hängen von der Rectification eines oder mehrerer Kegelſchnitte ab. In einigen

Fällen hängt auch das Integral von

$$\frac{\partial x}{x^n \surd(a + bx + cx^2 + \partial x^3)}$$ davon ab. Sonſt iſt es ein Integral von einer höhern transſcendenten Gattung, als jene ſind, die man irrational transſcendente von der logarithmiſchen oder circularen Gattung nennen möchte. Umſtändlich handelt von dieſen Integrationen d'Alembert in den Mém. de l'Acad. de Berlin. T. II. a. 1746. und T. IV. a. 1748.

81. Über die Integration der Formel

$$\frac{P\partial x}{\surd(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4)}$$ haben La Grange (Mém. de l'Acad. de Turin, 1784, 85.) und Le Gendre Unterſuchungen angeſtellt. Die Methode des letztern, welche in einer einzeln gedruckten Abhandlung ſur les transcendantes elliptiques vorgetragen iſt, hat La Croix in ſeinem Werke über Differential- und Integralrechnung Th. II. S. 52 f. f. mitgetheilt. Die Vergleichung der Functionen, die unter der gedachten Form enthalten ſind, für verſchiedene veränderliche Größen, wie daſelbſt x iſt, hat Euler entdeckt, in den Novis Comment. Act. Petrop. T. XII. und ſie daraus in das Werk von der Integralrechnung P. I. Sect. II. cap. 6. übergetragen. Sie gehört zu der Lehre von den Differentialgleichungen.

82. Wenn der Differentialfactor die Form

$\partial x\left(\frac{a + bx^n}{e + fx^n}\right)^p$ hat, ſo muß der Zähler, $(a + bx^n)^p$, in eine Reihe aufgelöſet werden, wodurch eine Reihe Differentiale von der Form $\frac{x^m \partial x}{(e + fx^n)^p}$ erhalten wird. Dies iſt z. B. der Fall bey der Rectification der Ellipſe. Hier iſt das Differential des Bogens

$$\partial y = \frac{\partial x \surd(1 - e^2 x^2)}{\surd(1 - x^2)}$$ wo x die Abſciſſe von dem

Mittelpuncte aus genommen, und e die Excentricität, für die halbe große Axe als Einheit, iſt. So verfährt man auch mit dem Differential $\frac{\partial x}{(a+bx^n)^p(e+fx^r)^q}$, wo man die Potenz $(a+bx^n)^{-p}$ oder $(e+fx^r)^{-q}$, in eine Reihe auflöſet. Eine ſolche Formel kommt bey der Beſtimmung der Zeit des Schwunges eines einfachen Pendels vor, nämlich $\frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)(aa-xx)}}$, wo a und x die Sinus der halben Winkel ſind, welche das Pendel beym Anfange des Falles, und in irgend einem Theile ſeines Weges mit der Verticalen macht. Der Bruch $\frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$ wird hier in eine Reihe verwandelt.

Es kann auch dienlich ſeyn, in dieſer ſo wie in der erſten Form beide Potenzen in eine Reihe aufzulöſen, und den ganzen Differentialfactor durch die Multiplication beider Reihen in eine einzige zu verwandeln. Für die gemeine elaſtiſche Linie iſt die Differentialgleichung zwiſchen den Coordinaten dieſe:

$$\partial y = \frac{(cc-xx)\partial x}{\sqrt{(a^4-(c^2-x^2)^2)}},\text{ oder}$$

$$\partial y = \frac{(cc-xx)\partial x}{\sqrt{(a^2+c^2-x^2)(a^2-c^2+x^2)}},$$ wo x der Abſtand eines Punctes der Curve von der Richtung der ſpannenden Kraft iſt, oder die y als Abſciſſen in dieſer Richtung genommen werden.

83. Wenn das Integral von $x^{m-1}(a+bx^n)^p\partial x$ weder algebraiſch iſt, noch ſich auf Logarithmen oder Winkelfunctionen bringen läßt, ſo macht es eine eigene Art von transſcendenten Functionen aus. In ſolchen Fällen iſt der Differentialfactor in eine Reihe zu verwandeln, bey welcher man die Einrichtung ſo zu treffen hat, daß ſie con=

vergent ſey, auf ähnliche Art, wie man es bey Logarithmen und Winkeln möglich gemacht hat.

84. Man kann zu dieſem Zwecke erſtlich die Potenz des Binomium in eine Reihe verwandeln, wobey man entweder a oder bx^n zum erſten Gliede des Binomium nimmt. Geſchieht jenes, ſo iſt die Reihe der Exponenten: $0, n, 2n, 3n$, etc. Nimmt man bx^n zum erſten Gliede, ſo iſt die Reihe der Exponenten: $np, np-n, np-2n, np-3n$, etc. Das Differential ∂z wird dadurch in eine Reihe von Potenzen der x verwandelt, deren Exponenten den Unterſchied $\pm n$ haben. Das Integral wird ohne Mühe nach (2.) gefunden. Iſt p ein Bruch, deſſen Nenner eine gerade Zahl iſt, und a oder b negativ, ſo kann man dieſe nicht zum erſten Gliede des Binomium ſetzen, weil dadurch unmögliche Größen entſtänden.

85. Die involutoriſchen Ausdrücke des Integrals III. IV. in 59. geben noch eine andere Form der Reihen für daſſelbe, welche auch ſchon oben in beſondern Fällen gebraucht ſind. Die Potenz des Binomium bleibt in allen Gliedern der Reihe als Factor.

I. In der Integralformel III. ſetze man $p-1$ ſtatt p, ſo iſt

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}\partial x = \frac{1}{ma}x^m(a+bx^n)^p$$
$$-\frac{(m+np)b}{ma}\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}\partial x.$$

Man ſetze nun das Integral, oder

$$y = (Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n}$$
$$+ Ex^{m+4n} + \text{etc.})\ (a+bx^n)^p,$$

da die Exponenten der Potenzen von x in dem involutoriſchen Theile jedesmahl um n zunehmen. Es erhellt leicht, daß

$$A = \frac{1}{ma}; \quad B = -\frac{(m+np)b}{(m+n)a} A;$$

$$C = -\frac{(m+n+np)b}{(m+2n)a} B;$$

$$D = -\frac{(m+2n+np)b}{(m+3n)a} C;$$

etc.

II. In der Integralformel IV. ſetze man auch $p-1$ ſtatt p, ſo iſt, wenn zur Abkürzung

$a + bx^n = u$ geſetzt wird,

$$\int x^{m-1} u^{p-1} \partial x = \frac{1}{(m-n+np)b} x^{m-n} u^p$$

$$- \frac{(m-n)a}{(m-n+np)b} \int x^{m-n-1} u^{p-1} \partial x.$$

Man ſetze nun das Integral, oder

$$y = (Ax^{m-n} + Bx^{m-2n} + Cx^{m-3n} + Dx^{m-4n} + \text{etc.})(a+bx^n)^p,$$

ſo erhellt, wie vorher, daß

$$A = \frac{1}{(m-n+np)b};$$

$$B = -\frac{(m-n)a}{(m-2n+np)b} A;$$

$$C = -\frac{(m-2n)a}{(m-3n+np)b} B;$$

$$D = -\frac{(m-3n)a}{(m-4n+np)b} C;$$

etc.

Die Coefficienten bilden eine Reihe von Brüchen, deren Zähler und Nenner aus Factoren in arithmetiſcher Fortſchreitung beſtehen, ſo daß die Anzahl der Factoren

der Stellenzahl nach dem erſten A gleich iſt, verbunden mit den Gliedern der geometriſchen Reihe, $\frac{a}{b}$, $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, etc. und dem erſten Gliede A.

In Eulers Integralrechnung, T. I. §. 159. ſind dieſe Reihen nach einer andern Methode gefunden. Euler differentiirt das Product $(a+bx^n)^p z$, und ſetzt es dem $x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}\partial x$ gleich. Für z nimmt er eine Reihe mit unbeſtimmten Coefficienten an, ſetzt dieſe in die erhaltene Differentialgleichung, und beſtimmt nun aus den Gleichungen, welche die Coefficienten der zuſammengeſetzten Reihe geben, diejenigen der angenommenen.

Zu merken iſt, daß die durch die eine oder die andere Methode erhaltenen Reihen kein vollſtändiges Integral geben, da die Conſtante fehlt. Wie dieſe allgemein zu beſtimmen ſey, zeigt Euler a. a. O. §. 164. Er findet ſie $= \alpha a^p$, wo α eine willkührliche Größe iſt.

86. La Grange hat eine beſondere Methode angegeben, das Integral einer Reihe zu finden, worin ein Differential aufgelöſet iſt, ſo daß es von einem einfachen Integral abhange. Die Reihe ſey

$$(A + A'U + A''U^2 + A'''U^3 + \text{etc.})\, V\partial x,$$

wo U und V Functionen von x, und A, A', A'', etc. gegebene Größen ſind. Man nehme neben dieſer Reihe noch dieſe an:

$$(1 + aU + a^2U^2 + a^3U^3 + \text{etc.})\, V\partial x,$$

worin die Coefficienten eine geometriſche Reihe ausmachen. Dieſe Reihe entſteht durch die Entwicklung der gebrochnen Function $\frac{V\partial x}{1-aU}$. Das Integral dieſer Function beſteht alſo aus allen einzelnen Integralen der Theile jener Reihe, welches ſo bezeichnet wird:

$$\int \frac{V\partial x}{1-aU} = a^0 \int V\partial x + a\int U V\partial x + a^2 \int U^2 V\partial x$$
$$+ a^3 \int U^3 V\partial x + \text{etc.}$$

Kann man nun das $\int \frac{V\partial x}{1-aU}$ angeben, ſo ſey dieſes $= X$. Dieſes werde nicht nach den Potenzen von x, ſondern nach Potenzen von a in eine Reihe geordnet, und die Function X oder jenes Integral werde nach dieſer Form ſo bezeichnet:

$$\int \frac{V\partial x}{1-aU} = a^0 X1 + a X2 + a^2 X3 + a^3 X4$$
$$+ \text{etc.}$$

Die Functionen X 1, X 2, X 3, X 4, etc. ſind von a ganz unabhängig, da ſie kein a enthalten, ſondern hängen bloß von V und U ab. Nun iſt durch Vergleichung mit dem vorher ſtückweiſe angegebenen Integral

$\int V\partial x = X1$; $\int U V\partial x = X2$;
$\int U^2 V\partial x = X3$; $\int U^3 V\partial x = X4$;
u. ſ. f.

Folglich werden nun dieſe Integrale durch die Functionen X 1, X 2, etc. bekannt; daher wird auch das Integral der zuerſt vorgegebenen Reihe durch die Integrale ihrer Theile gefunden.

Dieſe Methode hat La Grange in den Mém. de Turin 1784—85. vorgetragen, woraus ſie La Croix in ſeiner Integralrechnung §. 417. 418. mittheilt. Ich habe das Verfahren einleuchtender darzuſtellen geſucht. Die beiden Beiſpiele, welche La Croix von der Methode giebt, ſind aber nicht geſchickt, ihre Brauchbarkeit zu zeigen. Bey dem zweyten iſt eine Verwirrung vorgegangen, die durch die in den Verbeſſerungen angezeigte Veränderung noch verſchlimmert wird.

La Croix giebt eben daſelbſt einen Abriß der Methode, welche La Grange angewandt hat, das Integral der

Formel $\frac{P\partial x}{\sqrt{(e+fx^2)(g+hx^2)}}$ zu finden, wenigſtens durch eine ſichere Annäherung, mittelſt einer oder mehrerer Umwandelungen. Er rühmt ſie als eine der meiſterhafteſten.

87. Aus Eulers handſchriftlichen Nachlaß iſt in dem vierten Theile ſeiner Integralrechnung eine Abhandlung eingerückt, über die Auflöſung der Integralformel, $\int x^{m-1}\partial x(\Delta + x^n)^\lambda$ in eine für jeden Fall convergirende Reihe. Es iſt Δ eine unveränderliche Größe. Die Methode verdient wegen ihrer Einfachheit hier angeführt zu werden.

Der Werth des Integrals ſoll ſich von $x=0$ bis zu $x=a$ erſtrecken, das heißt, es ſoll $=0$ ſeyn, wenn $x=0$ iſt, und der Werth wird geſucht, den es für $x=a$ erhält.

Man verwandle die Formel $\Delta + x^n$ in dieſe, $(\Delta + a^n)\left(1 - \frac{a^n - x^n}{\Delta + a^n}\right)$, ſo wird die vorgegebene Integralformel dieſe:

$$(\Delta + a^n)^\lambda \int x^{m-1}\partial x\left(1 - \frac{a^n - x^n}{\Delta + a^n}\right)^\lambda$$

Die Binomialpotenz entwickelt iſt =

$$1 - \frac{\lambda}{1}\left(\frac{a^n - x^n}{\Delta + a^n}\right) + \frac{\lambda.\lambda-1.}{1.2}\left(\frac{a^n - x^n}{\Delta + a^n}\right)^2 - \text{etc.}$$

Dadurch iſt die geforderte Integration auf die von der Formel $x^{m-1}\partial x(a^n - x^n)^\theta$ gebracht. Nun ſey das Integral davon gefunden, und werde durch V bezeichnet, ſo ſoll daraus das $\int x^{m-1}\partial x(a^n - x^n)^{\theta+1}$ hergeleitet werden. Dazu dient die Formel V. in 59.

Nach dieſer iſt

$$\int x^{m-1}(a^n-x^n)^{\theta+1}\partial x = \frac{1}{m+n(\theta+1)}x^m(a^n-x^n)^{\theta+1}$$

$$+\frac{n(\theta+1)a^n}{m+n(\theta+1)}\int x^{m-1}(a^n-x^n)^{\theta}\partial x.$$

Da das Integral für $x=a$ geſucht wird, ſo iſt der erſte Theil $=0$, und es iſt

$$\int x^{m-1}(a^n-x^n)^{\theta+1}\partial x = \frac{n(\theta+1)a^n}{m+n(\theta+1)}\,V.$$

$$\text{Für } \theta=0 \text{ iſt } V = \frac{n}{m(m+n)}\,a^{m+n},$$

alſo iſt

$$\int x^{m-1}(a^n-x^n)^2\partial x = \frac{n.\,2n}{m.\,m+n.\,m+2n.}\,a^{m+2n}.$$

$$\int x^{m-1}(a^n-x^n)^3\partial x = \frac{n.\,2n.\,3n}{m.\,m+n.\,m+2n.\,m+3n.}\times a^{m+3n}$$

$$\int x^{m-1}(a^n-x^n)^4\partial x = \frac{n.\,2n.\,3n.\,4n}{m.\,m+n\ldots m+4n.}\times a^{m+4n}.$$

u. ſ. f.

Hieraus ergiebt ſich nun das Integral

$$(\Delta+a^n)^\lambda\int x^{m-1}\partial x\left(1-\frac{a^n-x^n}{\Delta+a^n}\right)^\lambda,$$

für $x=a$, nach Verſetzung des gemeinſchaftlichen Factors $\frac{a^m}{m}$, folgendergeſtalt:

$$\frac{a^m}{m}(\Delta + a^n)^\lambda \left\{ 1 - \frac{\lambda n}{m+n}\left(\frac{a^n}{\Delta + a^n}\right) + \frac{\lambda n}{m+n} \cdot \frac{(\lambda - 1)n}{m+2n}\left(\frac{a^n}{\Delta + a^n}\right)^2 - \frac{\lambda n}{m+n} \cdot \frac{(\lambda - 1)n}{m+2n} \cdot \frac{(\lambda - 2)n}{m+3n}\left(\frac{a^n}{\Delta + a^n}\right)^3 + \text{etc.} \right\}$$

Setzt man hier x ſtatt a, ſo erhält man den Werth des Integrals ſo, daß es mit $x = 0$ zugleich anfängt.

Euler macht hievon noch Anwendungen auf einige künſtliche Summirungen von Reihen.

88. Durch dieſes Verfahren läßt ſich nun auch für das $\int x^{m-1} \partial x \sqrt{(A + Bx^2 + Cx^4)}$, oder das $\int \frac{x^{m-1} \partial x}{\sqrt{(A + Bx^2 + Cx^4)}}$, immer eine convergirende Reihe finden, da man die trinomiſche Größe unter dem Wurzelzeichen auf eine binomiſche von der Form $a^4 + x^4$ bringen kann. Dieſes Verfahren wird leichter, als das von La Grange gebrauchte ſeyn.

89. Man ſieht hier, wie die von Kramp ſo genannten numeriſchen Facultäten mit Integrationsformeln zuſammen hangen. Eine Facultät wie $\frac{r \,.\, r+n \,.\, r+2n \,.\, \text{etc.}}{m \,.\, m+n \,.\, m+2n \,.\, \text{etc.}}$ entſteht durch die Diviſion von $\int x^{m-1}(a^n - x^n)^p \partial x$ durch $\int x^{r-1}(a^n - x^n)^p \partial x$.

90. Zu den in (82) angeführten Integrationsmethoden dienen folgende ſehr nützliche Beyſpiele.

I. Das Integral, $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1 - x^2)(a^2 - x^2)}} = X$, zu finden, für den Werth $x = a$, wenn es für $x = 0$ anfängt.

Man entwickele den Bruch $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, oder die Potenz $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, nach binomiſcher Lehrſatz, 13. IV. und ſetze ſie zur Abkürzung $= 1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma x^6 + \delta x^8 +$ etc. ſo iſt

$$X = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(a^2-x^2)}} + \alpha \int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

$$+ \beta \int \frac{x^4 \partial x}{\sqrt{(a^2-x^2)}} + \gamma \int \frac{x^6 \partial x}{\sqrt{(a^2-x^2)}} + \text{etc.}$$

Dieſe Integrale ſind $= 0$ für $x = 0$, wenn keine Conſtante zugeſetzt wird, und für $x = a$ iſt, nach (64.).

$$X = (1 + \alpha^2 a^2 + \beta^2 a^4 + \gamma^2 a^6 + \delta^2 a^8 + \text{etc.}) . \tfrac{1}{2} \pi.$$

Setzt man dieſe Größe $= A$, die Länge eines einfachen Pendels $= r$, die Höhe des freyen Falles in einer Secunde $= g$, ſo iſt die Zeit eines Schwunges (eines Hin- oder Herganges) $= 2 A \sqrt{\frac{r}{2g}}$. Die Bedeutungen von a und x für dieſe Anwendung ſind in (82.) angegeben.

II. Das Integral, $\frac{\sqrt{(1-e^2x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}} \partial x = X$, zu finden, für $x = 1$, wenn es für $x = 0$ anfängt.

Es ſey wiederum $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma x^6 + \delta x^8 +$ etc. ſo iſt $\sqrt{(1-e^2x^2)} = 1 - \alpha e^2 x^2 - \frac{1}{3} \beta e^4 x^4 - \frac{1}{5} \gamma e^6 x^6 - \frac{1}{7} \delta e^8 x^8 -$ etc. Alſo

$$X = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} - \alpha e^2 \int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$- \tfrac{1}{3} \beta e^4 \int \frac{x^4 \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} - \tfrac{1}{5} \gamma e^6 \int \frac{x^6 \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} - \text{etc.}$$

Dieſe Integrale ſind $= 0$ für $x = 0$, wenn Conſt. $= 0$ genommen wird, und für $x = 1$ iſt

$$X = (1 - \alpha^2 e^2 - \tfrac{1}{3}\beta^2 e^4 - \tfrac{1}{5}\gamma^2 e^6 - \tfrac{1}{7}\delta^2 e^8 - \text{etc.})\tfrac{1}{2}\pi.$$

Dieſer Werth von X iſt der elliptiſche Quadrant für die halbe große Axe = 1, und Excentricität = e.

III. Claſſe, worin der Differential-Factor eine logarithmiſche oder exponentielle Function iſt.

91. Die einfachſten Formen eines Differential-Factors von der hier angezeigten Beſchaffenheit ſind:

$$X \log x \; ; \; \frac{\partial X}{\partial x} \; ; \; (\log x)^n \; ; \; \frac{X}{(l x)^n} \; ; a^x X \; ; x^{nx}.$$

92. $\partial y = X \partial x \log x.$

Zufolge der Bemerkung in der Einleitung zu dem gegenwärtigen Artikel iſt

$$y = \log x . X \partial x - \int (\int X \partial x) . \frac{\partial x}{X},$$

da $\partial . \log x = \frac{\partial x}{x}$ iſt. Oder, wenn zur mehrern Deutlichkeit geſetzt wird, $\int X \partial x = Z$,

$$y = Z \log x - \int \frac{Z \partial x}{x}.$$

Iſt z eine Function von x, die keine Logarithmen enthält, ſo iſt die Integration auf einen der Fälle der beiden erſten Claſſen gebracht. Sonſt muß man gleich von Anfang das Differential in eine Reihe auflöſen.

93. $\partial y = x^n \partial x \log x.$

$$y = \frac{1}{n+1} x^{n+1} (\log x - \frac{1}{n+1}) + \text{Const.}$$

94. $\partial y = \frac{\partial x}{1-x} . \log x$

$$y = l \frac{1}{1-x} . l x - x - \tfrac{1}{4} x^2 - \tfrac{1}{9} x^3 - \tfrac{1}{16} x^4 - \tfrac{1}{25} x^5 - \text{etc.}$$

Hier iſt $Z = \int \frac{\partial x}{1-x} = -\log.(1-x)$

und $\frac{Z\partial x}{x} = -\frac{\partial x}{x}\log.(1-x)$. Es iſt aber

$$\log.(1-x) = -(x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + \text{etc.})$$

(ſ. Logarithmen, oder Differenzenrechnung 24. wenn daſelbſt $x = 1$; $u = -x$ geſetzt wird); alſo

$$\frac{Z\partial x}{x} = (1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{4}x^3 + \text{etc.})\,\partial x,$$ und

$$\int \frac{Z\partial x}{x} = x + \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{9}x^3 + \tfrac{1}{16}x^4 + \text{etc.}$$

So wird der angegebene Werth von y erhalten, wenn nur noch $-\log.(1-x)$ mit $+\log.\frac{1}{1-x}$ vertauſcht wird.

Für $x = 0$ iſt das Integral $= 0$. Denn $\log\frac{1}{1-x}$, welcher alsdenn $= 0$ iſt, macht das Product $\log\frac{1}{1-x}.\log.x = 0$, wenn gleich log. x unendlich groß iſt. Der Logarithme einer unendlich großen, ſo wie einer unendlich kleinen Zahl iſt mit $\frac{1}{0}$ nicht vergleichbar, und wird durch die Diviſion mit $\frac{1}{0}$ Null, ſ. Logarithmen.

95. $\partial y = \partial P(lx)^n$, wo P eine Function von x iſt.

$$y = P(lx)^n - nQ(lx)^{n-1}$$
$$+ n(n-1)R(lx)^{n-2} - n(n-1)(n-2)S(lx)^{n-3}$$
$$+ \text{etc.}$$

wo $Q = \int \frac{P\partial x}{x}$; $R = \int \frac{Q\partial x}{x}$; $S = \int \frac{R\partial x}{x}$, u.ſ.f.

Denn es iſt (nach der angeführten Formel)

$$y = P(lx)^n - \int P\partial(lx)^n.$$

Da $\partial(lx)^n = n(lx)^{n-1}.\ \frac{\partial x}{x}$,

ſo iſt $y = P(lx)^n - n\int\frac{P\partial x}{x}(lx)^{n-1}$.

Man ſetze $\frac{P\partial x}{x} = \partial Q$, ſo iſt auf gleiche Art

$$\int\partial Q(lx)^{n-1} = Q(lx)^{n-1} - (n-1)\int\frac{Q\partial x}{x}(lx)^{n-2}.$$

Wiederum ſetze man $\frac{Q\partial x}{x} = \partial R$, ſo iſt

$$\int\partial R(lx)^{n-2} = R(lx)^{n-2} - (n-2)\int\frac{R\partial x}{x}(lx)^{n-3}.$$

Durch dieſe fortgeſetzten Entwickelungen und Subſtitutionen wird das angegebene Integral erhalten.

96. $\partial y = x^{m-1}(lx)^n\partial x.$

$$y = x^m\left(\frac{(lx)^n}{m} - \frac{n(lx)^{n-1}}{m^2} + \frac{n.n-1.(lx)^{n-2}}{m^3} - \frac{n.n-1.n-2.(lx)^{n-3}}{m^4} + \text{etc.}\right) + C.$$

Leibnitz fand dieſes Integral, ſ. Commerc. epiſt. Leibnitii et Bernoullii T. I. p. 8.

97. $\partial y = \frac{X\partial x}{(lx)^n}.$

$$y = \text{Conſt.} - \frac{Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{Px}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}} - \frac{Qx}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} + \text{etc.}$$

wo $P = \frac{\partial(Xx)}{\partial x}$; $Q = \frac{\partial(Px)}{\partial x}$; u. ſ. f.

Man kann dieſe Formel auf gleiche Weiſe behandeln, wie die in (95.), aber auch auf eine andere Art, wodurch das angegebene Integral erhalten wird. Man drücke die Differentialformel ſo aus: $Xx . \frac{\partial x}{x(lx)^n}$, und bezeichne das $\int \frac{\partial x}{x(lx)^n}$ durch u, ſo iſt

$$\int Xx . \partial u = Xx . u - \int u\, \partial(Xx).$$

Es iſt $u = \frac{-1}{(n-1)(lx)^{n-1}}$; alſo iſt

$$y = C - \frac{Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{\partial(Xx)}{(lx)^{n-1}}.$$

Setzt man $\partial(Xx) = P\partial x$, ſo iſt

$$y = C - \frac{Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{P\partial x}{(lx)^{n-1}}.$$

Der zweyte Theil iſt das Integral einer Differentialformel von derſelben Geſtalt als die vorgegebene iſt, und wird auf gleiche Art auf das $\int \frac{Q\partial x}{(lx)^{n-2}}$ gebracht. So wird fortgefahren, bis daß man auf das Integral $\int \frac{V\partial x}{lx}$ kommt, welches nicht einfacher dargeſtellt werden kann.

98. $\partial y = \dfrac{x^{m-1}\partial x}{(lx)^n}$.

$$y = C - \frac{x^m}{(n-1)(lz)^{n-1}} - \frac{m x^m}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}}$$

$$- \frac{m^2 x^m}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} \cdots$$

$$+ \frac{m^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1}\int \frac{x^{m-1}\partial x}{lx}.$$

In dem letzten Theil, der Ergänzung, ſetze man $x^m = z$, ſo verwandelt ſich $\int \dfrac{x^{m-1}\partial x}{lx}$ in $\int \dfrac{\partial z}{lz}$. Dieſes iſt eine eigene Gattung transſcendenter Functionen.

99. $\partial y = a^x X \partial x$.

$$y = \frac{1}{la} a^x X - \frac{1}{(la)^2} a^x P + \frac{1}{(la)^3} a^x Q$$

$$- \frac{1}{(la)^4} a^x R + \text{etc.}$$

wo $P = \dfrac{\partial X}{\partial x}$; $Q = \dfrac{\partial P}{\partial x}$; $R = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, u. ſ. f.

Denn da $\partial . a^x = a^x \partial x . la$ (Differentialformeln, 15.) ſo iſt $\int a^x \partial x = \dfrac{a^x}{la}$ und es iſt nach der bisher gebrauchten Formel,

$$y = \frac{1}{la} a^x X - \frac{1}{la}\int a^x \partial x.$$

Setzt man $\partial X = P \partial X$, ſo iſt

$$\int a^x P \partial x = \frac{1}{la} a^x P - \frac{1}{la}\int a^x . \partial P,$$

alſo $y = \frac{1}{la} a^x X - \frac{1}{(la)^2} a^x P$

$$+ \frac{1}{(la)^2} \int a^x \partial P.$$

Auf gleiche Art werden die folgenden Theile des Integrals gefunden.

100. I. $\partial y = a^x x^n \partial x$, wo n eine ganze poſitive Zahl iſt.

$$y = a^x \left(\frac{x^n}{la} - \frac{n x^{n-1}}{(la)^2} + \frac{n.n-1.x^{n-2}}{(la)^3} - \frac{n.n-1.n-2.x^{n-3}}{(la)^4} + \text{etc.} \right) + C.$$

Zufolge der allgemeinen Formel (99.)

II. $\partial y = \frac{a^x \partial x}{x^n}$.

$$y = C - \frac{a^x}{(n-1) x^{n-1}} + \frac{la}{n-1} \int \frac{a^x \partial x}{x^{n-1}}.$$

Hier iſt die Differentialformel in die Factoren a^x und $\frac{\partial x}{x^n}$ zerlegt, da ſie für $a^x x^n \partial x$ in $a^x \partial x$ und x^n zerlegt worden. Die fortgeſetzte Entwickelung des involutoriſchen Integrals führt zuletzt auf $\int \frac{a^x \partial x}{x}$, welches nur durch eine Reihe dargeſtellt werden kann.

101. $\partial y = \frac{a^x \partial x}{x}$.

$$y = C + lx + \frac{x\,la}{1} + \frac{x^2 (la)^2}{1.2.2} + \frac{x^3 (la)^3}{1.2.3.3} + \frac{x^4 (la)^4}{1.2.3.4.4} + \text{etc.}$$

Die Exponentialgröße a^x wird in die Reihe,

$$a^x = 1 + x\,la + \frac{x^2(la)^2}{1.2} + \frac{x^3(l\alpha)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

aufgelöſet. (Logarithmen, oder auch Differenzenrechnung, 24. 25.*) Dieſe Reihe mit $\frac{\partial x}{x}$ multiplicirt, und darauf integrirt, giebt die für y.

102. In dem jetzt gefundenen Integral nehme man für a die Baſis der natürlichen Logarithmen, e, ſo iſt $le = 1$, und

$$\int \frac{e^x \partial x}{x} = C + lx + \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\ \frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{3} . \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{1}{4} . \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Nun ſey $e^x = z$, die Zahl, deren natürlicher Logarithme $= x$ iſt, oder $x = \log z$; ſo iſt $\partial x = \frac{\partial z}{z}$ und $\frac{e^x \partial x}{x} = \frac{\partial z}{lz}$, alſo

$$\int \frac{\partial z}{lz} = C + llz + \frac{lz}{1} + \frac{1}{2} . \frac{(lz)^2}{1.2} + \frac{1}{3} . \frac{(lz)^3}{1.2.3} + \frac{1}{4} . \frac{(lz)^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Für $z = 1$ iſt das Integral unendlich groß, weil $lz = l1 = 0$, und $l0 = \infty$ oder unendlich iſt.

*) Man bezeichne den Logarithmen von $1 + u$ in dem Syſtem, deſſen Baſis $= a$ iſt, durch $L(1+u)$, in dem natürlichen durch $l(1+u)$, ſo iſt in Differenzenrechnung (24.), $x = 1$; $lx = 0$, und, wenn die in c multiplicirte Reihe U heißt, $L(1+u) = cU$; und $l(1+u) = U$, alſo $c = L(1+u) : l(1+u)$. Setzt man $1 + u = a$, ſo wird $c = \frac{1}{la}$.

103. $\partial y = x^{nx}\partial x$.

$$y = x\left(1 - \frac{nx}{2^2} + \frac{n^2x^2}{3^3} - \frac{n^3x^3}{4^4} + \frac{n^4x^4}{5^5} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{nx^2 lx}{1}\left(\frac{1}{2} - \frac{nx}{3^2} + \frac{n^2x^2}{4^3} - \frac{n^3x^3}{5^4} + \frac{n^4x^4}{6^5} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{n^2x^3(lx)^2}{1.2}\left(\frac{1}{3} - \frac{nx}{4^2} + \frac{n^2x^2}{5^3} - \frac{n^3x^3}{6^4} + \frac{n^4x^4}{7^5} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{n^3x^4(lx^3)}{1.2.3}\left(\frac{1}{4} - \frac{nx}{5^2} + \frac{n^2x^2}{6^3} - \frac{n^3x^3}{7^4} + \frac{n^4x^4}{8^5} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \text{etc.}$$

Das Integral fängt für $x = 0$ auch an. Dieſes Integral wird dadurch gefunden, daß die Exponentialgröße x^{nx} in eine Reihe verwandelt wird, nämlich,

$$x^{nx} = 1 + nx\,lx + \frac{n^2x^2(lx)^2}{1.2} + \frac{n^3x^3(lx)^3}{1.2.3} + \frac{n^4x^4(lx)^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Hiezu wird das Differential ∂x als Factor geſetzt, worauf die Integration nach (96.) vorgenommen wird. Die Particularreihen werden dann nach den Potenzen von lx zerlegt, und zu neuen Reihen gebildet.

Man ſehe den Briefwechſel zwiſchen Leibnitz und Joh. Bernoulli, Th. I. S. 8. 12. 20.

104. Das Integral (103.) erhält für $x = 1$ den Werth

$$1 - \frac{n}{2^2} + \frac{n^2}{3^3} - \frac{n^3}{4^4} + \frac{n^4}{5^5} - \text{etc.}$$

eine durch ihre Form merkwürdige Reihe. Man ſehe Io. Bernoullii Opera T. I. p. 184.

105. Von dieſen Integrationen handelt Euler in der Integralrechnung, Th. I. §. 189-233. Lacroix,

Th. II. S. 89-100. Noch hieher gehörige ſpätere Abhandlungen von Euler finden ſich in den Novis Comm. Ac. Petrop. T, XVI. XIX. Actis ej. Acad. T. I. P. II. Novis Actis T. IV. VIII.

IV. Claſſe, worin der Differentialfactor Winkel oder Sinus oder Tangenten von Winkeln enthält.

106. $\partial y = X \partial x \text{ Ang. sin } x$.

$$y = P \text{ Ang. sin } x - \int \frac{P \partial x}{\sqrt{(1 - xx)}},$$

wo $P = \int X \partial x$ iſt,

Die Integration geſchieht nach der in der Einleitung gewieſenen, und in dem vorhergehenden Abſchnitte angewandten Methode.

107. $\partial y = X \partial x . \varphi^n$, und φ ein Winkel, deſſen Sinus oder Tangente eine Function von x iſt, ſo daß $\partial \varphi = u \partial x$ ſey.

$$y = \varphi^n P - n \int P u \partial x . \varphi^{n-1},$$

wo $P = \int X \partial x$ iſt.

Das $\int P u \partial x . \varphi^{n-1}$ wird auf gleiche Art zerlegt in $\varphi^{n-1} Q - (n-1) \int Q u \partial x . \varphi^{n-2}$, wo $Q = \int P u \partial x$ iſt. Solchergeſtalt werden die Potenzen von φ immer fort erniedrigt, ſo daß man zuletzt auf eine Formel ohne φ kommt. Allein wenn die Integrale P, Q, etc. ſich nicht angeben laſſen, ſo iſt die Integration von $X \partial x . \varphi^n$ auch nicht ausführbar.

108. Exempel. Es ſey φ ein Winkel, deſſen Sinus $= x$ iſt, daher $\partial \varphi = \frac{\partial x}{\sqrt{(1 - xx)}}$, ſo iſt

$$\int \varphi \partial x = \varphi x + \sqrt{(1 - xx)} - 1.$$

$$\int \varphi^2 \partial x = \varphi^2 x + 2 \varphi \sqrt{(1 - xx)} - 2 . 1 x.$$

$$\int \varphi^3 \partial x = \varphi^3 x + 3 \varphi^2 \sqrt{(1 - xx)} - 3 . 2 \varphi x - 3 . 2 . 1 \sqrt{(1 - xx)} + 6. \quad \text{u. ſ. f.}$$

Die Integrale ſind ſo genommen, daß ſie für $x = 0$ auch $= 0$ ſind. Es iſt hier

$P = x$; $Q = -\sqrt{(1 - xx)}$; $R = -x$;
$S = +\sqrt{(1 - xx)}$; $T = +x$; u. ſ. f.

109. In dem Artikel, Differentialformeln (38.) ſetze man $n\varphi$ ſtatt φ, ſo erhält man daraus folgende elementare Integrationsformeln.

$$\int \partial\varphi \cos n\varphi = \frac{1}{n} \sin n\varphi.$$

$$\int \partial\varphi \sin n\varphi = -\frac{1}{n} \cos n\varphi.$$

$$\frac{\partial\varphi}{\cos n\varphi^2} = \frac{1}{n} \tan n\varphi.$$

$$\int \frac{\partial\varphi}{\sin n\varphi^2} = -\frac{1}{n} \cot n\varphi.$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos n\varphi}{\sin n\varphi^2} = -\frac{1}{n \sin n\varphi}.$$

$$\int \frac{\partial\varphi \sin n\varphi}{\cos n\varphi^2} = \frac{1}{n \cos n\varphi}.$$

In der letzten Formel a. a. O. iſt noch $\frac{1}{\cos\varphi}$ ſtatt $\sec\varphi$, und $\frac{1}{\sin\varphi}$ ſtatt $\operatorname{cosec}\varphi$ geſetzt.

110. $\partial y = (A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi + E\cos 4\varphi + \text{etc.})\,\partial\varphi.$

$y = A\varphi + B\sin\varphi + \frac{1}{2}C\sin 2\varphi + \frac{1}{3}D\sin 3\varphi + \frac{1}{4}E\sin 4\varphi + \text{etc.}$

111. $\partial y = (A + B\sin\varphi + C\sin 2\varphi + D\sin 3\varphi + E\sin 4\varphi + \text{etc.})\,\partial\varphi.$

$y = A\varphi - B\cos\varphi - \frac{1}{2}C\cos 2\varphi - \frac{1}{3}D\cos 3\varphi - \frac{1}{4}E\cos 4\varphi - \text{etc.}$

112. $\partial y = \partial \varphi \sin \varphi^m$.

Die Integration kann auf zweyerley Weiſe bewerkſtelliget werden. Erſtlich, man verwandelt $\sin \varphi^m$ in eine Reihe, nach den Sinus der vielfachen von φ für ein ungerades m, oder nach den Coſinus derſelben für ein gerades m, zufolge Goniometrie (137.), worauf die Integration nach (110. 111.) bewerkſtelligt wird. Zweytens wird die Integration ſtückweiſe vorgenommen, indem man das Differential folgeweiſe auf andere mit einer niedrigern Potenz von $\sin \varphi$ bringt.

Nämlich da $\partial \varphi = \frac{\partial \sin \varphi}{\cos \varphi}$ iſt, ſo iſt

$\partial y = \frac{\sin \varphi^m . \partial \sin \varphi}{\cos \varphi}$, und, wenn $\sin \varphi = x$ geſetzt wird, alſo $\cos \varphi = \sqrt{(1 - xx)}$ iſt, $\partial y = \frac{x^m \partial x}{\sqrt{(1 - xx)}}$.

Das involutoriſche Integral iſt in (61.) angegeben; eine Reihe von entwickelten Werthen deſſelben in (62, 63.). Das Integral iſt für ein ungerades m algebraiſch.

113. In dieſem Falle kann man das Integral noch auf eine andere Art ausdrucken. Nämlich nach der Formel II. in (59.) iſt

$$\int \frac{x^m \partial x}{\sqrt{(1 - xx)}} = C - x^{m-1} (1 - xx)^{\frac{1}{2}} + \frac{m-1}{1} \int x^{m-2} (1 - xx)^{\frac{1}{2}} \partial x.$$

Oder, wenn zur Abkürzung geſetzt wird $\sqrt{(1 - xx)} = z$,

$$\int \frac{x^m \partial x}{z} = C - x^{m-1} z + \frac{m-1}{1} \int x^{m-2} z \, \partial x.$$

$$\int x^{m-2} z \, \partial x = -\tfrac{1}{3} x^{m-3} z^3 + \frac{m-3}{3} \int x^{m-4} z^3 \partial x$$

$$\int x^{m-4} z^3 \partial x = -\frac{1}{5} x^{m-5} z^5 + \frac{m-5}{5} \int x^{m-6} z^5 \partial x.$$

$$\int x^{m-6} z \partial x = -\frac{1}{7} x^{m-7} z^7 + \frac{m-7}{7} \int x^{m-8} z^7 \partial x.$$

u. ſ. f.

Exempel.

$$\int \frac{x \partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = C - z.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = C - x^2 z - \frac{2}{3} z^3.$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = C - x^4 z - \frac{4}{3} x^2 z^3 - \frac{4.2}{3.5} z^5.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = C - x^6 z - \frac{6}{3} x^4 z^3 - \frac{6.4}{3.5} x^2 z^5$$
$$- \frac{6.4.2}{3.5.7} z^7.$$

u. ſ. f.

114. Auf gleiche Art wird $\int \partial \varphi \cos\varphi^m$ gefunden. Setzt man $\cos\varphi = z$, ſo iſt $\partial \varphi = -\frac{\partial z}{\sqrt{(1-zz)}}$, und $\int \partial \varphi \cos\varphi^m = -\int \frac{z^m \partial z}{\sqrt{(1-zz)}}$. Das Integral iſt daher das Entgegengeſetzte von dem Werthe des $\int \partial \varphi \sin \varphi^m$; nur iſt zu merken, daß $-\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-zz)}} = +\text{Ang}\cos z$ iſt. Daher behält für gerade m das Glied, welches den Winkel φ enthält, in beiderley Integralen daſſelbe Vorzeichen +.

115. $\partial y = \partial \varphi \sin \varphi^m \cos \varphi^n$.

Man ſetze $\sin \varphi = x$, ſo iſt $\cos \varphi = \sqrt{(1 - xx)}$, und $\partial \varphi \cos \varphi = \partial \sin \varphi = \partial x$, alſo

$\partial y = x^m (1 - xx)^{\frac{n-1}{2}} \partial x$. Aus (59. IV. V.) iſt, wenn $\sqrt{(1 - xx)} = z$ zur Abkürzung geſetzt wird,

$$\text{I. } y = -\frac{1}{m+n} x^{m-1} z^{n+1} + \frac{m-1}{m+n} \int x^{m-2} z^{n-1} \partial x.$$

$$\text{II. } y = \frac{1}{m+n} x^{m+1} z^{n-1} + \frac{n-1}{m+n} \int x^m z^{n-3} \partial x.$$

Man ſetze für x und z wieder ihre Werthe, ſo iſt

$$\text{I. } \int \partial \varphi \sin \varphi^m \cos \varphi^n = -\frac{1}{m+n} \sin \varphi^{m-1} \cos \varphi^{n+1} + \frac{m-1}{m+n} \int \partial \varphi \sin \varphi^{m-2} \cos \varphi^n.$$

$$\text{II. } \int \partial \varphi \sin \varphi^{m-2} \cos \varphi^n = \frac{1}{m+n-2} \sin \varphi^{m-1} \cos \varphi^{n-1} + \frac{n-1}{m+n-2} \int \partial \varphi \sin \varphi^{m-2} \cos \varphi^{n-2}.$$

In der zweyten Formel iſt $m - 2$ ſtatt m geſetzt, damit man durch dieſelbe ſogleich den involutoriſchen Theil in der erſten Formel erhalte. Durch beide wird das Integral $\int \partial \varphi \sin \varphi^m \cos \varphi^n$ auf das $\int \partial \varphi \sin \varphi^{m-2} \cos \varphi^{n-2}$ gebracht.

116. Exempel. $\int \partial \varphi \sin \varphi^6 \cos \varphi^5$

$$= -\frac{1}{11} \sin \varphi^5 \cos \varphi^6 + \frac{5 \cdot 1}{11 \cdot 9} \sin \varphi^5 \cos \varphi^4$$

$$- \frac{5 \cdot 4 \cdot 1}{11 \cdot 9 \cdot 7} \sin \varphi^3 \cos \varphi^4 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1}{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5} \sin \varphi^3 \cos \varphi^2$$

$$- \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} \sin \varphi \cos \varphi^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} \sin \varphi.$$

117. I. $\int \frac{\partial \varphi}{\sin \varphi} = \log. \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \text{l. tang} \frac{1}{2} \varphi.$

II. $\int \frac{\partial \varphi}{\cos \varphi} = \log. \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} = \text{l. tang} (45° + \frac{1}{2} \varphi).$

III. $\int \frac{\partial \varphi \cos \varphi}{\sin \varphi} = \log. \sin \varphi.$

IV. $\int \frac{\partial \varphi \sin \varphi}{\cos \varphi} = - \log. \cos \varphi = \log. \sec. \varphi.$

V. $\int \frac{\partial \varphi}{\sin \varphi . \cos \varphi} = \log. \text{tang } \varphi.$

VI. $\int \frac{\partial \varphi}{\cos \varphi^2} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \text{tang } \varphi.$

Denn man ſetze $\sin \varphi = x$, ſo iſt

$\frac{\partial \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\partial x}{x \sqrt{(1 - xx)}}$, wovon das Integral in (52.) gefunden iſt.

Zweytens ſey $\varphi = 90° - \omega$, ſo iſt

$\frac{\partial \varphi}{\sin \varphi} = - \frac{\partial \omega}{\cos \omega}$; und $\int \frac{\partial \varphi}{\sin \varphi} = \log. \frac{1 - \sin \omega}{\cos \omega}$

$= - \log. \frac{\cos \omega}{1 - \sin \omega}$; alſo $\int \frac{\partial \omega}{\cos \omega} = \log. \frac{\cos \omega}{1 - \sin \omega}$.

Vertauſcht man das Symbol ω mit φ, ſo erhält man die Formel II.

Die Formel III. zu erhalten, ſetze man $\sin \varphi = x$, ſo wird das Differential $= \frac{\partial x}{x}$, und das Integral $= \log. x = \log. \sin \varphi$. Die Formel IV. entſteht aus III. durch Vertauſchung von φ mit $90° - \varphi$. Die Formel V. aus III. und IV. durch Addition. Die Formel VI. aus Differentialformeln (38.).

118. $\partial y = \frac{\partial \varphi \sin \varphi^m}{\operatorname{coſ} \varphi^n}$.

Man ſetze $\sin\varphi = x$, und $\operatorname{coſ}\varphi$ oder $\sqrt{(1-xx)} = z$,

ſo iſt $\partial y = \frac{x^m \partial x}{z^{n+1}}$, und (59. IV. VI.)

$$\text{I. } y = -\frac{1}{m-n} \cdot \frac{x^{m-1}}{z^{n-1}} + \frac{m-1}{m-n} \int \frac{x^{m-2} \partial x}{z^{n+1}}.$$

$$\text{II. } y = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{x^{m-1}}{z^{n-1}} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{x^m \partial x}{z^{n-1}}.$$

Das iſt,

$$\text{I. } \int \frac{\partial \varphi \sin \varphi^m}{\operatorname{coſ}\varphi^n} = -\frac{1}{m-n} \cdot \frac{\sin\varphi^{m-1}}{\operatorname{coſ}\varphi^{n-1}} + \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\partial\varphi \sin\varphi^{m-2}}{\operatorname{coſ}\varphi^n}.$$

$$\text{II. } \int \frac{\partial \varphi \sin \varphi^{m-2}}{\operatorname{coſ}\varphi^n} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin\varphi^{m-1}}{\operatorname{coſ}\varphi^{n-1}} - \frac{m-n}{n-1} \int \frac{\partial\varphi \sin\varphi^{m-2}}{\operatorname{coſ}\varphi^{n-2}}.$$

Durch beide Operationen zuſammen fortgeſetzt werden die Exponenten von $\sin\varphi$ und $\operatorname{coſ}\varphi$ jedesmahl um 2 vermindert, ſo daß das Integral auf eine der Formen, $\int \partial\varphi \sin\varphi^r$, oder $\int \frac{\partial\varphi \sin\varphi^r}{\operatorname{coſ}\varphi}$, oder $\int \frac{\partial\varphi}{\operatorname{coſ}\varphi^r}$, oder $\int \frac{\partial\varphi \sin\varphi}{\operatorname{coſ}\varphi^r}$, gebracht wird. Das erſte zu finden, iſt vorher gewieſen. Das letzte iſt algebraiſch, nämlich $= \frac{1}{r-1} \cdot \frac{1}{\operatorname{coſ}\varphi^{r-1}}$.

119. Wenn m = n iſt, ſo hat man in (118.) zuerſt die Reduction nach II. und dann die nach I. vorzunehmen. Es iſt

$$\text{I.} \int \frac{\partial \varphi \sin \varphi^m}{\cos \varphi^m} = \frac{1}{m-1} \cdot \frac{\sin \varphi^{m+1}}{\cos \varphi^{m-1}}$$

$$- \frac{2}{m-1} \int \frac{\partial \varphi \sin \varphi^m}{\cos \varphi^{m-2}};$$

$$\text{II.} \int \frac{\partial \varphi \sin \varphi^m}{\cos \varphi^{m-2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \varphi^{m-1}}{\cos \varphi^{m-3}}$$

$$+ \frac{m-1}{2} \cdot \int \frac{\partial \varphi \sin \varphi^{m-2}}{\cos \varphi^{m-2}};$$

Dadurch wird die Integration zuletzt auf $\int \partial \varphi$ oder $\int \frac{\partial \varphi \sin \varphi}{\cos \varphi}$ gebracht. Jenes Integral iſt φ, dieſes iſt $-\log. \cos \varphi$.

120. $\partial y = \frac{\partial \varphi \sin \varphi^m}{\cos \varphi}$.

Die erſte Reduction in (118.) giebt

$$y = -\frac{1}{m-1} \cdot \sin \varphi^{m-1} + \int \frac{\partial \varphi . \sin \varphi^{m-2}}{\cos \varphi}.$$

Daher iſt

$$\int \frac{\partial \varphi}{\cos \varphi} = \log. \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2} \varphi).$$

$$\int \frac{\partial \varphi \sin \varphi}{\cos \varphi} = -\log \cos \varphi = + \log \sec \varphi.$$

$$\int \frac{\partial \varphi \sin \varphi^2}{\cos \varphi} = -\sin \varphi + \int \frac{\partial \varphi}{\cos \varphi}.$$

$$\int \frac{\partial \varphi \sin \varphi^3}{\cos \varphi} = -\tfrac{1}{2} \sin \varphi^2 + l \sec \varphi.$$

$$\int \frac{\partial\varphi \sin\varphi^4}{\cos\varphi} = -\tfrac{1}{3}\sin\varphi^3 - \sin\varphi + \int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi}.$$

u. ſ. f.

121. $\partial y = \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^n}$.

Nach der zweyten Formel in (118.), wenn darin $m = 2$ geſetzt wird, iſt

$$\int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^n} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^{n-2}}.$$

Exempel.

$$\int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^6} = \frac{1}{5} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^5} + \frac{4 \cdot 1}{5 \cdot 3} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^3} + \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

122. $\partial y = \frac{\partial\varphi}{\sin\varphi^m \cdot \cos\varphi^n}$.

Die Reduction auf kleinere Exponenten geſchieht mittelſt der Formeln III. und VI. in (59.). Es ſey $\sin\varphi = x$; und $\cos\varphi = \sqrt{(1 - xx)} = z$, ſo iſt

$$\partial y = \frac{\partial x}{x^m z^{n+n}},$$ und

$$\text{I. } y = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{x^{m-1} z^{n-1}} + \frac{m+n-2}{m-1} \cdot \int \frac{\partial x}{x^{m-2} z^{n+1}}.$$

$$\text{II. } y = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{m-1} z^{n-1}} + \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{\partial x}{x^m z^{n-1}}.$$

Das iſt,

$$\int \frac{\partial\varphi}{\sin\varphi^{m}.\cos\varphi^{n}} = -\frac{1}{m-1}.\frac{1}{\sin\varphi^{m-1}.\cos\varphi^{n-1}}$$

$$+\frac{m+n-2}{m-1}.\int\frac{\partial\varphi}{\sin\varphi^{m-2}.\cos\varphi^{n}}.$$

$$\int \frac{\partial\varphi}{\sin\varphi^{m-2}.\cos\varphi^{n}} = \frac{1}{n-1}.\frac{1}{\sin\varphi^{m-3}.\cos\varphi^{n-1}}$$

$$+\frac{m+n-4}{n-1}\int\frac{\partial\varphi}{\sin\varphi^{m-2}\cos\varphi^{n-2}}.$$

123. $\partial y = \dfrac{\partial\varphi}{a+b\cos\varphi}.$

Man ſetze $\cos\varphi = \dfrac{1-xx}{1+xx}$, ſo iſt

$\sin\varphi = \sqrt{(1+\cos\varphi)(1-\cos\varphi)} = \dfrac{2x}{1+xx}$, und

$\partial\varphi = \dfrac{\partial\sin\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{2\partial x}{1+xx}$. Dadurch iſt

$$\frac{\partial\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{2\partial x}{a+b+(a-b)xx}.$$

Das Integral von dieſer Formel iſt nach (15.), wenn $a > b$ iſt,

$$y = \frac{2}{\sqrt{(aa-bb)}}\,\text{Ang. tang}\,\frac{(a-b)x}{\sqrt{(aa-bb)}};$$

und nach (12.), wenn $a < b$ iſt,

$$y = \frac{1}{\sqrt{(bb-aa)}}\log.\frac{\sqrt{(bb-aa)}+x(b-a)}{\sqrt{(bb-aa)}-x(b-a)}.$$

Um in dieſen Integralen den Werth von x wieder herzuſtellen, bemerke man, daß

$x = \sqrt{\dfrac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} = \dfrac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$ iſt. Ferner iſt

$$2\,\text{Ang. tang}\,\frac{(a-b)x}{\sqrt{(aa-bb)}}=\text{Ang. tang}\,\frac{2x\sqrt{(aa-bb)}}{a+b-(a-b)xx}.$$

Setzt man hier für x ſeinen Werth, im Zähler nach der zweyten Form, im Nenner nach der erſten, ſo iſt, wenn noch $\sqrt{(aa-bb)}=c$ geſetzt wird,

$$\int\frac{\partial\varphi}{a+b\,\text{coſ}\,\varphi}=\frac{1}{c}\,\text{Ang. tang}\,\frac{c\sin\varphi}{a\,\text{coſ}\,\varphi+b}$$

$$=\frac{1}{c}\,\text{Ang. coſ}\,\frac{a\,\text{coſ}\,\varphi+b}{a+b\,\text{coſ}\,\varphi}=\frac{1}{c}\,\text{Ang. sin}\,\frac{c\sin\varphi}{a+b\,\text{coſ}\,\varphi}.$$

Für den Fall, da $a>b$ iſt, wenn hier $\sqrt{(bb-aa)}=c$ geſetzt wird, durch Subſtitution des erſten Werthes von x,

$$\int\frac{\partial\varphi}{a+b\,\text{coſ}\,\varphi}=\frac{1}{c}\,\log.\frac{a\,\text{coſ}\,\varphi+b+c\sin\varphi}{a+b\,\text{coſ}\,\varphi}.$$

124. $$\partial y=\frac{\partial\varphi}{(a+b\,\text{coſ}\,\varphi^2}.$$

$$y=-\frac{b}{aa-bb}.\frac{\sin\varphi}{a+b\,\text{coſ}\,\varphi}$$
$$+\frac{a}{aa-bb}\int\frac{\partial\varphi}{a+b\,\text{coſ}\,\varphi}.$$

Dieſes Integral wird unten (129.) in Form einer Reihe gefunden.

125. Die Integration von $\frac{\partial\varphi}{(a+b\,\text{coſ}\,\varphi)^n}$ hat einige Schwierigkeit, weil ſich keine Function findet, deren Differential aus zwey Differentialen von jener Form beſteht. Es iſt

$$\partial.\frac{\sin\varphi}{(a+b\,\text{coſ}\,\varphi)^{n-1}}=$$
$$\frac{(n-1)b+a\,\text{coſ}\,\varphi-(n-2)\,b\,\text{coſ}\,\varphi^2)\,\partial\varphi}{(a+b\,\text{coſ}\,\varphi)^n}.$$

Dieſes Differential zerlege man in zwey Differentiale von einerley Form,

$$\frac{(f+g\cos\varphi)\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}+\frac{(B+C\cos\varphi)\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n-1}},$$

in deren erſterm f und g gegeben, in dem andern B und C zu beſtimmen ſind. Bringt man beide Brüche auf einerley Nenner, ſo erhält man ein Differential von derſelben Form, wie das $\partial.\frac{\sin\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n-1}}$. Die drey Coefficienten von 1; $\cos\varphi$; $\cos\varphi^2$ geben drey Gleichungen, zufolge der Methode der Unbeſtimmten. Da aber nur zwey unbekannte, B, C, vorhanden ſind, ſo ſetze man zu der Function von φ und deren Differential noch einen unbeſtimmten Factor A, und es geben nun die drey Gleichungen die Werthe von A, B, C. Dadurch wird die Integration von $\frac{(f+g\cos\varphi)\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}$ auf die von $\frac{(B+C\cos\varphi)\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n-1}}$ gebracht. Setzt man zuerſt $f=1$; $g=0$, ſo wird das Integral von $\frac{\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}$ durch das von $\frac{(B+C\cos\varphi)\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n-1}}$ gefunden, dieſes durch das von $\frac{(D+E\cos\varphi)\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n-2}}$ worin D und E auf dieſelbe Weiſe, wie vorher B und C beſtimmt werden, und dieſer Prozeß wird fortgeſetzt, bis daß man auf die Formel $\frac{(M+N\cos\varphi)\partial\varphi}{a+b\cos\varphi}$ kommt, wovon das Integral iſt

$$=\frac{N}{b}\varphi+\frac{bM-aN}{b}\int\frac{\partial\varphi}{a+b\cos\varphi}.$$

126. Durch die Auflöſung des Differentialfactors $\frac{1}{a+b\cos\varphi}$ in eine Reihe, die nach den Coſinus der Vielfachen von φ fortgeht, wird das Integral in einer beſonders zu aſtronomiſchen Rechnungen bequemern Form erhalten. Der Radius Vector in einer Ellipſe hat den Werth $\frac{1-ee}{1-e\cos\varphi}$, wenn die halbe große Axe $=1$, die Excentricität $=e$, und φ der Winkel des Radius Vector mit der Linie des größten Abſtandes iſt. Sollte φ der Winkel des Radius mit der Linie des kleinſten Abſtandes ſeyn, ſo wird e negativ genommen. (Ellipſe, 12.).

Es iſt nach der gewöhnlichen Entwickelung eines Quotienten,

$$\frac{1}{1+n\cos\varphi} = 1 - n\cos\varphi + n^2\cos\varphi^2 - n^3\cos\varphi^3 + n^4\cos\varphi^4 - \text{etc.}$$

Hieraus ließe ſich $\int\frac{\partial\varphi}{1+n\cos\varphi}$ mittelſt des Verfahrens in (112. 114.) finden. Allein zu der angezeigten Abſicht iſt folgendes beſſer.

Man ſetze (aus Goniometrie, 141.) für die Potenzen der Coſinus ihre Werthe, und bezeichne den Quotienten $\frac{1}{1+n\cos\varphi}$ durch

$$A - B\cos\varphi + C\cos 2\varphi - D\cos 3\varphi + E\cos 4\varphi + \text{etc.},$$

ſo iſt

$$A = 1 + \tfrac{1}{2}n^2 + \frac{1.3}{2.4}n^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}n^6 + \frac{1..7}{2..8}n^8 + \text{etc.}$$

$$B = 2n\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4}n^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}n^4 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}n^6 + \text{etc.}\right)$$

$$C = \tfrac{1}{2}n^2\left(1 + \frac{3.4}{2.6}n^2 + \frac{3.4.5.6}{2.6.4.8}n^4 + \frac{3.4.5.6.7.8}{2.6.4.8.6.10}n^6 + \text{etc.}\right).$$

$$D = \tfrac{1}{4}n^3\left(1 + \frac{4.5}{2.8}n^2 + \frac{4.5.6.7}{2.8.4.10}n^4 + \frac{4.5.6.7.8.9}{2.8.4.10.6.12}n^6 + \text{etc.}\right).$$

$$E = \tfrac{1}{8}n^4\left(1 + \frac{5.6}{2.10}n^2 + \frac{5.6.7.8}{2.10.4.12}n^4 + \frac{5.6.7.8.9.10}{2.10.4.12.6.14}n^6 + \text{etc.}\right).$$

u. ſ. f.

Es iſt zu merken, daß der erſte Coefficient

$A = \frac{1}{\sqrt{(1-nn)}}$, und der zweyte

$B = \frac{2}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{(1-nn)}} - 1\right)$ iſt. Ferner machen die übrigen Coefficienten eine rücklaufende Reihe aus, nachdem die beiden erſten beſtimmt ſind. Denn man multiplicire den Quotienten,

$$A - B\cos\varphi + C\cos 2\varphi - D\cos 3\varphi + E\cos 4\varphi + \text{etc.}$$

durch $1 + n\cos\varphi$, ſo iſt, weil

$\cos\varphi . \cos\lambda\varphi = \tfrac{1}{2}\cos(\lambda-1)\varphi + \tfrac{1}{2}\cos(\lambda+1)\varphi$ iſt, (Goniometrie 27.),

$$
\begin{aligned}
1 = {} & A - \tfrac{1}{2} nB \\
& - \tfrac{1}{2}(2B - 2nA - nC)\operatorname{coſ}\varphi \\
& + \tfrac{1}{2}(2C - nB - nD)\operatorname{coſ}2\varphi \\
& - \tfrac{1}{2}(2D - nC - nE)\operatorname{coſ}3\varphi \\
& + \tfrac{1}{2}(2E - nD - nF)\operatorname{coſ}4\varphi \\
& - \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Dadurch iſt, weil für jeden Werth von φ die Reihe $= 1$ ſeyn muß, jeder Coefficient eines Coſinus $= 0$, ſo daß

$$B = \frac{2}{n}(A - 1); \qquad E = \frac{2D - nC}{n};$$

$$C = \frac{2B - 2nA}{n}; \qquad F = \frac{2E - nD}{n};$$

$$D = \frac{2C - nB}{n}; \quad \text{u. ſ. f.}$$

Nun iſt

$$\int \frac{\partial\varphi}{1 + n\operatorname{coſ}\varphi} = A\varphi - B\sin\varphi + \tfrac{1}{2}C\sin 2\varphi - \tfrac{1}{3}D\sin 3\varphi + \tfrac{1}{4}E\sin 4\varphi - \text{etc.}$$

127. $\partial y = \partial\varphi(1 + n\operatorname{coſ}\varphi)^{\nu}$.

Die Entwickelung des Differentialfactors nach dem binomiſchen Lehrſatze giebt

$$(1 + n\operatorname{coſ}\varphi)^{\nu} = 1 + \mathfrak{A}\, n\operatorname{coſ}\varphi + \mathfrak{B}\, n^2\operatorname{coſ}\varphi^2 + \mathfrak{C}\, n^3\operatorname{coſ}\varphi^3 + \mathfrak{D}\, n^4\operatorname{coſ}\varphi^4 + \text{etc.}$$

wo $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, etc. die Binomialcoefficienten in der νten Potenz ſind. Entwickelt man die Potenzen der Coſinus nach Goniometrie (141.), ſo wird

$$(1 + n\operatorname{coſ}\varphi)^{\nu} = A + B\operatorname{coſ}\varphi + C\operatorname{coſ}2\varphi + D\operatorname{coſ}3\varphi + E\operatorname{coſ}4\varphi + \text{etc.}$$

Die Coefficienten machen auch hier eine rücklaufende Reihe, worin nur die beiden erſten aus der entwickelten erſten Reihe beſtimmt zu werden brauchen. Man differentiire nämlich

die Potenz des Binomium, und ihren in der Reihe enthaltenen Werth, ſo iſt, nach Abſonderung des Differentials $\partial\varphi$,

$$\frac{\nu n(1+n\cos\varphi)^{\nu}\sin\varphi}{1+n\cos\varphi} = B\sin\varphi + 2C\sin 2\varphi$$
$$+ 3D\sin 3\varphi + 4E\sin 4\varphi + 5F\sin 5\varphi + \text{etc.}$$

Dieſe Reihe multiplicire man mit $1+n\cos\varphi$, und die erſtere, woraus ſie entſtanden iſt, mit $\nu n\sin\varphi$, ſo werden zwey ſich gleiche Reihen erhalten. Nun zerlege man noch die Producte der Sinus und Coſinus. Es iſt $\sin\lambda\varphi.\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin(\lambda+1)\varphi + \frac{1}{2}\sin(\lambda-1)\varphi$, und $\cos\lambda\varphi.\sin\varphi = \frac{1}{2}\sin(\lambda+1)\varphi - \frac{1}{2}\sin(\lambda-1)\varphi$. (Goniometrie, 27.) Man ordne die Glieder nach den Sinus der Vielfachen von φ, und faſſe ſie in eine Reihe zuſammen. Dieſe iſt

$$0 = (B + \tfrac{2}{2}Cn - \nu An + \frac{\nu}{2}Cn)\sin\varphi$$
$$+ (2C + \tfrac{1}{2}Bn + \tfrac{3}{2}Dn - \frac{\nu}{2}Bn + \frac{\nu}{2}Dn)\sin 2\varphi$$
$$+ (3D + \tfrac{2}{2}Cn + \tfrac{4}{2}En - \frac{\nu}{2}Cn + \frac{\nu}{2}En)\sin 3\varphi$$
$$+ (4E + \tfrac{3}{2}Dn + \tfrac{5}{2}Fn - \frac{\nu}{2}Dn + \frac{\nu}{2}Fn)\sin 4\varphi$$
$$+ \text{etc.}$$

Hieraus iſt

$$C = \frac{2\nu An - 2B}{(\nu+2)n}\,;\quad E = \frac{(\nu-2)Cn - 6D}{(\nu+4)n}\,;$$
$$D = \frac{(\nu-1)Bn - 4C}{(\nu+3)n}\,;\quad F = \frac{(\nu-3)Dn - 8E}{(\nu+5)n}\,;$$

u. ſ. f.

Die Coefficienten **A** und **B** werden auf dieſelbe Art gefunden, wie in (126.). Man hat nur nöthig, ſtatt

Jii

$$-n; +n^2; -n^3; +n^4; -n^5; +n^6; \text{ etc.}$$

daſelbſt hier zu ſetzen

$$+\mathfrak{A}n; +\mathfrak{B}n^2; +\mathfrak{C}n^3; +\mathfrak{D}n^4; \mathfrak{E}n^5; +\mathfrak{F}n^6; \text{ etc.}$$

und — B mit + B zu vertauſchen, ſo wird aus den Reihen für A und B in (126.) hier

$$A = 1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}n^2 + \frac{1.3}{2.4}\mathfrak{D}n^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\mathfrak{F}n^6 + \text{etc.}$$

$$B = 2n\left(\tfrac{1}{2}\mathfrak{A} + \frac{1.3}{2.4}\mathfrak{C}n^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\mathfrak{E}n^4 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\mathfrak{G}n^6 + \text{etc.}\right).$$

Durch dieſelben Vertauſchungen laſſen ſich auch die Werthe von den folgenden Coefficienten aus den gleichnamigen in (126.) finden, nur muß man bemerken, daß die in den geraden Stellen daſelbſt das Vorzeichen —, hier aber + haben.

Es iſt

$$C = \tfrac{1}{2}\left(\mathfrak{B}n^2 + \frac{3.4}{2.6}\mathfrak{D}n^4 + \frac{3.4.5.6}{2.6.4.8}\mathfrak{F}n^6 + \text{etc.}\right)$$

$$D = \tfrac{1}{4}\left(\mathfrak{C}n^3 + \frac{4.5}{2.8}\mathfrak{E}n^5 + \frac{4.5.6.7}{2.8.4.10}\mathfrak{G}n^7 + \text{etc.}\right)$$

$$E = \tfrac{1}{8}\left(\mathfrak{D}n^4 + \frac{5.6}{2.10}\mathfrak{F}n^6 + \frac{5.6.7.8}{2.10.4.12}\mathfrak{H}n^8 + \text{etc.}\right)$$

u. ſ. f.

Dieſe Werthe dienen, wenn der Exponent ν des Binomium eine ganze negative Zahl iſt. In dieſem Falle wird in einem der Glieder der rücklaufenden Reihe ſowohl Zähler als Nenner $= 0$, daher deſſen Werth unbeſtimmt

bleibt, oder hier auf eine mühſame Art geſucht werden müßte. Für poſitive ν mag man ſich dieſer Reihen-Ausdrücke, oder der rücklaufenden Reihe bedienen.

Nach der Beſtimmung der Coefficienten A, B, C, etc. wird

$$\int \partial\varphi\,(1 + n\cos\varphi)^{\nu} = A\varphi + B\sin\varphi + \tfrac{1}{2}C\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}D\sin 3\varphi + \tfrac{1}{4}E\sin 4\varphi + \text{etc.}$$

128. Exempel. Für $\nu = 2$ iſt

$\mathfrak{A} = 2$; $\mathfrak{B} = 1$; $\mathfrak{C} = 0$, u. ſ. f. Alſo iſt

$A = 1 + \tfrac{1}{2}n^2$; $B = 2n$; $C = \tfrac{1}{2}n^2$,

und

$$\int \partial\varphi\,(1 + n\cos\varphi)^2 = (1 + \tfrac{1}{2}n^2)\varphi + 2n\sin\varphi + \tfrac{1}{4}n^2\sin 2\varphi.$$

Auf gleiche Art iſt

$$\int \partial\varphi\,(1 + n\cos\varphi)^3 = (1 + \tfrac{3}{2}n^2)\varphi + (3n + \tfrac{3}{4}n^2)\sin\varphi + \tfrac{3}{4}n^2\sin 2\varphi + \tfrac{1}{12}n^3\sin 3\varphi.$$

129. Exempel. $\partial y = \dfrac{\partial\varphi}{(1 + n\cos\varphi)^2}$.

Hier iſt $\nu = -2$, alſo $\mathfrak{A} = -2$; $\mathfrak{B} = +3$; $\mathfrak{C} = -4$; $\mathfrak{D} = +5$; $\mathfrak{E} = -6$; u. ſ. f. Dadurch iſt

$$A = 1 + \tfrac{1}{2}\cdot 3n^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}5n^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot 7n^6 + \text{etc.}$$

$$B = -2\left(\tfrac{1}{2}\cdot 2n + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot 4n^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot 6n^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot 8n^7 + \text{etc.}\right).$$

$$C = +\tfrac{1}{2}\left(1\cdot 3n^2 + \frac{3\cdot 4}{2\cdot 6}\cdot 5n^4 + \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 6\cdot 4\cdot 8}\cdot 7n^6 + \text{etc.}\right).$$

$$D = -\tfrac{1}{4}\left(1\cdot 4n^3 + \frac{4\cdot 5}{2\cdot 8}\cdot 6n^5 + \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 8\cdot 4\cdot 10}\cdot 8n^7 + \text{etc.}\right).$$

$$E = +\tfrac{1}{8}\left(1.5n^4 + \frac{5.6}{2.10}.7n^6 + \text{etc.}\right).$$

$$F = -\tfrac{1}{10}\left(1.6n^5 + \frac{6.7}{2.12}.8n^7 + \text{etc.}\right).$$

$$G = +\tfrac{1}{32}\left(1.7n^6 + \text{etc.}\right).$$

Die mittlere Anomalie in der Bahn eines Planeten iſt $= (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} \int \frac{\partial \varphi}{(1 - e \operatorname{coſ} \varphi)^2}$, wo e und φ die in (126.) ſchon angeführten Bedeutungen haben.

130. Euler hat noch einige merkwürdige Relationen für dieſe Coefficienten entdeckt. I. Es iſt, wenn n als eine veränderliche Größe behandelt wird,

$$B = \frac{2(\nu + 2)}{n} \int A n \partial n - 2An,$$

wo das Integral ſo zu nehmen iſt, daß es verſchwinde, wenn $n = 0$ geſetzt wird.

II. Es ſey ν negativ und $= -\mu$, ſo daß

$$\frac{1}{(1 + n \operatorname{coſ} \varphi)_{\mu}} = A + B \operatorname{coſ} \varphi + C \operatorname{coſ} 2\varphi + D \operatorname{coſ} 3\varphi + \text{etc.}$$

Ferner ſey

$$\frac{1}{(1 + n \operatorname{coſ} \varphi)^{\mu + 1}} = A' + B' \operatorname{coſ} \varphi + C' \operatorname{coſ} 2\varphi + D' \operatorname{coſ} 3\varphi + \text{etc.}$$

ſo verhalten ſich die gleichnamigen Coefficienten in beiden Reihen folgendergeſtalt:

$$A' = A + \frac{n \partial A}{\mu \partial n}.$$

$$B' = B + \frac{n \partial B}{\mu \partial n}.$$

$$C' = C + \frac{n \partial C}{\mu \partial n}. \text{ u. ſ. f.}$$

Zugleich iſt

$$B' = \frac{2(A - A')}{n}; C' = \frac{2(B - B') - 2A'n}{n};$$

$$D' = \frac{2(C - C') - B'n}{n}; E' = \frac{2(D - D') - Cn}{n};$$

u, ſ. f.

III. Es ſey, wie vorher, $(1 + n \operatorname{coſ} \varphi)^\nu = A + B \operatorname{coſ} \varphi + C \operatorname{coſ} n \varphi + \text{etc}$ und $(1 + n \operatorname{coſ} \varphi)^{-\nu-1} = {}'A + {}'B \operatorname{coſ} \varphi + {}'C \operatorname{coſ} 2\varphi + \text{etc.}$ ſo iſt $A = {}'A(1 - nn)^{\nu + \frac{1}{2}}$. Dadurch kann man den Coefficienten A auf zweyerley Art finden, entweder durch die Formel

$$A = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\nu.\nu - 1.}{1.2} n^2 + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{\nu..\nu - 3.}{1..4} n^4 + \text{etc.}$$

oder durch dieſe,

$$A = (1 - nn)^{\nu + \frac{1}{2}} \left(1 + \tfrac{1}{2} \frac{\nu + 1.\nu + 2.}{1.2} n^2 + \frac{1.3.}{2.4} \cdot \frac{\nu + 1..\nu + 4.}{1..4} n^4 + \text{etc.}\right).$$

durch jene für kleinen n, durch dieſe für n, die nahe $= 1$ ſind.

IV. Euler zeigt noch (§. 292.) auf eine ſinnreiche Art, wie man für ſolche n, die wenig von der Einheit verſchieden ſind, die Reihe convergent machen könne, durch Herausſtoßung mehrerer Coefficienten. Lacroix hat dieſe Methode in ſeiner Integralrechnung, nr. 465. 466. vorgetragen mit einigen Erläuterungen, die aber aus nähern Quellen ſich hätten ſchöpfen laſſen.

Fuß hat in den Actis Acad. Petrop. T. IV. a. a. 1780. p. 390. ſqq. eine ſehr feine Entwickelung des Binomium $(1 - n \operatorname{coſ} \varphi)^{-\frac{3}{2}}$ gewieſen, und für die Coefficienten B, C, D, etc. ſehr bequeme genäherte Werthe zum Gebrauch in der Aſtronomie gegeben.

Arbogaſt hat in ſeinem Calcul des dérivations, §. 413 gezeigt, wie eine Function der Reihe, $\alpha + \beta \cos\varphi + \gamma \cos\varphi^2 + \delta \cos\varphi^3 +$ etc. in die Reihe $A + B \cos\varphi + C \cos 2\varphi + D \cos 3\varphi +$ etc. umgewandelt wird, und leitet daraus für den beſondern Fall, $(1 - \beta \cos\varphi)^{-m}$, die Entwicklung her. Er gebraucht dazu den Satz, daß $\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}})$ iſt (Differentialformeln, 48). Daher werden die Potenzen von $\cos\varphi$ aus Theilen von der Form, $\frac{1}{2}(e^{r\varphi\sqrt{-1}} + e^{-r\varphi\sqrt{-1}})$, zuſammengeſetzt, wozu bey geraden Potenzen eine gegebene mögliche Zahl kommt. Für jeden ſolchen binomiſchen Theil iſt der Werth $= \cos r\varphi$.

131. $\partial y = e^{\alpha\varphi} \partial\varphi$.

$$y = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\varphi}.$$

Aus Differentialformeln, 14. Es iſt e die Baſis der natürlichen Logarithmen.

132. $\partial y = e^{\alpha\varphi} \partial\varphi \sin\varphi$.

$$y = \frac{e^{\alpha\varphi}(\alpha \sin\varphi - \cos\varphi)}{1 + \alpha\alpha} + C.$$

Wenn y mit φ zugleich $= 0$ ſeyn ſoll, ſo iſt

$$\text{Conſt.} = + \frac{1}{1 + \alpha\alpha}.$$

Nach der Formel in der Einleitung iſt

$$y = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\varphi} \sin\varphi - \frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha\varphi} \partial\varphi \cos\varphi,$$

und wiederum

$$\int e^{\alpha\varphi} \partial\varphi \cos\varphi = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\varphi} \cos\varphi$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha\varphi} \sin\varphi \, \partial\varphi.$$

Alſo $y = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\varphi} \sin\varphi - \frac{1}{\alpha\alpha} e^{\alpha\varphi} \cos\varphi - \frac{1}{\alpha\alpha} y$.
Daraus wird ſogleich der angegebene Werth von y erhalten.

133. Auf gleiche Art iſt

$$\int e^{\alpha\varphi} \partial\varphi \cos\varphi = \frac{e^{\alpha\varphi}(\alpha\cos\varphi + \sin\varphi)}{1+\alpha\alpha}.$$

134. Aus dieſen Elementarformeln werden die Integrale von $e^{\alpha\varphi}\partial\varphi \sin\varphi^n$, und $e^{\alpha\varphi}\partial\varphi\cos\varphi^n$, durch ein ähnliches Verfahren wie in (132.), gefunden, indem die Exponenten von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ bey jeder ſucceſſiven Integration um 2 erniedrigt werden. Euleri Calc. integr. T. I. § 266. 270.

Man kann auch die Potenzen der Sinus und Coſinus in Sinus und Coſinus der Vielfachen von φ auflöſen, wodurch die Integration auf die Formeln in (131. 132.) gebracht wird. Durch dieſe Entwicklung wird auch das Integral von $e^{\alpha\varphi} \sin\varphi^m \cos\varphi^n$ gefunden.

134*. Aus Eulers handſchriftlichen Nachlaſſe ſind noch in der neuen Ausgabe ſeiner Integralrechnung vier Abhandlungen über die Integration ſehr ſchwieriger Differentialformeln mit Winkelfunctionen eingerückt. Drey derſelben betreffen das $\int \frac{\partial\varphi . \cos\lambda\varphi}{(1+aa-2a\cos\varphi)^n}$, welches Euler zuerſt nur durch Induction finden konnte.

V. Allgemeine Methoden, Integrale durch Annäherung zu finden.

135. Es ſey X eine Function von x. Man nehme eine nicht ſtetige Reihe der Werthe von X für die Werthe, a, a + α, a + 2α, a + 3α, ... a + (m − 1)α, a + mα, von x, und bezeichne dieſelben durch (0), (1), (2), (3) ..... (m − 1), (m); die Reihe ſelbſt durch (A). Die in den Klammern eingeſchloſſenen Zah-

len ſind die Stellenzahlen für die Glieder der Reihe (A). Die Reihe der X ſey eine durchgehends entweder zunehmende oder abnehmende. In der Reihe (A) ſchalte man mehrere Glieder, in jedem Intervall gleich viele, nach dem Geſetz der Function ein, und ſetze für dieſe den Abſtand der Glieder oder den Unterſchied der zugehörigen $x = \Delta x$. Dieſe zweyte Reihe bezeichne man durch (B). In der Reihe (A) multiplicire man jedes Glied, außer dem letzten (m), mit dem Abſtande zweyer nächſten Glieder, und bezeichne die Summe der Producte durch Σ; in der interpolirten Reihe mit Δx, das letzte Glied gleichfalls ausgeſchloſſen, und bezeichne die Summe der Producte durch S. Die Reihe der X ſey zuerſt eine zunehmende, ſo iſt Σ kleiner als S, weil die eingeſchalteten Glieder in der Reihe (B) größer ſind, als das ihnen zunächſt vorhergehende Glied in der Reihe (A). Multiplicirt man aber die Glieder der Reihe (A) von dem Gliede (1) an bis zu dem Gliede (m) mit α, ſo iſt die Summe der Producte, oder $\Sigma - \alpha(0) + \alpha(m)$, größer als S, ſo daß S zwiſchen die Summen,

$$\alpha(0) + \alpha(1) + \alpha(2) \ldots\ldots + \alpha(m-1),$$
$$\text{und } \alpha(1) + \alpha(2) \ldots\ldots\ldots + \alpha(m)$$

fällt. Die Reihe (B) wird eine ſtetige, wenn Δx unendlich klein genommen wird, und die endliche Differenz der Reihe S, nehmlich $X \Delta x$, wo X das letzte Glied (m) bedeutet, verwandelt ſich in $X \partial x$. Alſo iſt $\partial S = X \partial x$, folglich die Summe der ſtetigen Reihe $S = \int X \partial x$. Demnach liegt der Werth von $\int X \partial x$ zwiſchen den vorher angegebenen Gränzen. Je kleiner der Abſtand x zweyer Glieder der nicht ſtetigen Reihe genommen wird, deſto näher kommen ſich beide Gränzen einander und dem Werthe von $\int X \partial x$.

Iſt die Reihe der X eine abnehmende, ſo iſt die Reihe, $\alpha(0) + \alpha(1) + \alpha(2) \ldots + \alpha(m-1)$ die größere Gränze, und $\alpha(1) + \alpha(2) + \alpha(3) \ldots + \alpha(m)$ die kleinere.

136. Dieſe Methode, ein Integral zu finden, iſt die ſchon von Archimedes und in den neueren Zeiten von Cavaleri, und beſonders von Wallis, gebrauchte Summations-Methode. Kann man die beiden Summen, und die zwiſchen ihnen liegende gemeinſchaftliche Gränze, in endlichen Ausdrücken angeben, ſo erhält man eben das Reſultat, welches die Integralrechnung giebt. Daher iſt die Benennung, Integralrechnung und Integriren, wofür man auch Summiren gebraucht hat, und die Bezeichnung der Operation durch $\int$ entſtanden. Es iſt aber dieſer Begriff zu eingeſchränkt, nur auf Differentialformeln anwendbar. Allein auch bey dieſen beruht die ganze Theorie der Integration nicht auf dem Begriffe vom Summiren, ſondern auf dem Rückgange von den Differentialverhältniſſen zwiſchen einer veränderlichen Größe und ihrer Function zu der Relation zwiſchen ihnen ſelbſt.

137. Exempel. Die Gränzen für $\int x^3 \partial x$ zu finden. Hier iſt $X = x^3$, und $\Sigma = (0 + \alpha^3 + (2\alpha)^3 + (3\alpha)^3 \ldots + (m-1)^3\alpha^3)\alpha = \frac{1}{4}m^2(m-1)^2\alpha^3.\alpha$. (Differenzenrechnung, 72. oder Arithmetiſche Reihen höherer Ordn. 15.). Setzt man x für $m\alpha$, ſo iſt $\Sigma = \frac{1}{4}x^2(x-\alpha)^2$. Dieſes iſt die kleinere Gränze für $\int x^3 \partial x$. Die andere iſt $= \Sigma + (ma)^3\alpha = \frac{1}{4}m^2(m+1)^2\alpha^4 = \frac{1}{4}x^2(x+\alpha)^2$. Die gemeinſchaftliche Grenze für beide iſt $\frac{1}{4}x^4 = \int x^3 \partial x$.

138. Exempel. Es ſey $y = \int \frac{\partial x}{x^n}$; es ſoll der Werth durch eine Reihe näherungsweiſe von $x = a$ bis $x = a + b$ ausgedruckt werden.

Der Werth von y fällt zwiſchen

$$\alpha\left(\frac{1}{a^n} + \frac{1}{(a+\alpha)^n} + \frac{1}{(a+2\alpha)^n} \ldots\ldots \ldots\ldots + \frac{1}{(a+(m-1)\alpha)^n}\right),$$

und

$$\alpha\left(\frac{1}{(a+\alpha)^n}+\frac{1}{(a+2\alpha)^n}\ldots+\frac{1}{(a+m\alpha)^n}\right).$$

Das Mittel beider iſt =

$$\alpha\left(\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{(a+\alpha)^n}+\frac{1}{(a+2\alpha)^n}\ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{(a+m\alpha)^n}\right)-\tfrac{1}{2}\alpha\left(\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{(a+m\alpha)^n}\right),$$

wo der ſubtractive Theil beygefügt iſt, weil in dem erſten Theile anſtatt der Hälfte des erſten und letzten Gliedes die ganzen genommen ſind. Dieſes iſt ein genäherter Werth von $\int\frac{\partial x}{x^n}$. Setzt man für α deſſen Werth $\alpha=\frac{b}{m}$, ſo iſt nach der Diviſion durch m^n und durch α oder deſſen Werth, auch Verſetzung des ſubtractiven Theils,

$$\frac{1}{(ma)^n}+\frac{1}{(ma+b)^n}+\frac{1}{(ma+2b)^n}\ldots\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{(ma+mb)^n}=\frac{m}{m^n b}\int\frac{\partial x}{x^n}+\frac{1}{2(ma)^n}$$

$$+\frac{1}{2(ma+mb)^n},$$ deſto genauer, je größer m genommen wird.

Die Integralrechnung giebt $\int\frac{\partial x}{x^n}=$

$$\text{Conſt.}-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{a^{n-1}}-\frac{1}{x^{n-1}}\right),$$

wenn es $=0$ iſt, für $x=a$. Für $x=a+b$, iſt

$$\int\frac{\partial x}{x^n}=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{a^{n-1}}-\frac{1}{(a+b)^{n-1}}\right).$$

Nimmt man $n=1$, ſo iſt $\int\frac{\partial x}{x}=\log\frac{a+b}{a}$, und

dadurch $\frac{1}{ma} + \frac{1}{ma+b} + \frac{1}{ma+2b} + \frac{1}{ma+3b}$

$\ldots + \frac{1}{ma+mb} = \frac{m}{b} \log. \frac{a+b}{a} + \frac{2a+b}{2ma(a+b)}$,

deſto genauer je größer m genommen wird.

139 Man wird das erklärte Verfahren eher gebrauchen können, um Reihen durch Annäherung zu ſummiren, als Integrale durch Reihen auszudrucken, weil, wo man nicht integriren kann, (die circularen und logarithmiſchen Functionen den algebraiſchen als gleichgültig gerechnet,) man auch nicht wird ſummiren können. Der Taylorſche Lehrſatz aber giebt ein bequemes Mittel Integrale durch Annäherung zu finden. In dem Artikel Differenzen-Rechnung (38. vergl. 17. daſ.) iſt gefunden, daß

$$f(x+u) = fx + \frac{\partial fx}{\partial x} \cdot \frac{u}{1} + \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} \cdot \frac{u^2}{1.2}$$
$$+ \frac{\partial^3 fx}{\partial x^3} \cdot \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 fx}{\partial x^4} \cdot \frac{u^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

wo f ein Functionszeichen iſt.

Setzt man u negativ, ſo iſt

$$f(x-u) = fx - \frac{\partial fx}{\partial x} . u + \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} \frac{u^2}{1.2}$$
$$- \frac{\partial^3 fx}{\partial x^3} \cdot \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 fx}{\partial x^4} \cdot \frac{u^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

140. Es ſey $\partial y = X \partial x$ und X die Function von x, welche in jenen Formeln durch $\frac{\partial fx}{\partial x}$ bezeichnet iſt, ſo daß $y = fx$ iſt. Man finde, oder nehme an, daß für $x = a$ die Function fx den Werth A habe, ob man gleich nicht angeben kann, wie A aus a zuſammen geſetzt wird, weil dieſes vorausſetzt, daß man die Formel $X \partial x$ integriren könne. Man ſetze $\partial X = P \partial x$; $\partial P = Q \partial x$;

$\partial Q = R \partial x$, u. ſ. f. ſo ſind P, Q, R, etc. unbeſtimmte Werthe von Functionen, deren Formen gegeben werden, und es iſt

$$f(x+u) = fx + Xu + \tfrac{1}{2}Pu^2 + \tfrac{1}{6}Qu^3 + \tfrac{1}{24}Ru^4 + \text{etc.}$$

$$f(x-u) = fx - Xu + \tfrac{1}{2}Pu^2 - \tfrac{1}{6}Qu^3 + \tfrac{1}{24}Ru^4 - \text{etc.}$$

141. Man laſſe x unbeſtimmt, ſetze aber $x - u = a$, alſo $u = x - a$, ſo iſt, da $fa = A$ geſetzt worden, aus der zweyten Formel,

$$fx = A + X(x-a) - \tfrac{1}{2}P(x-a)^2 + \tfrac{1}{6}Q(x-a)^3 - \tfrac{1}{24}R(x-a)^4 + \text{etc.}$$

Hieraus wird, mittelſt des als bekannt geſetzten Werthes A der Function fa der Werth der mit ihr gleichartigen Function fx gefunden, ohne die Form derſelben zu kennen.

142. Man ſetze in der erſten Formel $x + u = z$, ſo daß $u = z - x$ ſey. Für $x = a$ verwandelen ſich die Functionen X, P, Q, R, etc. in B, C, D, E, etc. Nun iſt die erſtere Formel

$$fz = A + B(z-a) + \tfrac{1}{2}C(z-a)^2 + \tfrac{1}{6}D(z-a)^3 + \tfrac{1}{24}E(z-a)^4 + \text{etc.}$$

Hier wird ebenfalls vermittelſt des für die Function fa geſetzten Werthes der Werth der mit ihr gleichartigen Function fz gefunden, ohne die Beſchaffenheit derſelben zu kennen. Da die Bezeichnung der veränderlichen Functionalgröße willkührlich iſt, ſo ſetze man x ſtatt z, oder das z in der letztern Formel dem x in der erſtern gleich, und es iſt

$$fx = A + B(x-a) + \tfrac{1}{2}C(x-a)^2 + \tfrac{1}{6}D(x-a)^3 + \tfrac{1}{24}E(x-a)^4 + \text{etc.}$$

143. Nimmt man das Mittel von beiden Beſtimmungen der Function fx, ſo wird man einen mehr genäherten Werth erhalten, als durch eine einzelne dieſer Formeln. Wäre das Intervall $x - a$ beträchtlich, oder wären die Differentialquotienten anſehnlich groß, ſo müßte man jenes

Intervall in einige Theile theilen, und den Werth von fx durch eben ſo viele Paare von Formeln ſucceſſiv ſuchen. Nämlich wenn $x - a = m\alpha$ iſt, ſo ſuche man zuerſt den Werth von $f(a + \alpha)$, daraus den von $f(a + 2\alpha)$, aus dieſem den von $f(a + 3\alpha)$, u. ſ. f. bis zu dem $f(a + m\alpha)$.

144. Es werde z. B. das Intervall $x - a$ in drey gleiche Theile α getheilt, ſo daß $x = a + 3\alpha$ ſey. In der Formel (140.) iſt nun ſucceſſiv für a zu ſetzen: $a, a + \alpha, a + 2\alpha$, und für x iſt mit dieſen zuſtimmend zu ſetzen: $a + \alpha$, $a + 2\alpha$, $a + 3\alpha$. Die Function fx und die Differentialquotienten X, P, Q, R, etc. ſeyn für dieſe Werthe von x folgende:

x	fx	X	P	Q	R	etc.
a	A	B	C	D	E	ſ
$a + \alpha$	A′	B′	C′	D′	E′	ſ
$a + 2\alpha$	A″	B″	C″	D″	E″	ſ
$a + 3\alpha$	A‴	B‴	C‴	D‴	E‴	ſ

Nach dieſen Bezeichnungen wird die Formel in (141.) für jeden der drey letztern Werthe von x:

$$A' = A + B'\alpha - \tfrac{1}{2}C'\alpha^2 + \tfrac{1}{6}D'\alpha^3 - \tfrac{1}{24}E'\alpha^4 + \text{etc.}$$

$$A'' = A' + B''\alpha - \tfrac{1}{2}C''\alpha^2 + \tfrac{1}{6}D''\alpha^3 - \tfrac{1}{24}E''\alpha^4 + \text{etc.}$$

$$A''' = A'' + B'''\alpha - \tfrac{1}{2}C'''\alpha^2 + \tfrac{1}{6}D'''\alpha^3 - \tfrac{1}{24}E'''\alpha^4 + \text{etc.}$$

Aus allen drey Formeln zuſammen genommen entſteht

$$A''' = A + \alpha(B' + B'' + B''') - \tfrac{1}{2}\alpha^2(C' + C'' + C''') + \tfrac{1}{6}\alpha^3(D' + D'' + D''') - \tfrac{1}{24}\alpha^4(E' + E'' + E''') + \text{etc.}$$

In der Formel (142.) ſetze man ebenfalls für a ſucceſſiv $a, a + \alpha, a + 2\alpha$, und für x mit dieſen zuſtimmend $a + \alpha$, $a + 2\alpha$, $a + 3\alpha$, ſo entſtehen daraus drey Formeln, welche nach der Reihe die Coefficienten B, B′, B″;

C, C′, C″, etc. für die Werthe a, $a+\alpha$, $a+2\alpha$ von a enthalten. Durch die Addition dieſer Formeln entſteht folgende:

$$A''' = A + \alpha(B + B' + B'') + \tfrac{1}{2}\alpha^2(C + C' + C'') + \tfrac{1}{6}\alpha^3(D + D' + D'') + \tfrac{1}{24}\alpha^4(E + E' + E'') + \text{etc.}$$

Das Mittel von beiden Formeln iſt

$$A''' = A + \alpha(B + B' + B'' + B''') - \tfrac{1}{2}\alpha(B + B''') + \tfrac{1}{4}\alpha^2(C - C''') + \tfrac{1}{6}\alpha^3(D + D' + D'' + D''') - \tfrac{1}{12}\alpha^3(D + D''') + \tfrac{1}{48}\alpha^4(E - E''') + \text{etc.}$$

Hier iſt A‴ der Werth des Integrals, $\int X \partial x$ für $x = a + 3\alpha$.

145. Exempel. Es ſey $\partial y = \frac{\partial x}{x}$, alſo $y = \log \frac{x}{a}$, wo die Conſtante a genommen iſt, daß $y = 0$ iſt, wenn $x = a$ geſetzt wird. Hier iſt $A = 0$; $X = \frac{1}{x}$; alſo $B = \frac{1}{a}$; $B' = \frac{1}{a+\alpha}$, u. ſ. f. $P = -\frac{1}{x^2}$, alſo $C = -\frac{1}{a^2}$, $C' = -\frac{1}{(a+\alpha)^2}$, u. ſ. f. $Q = +\frac{2}{x^3}$, und $D = \frac{2}{a^3}$, $D' = \frac{2}{(a+\alpha)^3}$ u. ſ. f. $R = -\frac{2.3}{x^4}$; daher $E = -\frac{2.3}{a^4}$, u. ſ. f.

Es ſey $x = a + m\alpha$, ſo iſt

$$\log x = \alpha\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+\alpha} \ldots + \frac{1}{a+m\alpha}\right) - \tfrac{1}{2}\alpha\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{x}\right) - \tfrac{1}{4}\alpha^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$+\tfrac{1}{3}\alpha^3\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{(a+\alpha)^3}\cdots+\frac{1}{(a+m\alpha)^3}\right)$$

$$-\tfrac{1}{6}\alpha^3\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{x^3}\right)-\tfrac{1}{8}\alpha^4\left(\frac{1}{a^4}-\frac{1}{x^4}\right)$$

$$+\tfrac{1}{5}\alpha^5\left(\frac{1}{a^5}+\frac{1}{(a+\alpha)^5}\cdots+\frac{1}{(a+m\alpha)^5}\right)$$

$$-\tfrac{1}{10}\alpha^5\left(\frac{1}{a^5}+\frac{1}{x^5}\right)-\tfrac{1}{12}\alpha^6\left(\frac{1}{a^6}-\frac{1}{x^6}\right)$$

$$+\text{ etc.}$$

145. Die Methode, welche Joh. Bernoulli angegeben hat, das $\int X\partial x$ zu finden, beruht auf der in der Einleitung gewieſenen. Es iſt $\int X\partial x = Xx - \int x\partial X$. Der zweyte Theil werde ſo ausgedruckt: $\int \frac{\partial X}{\partial x} x\partial x$, ſo iſt davon das Integral $= \frac{1}{2}x^2 . \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{1}{2}\int x^2 . \frac{\partial^2 X}{\partial x}$, wenn ∂x unveränderlich genommen wird, d. i. wenn x gleichförmig wächſt oder abnimmt. Eben ſo iſt

$$\int x^2 . \frac{\partial^2 X}{\partial x} = \int \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} . x^2\partial x = \tfrac{1}{3}x^3 . \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \tfrac{1}{3}\int x^3 . \frac{\partial^3 X}{\partial x^2}.$$

Ferner iſt $\int x^3 . \frac{\partial^3 X}{\partial x^2} = \int \frac{\partial^3 X}{\partial x^3} . x^3\partial x = \frac{1}{4}x^3 . \frac{\partial^3 X}{\partial x^3}$

$- \frac{1}{4}\int x^4 . \frac{\partial^4 X}{\partial x^3}$, u. ſ. f.

Aus dieſen ſucceſſiven Integrationen entſteht

$$\int X\partial x = \text{Conſt.} + X . \frac{x}{1} - \frac{\partial X}{\partial x} . \frac{x^2}{1.2}$$
$$+ \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} . \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{\partial^3 X}{\partial x^3} . \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Die Formel iſt in der allgemeinen (141.) enthalten, und entſteht daraus, wenn $a = 0$ genommen wird, ſo daß A der Werth des Integrals für $x = 0$ iſt, und die Conſtante giebt

Eine andere Form gab Bernoulli ſeiner Reihe dadurch, daß er ſie nach den Potenzen der Function von x ordnete, und das Differential derſelben conſtant ſetzte. Es ſey u eine Function von x, ſo iſt, wenn ∂u unveränderlich genommen wird,

$$\int u\,\partial x = \int u\,\partial u.\ \frac{\partial x}{\partial u} = \tfrac{1}{2}u^2.\frac{\partial x}{\partial u} - \tfrac{1}{2}\int u^2.\frac{\partial^2 x}{\partial u}.$$

Auf ähnliche Art iſt

$$\int u^2.\frac{\partial^2 x}{\partial u} = \int u^2\,\partial u.\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \tfrac{1}{3}u^3.\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \tfrac{1}{3}\int u^3.\frac{\partial^3 x}{\partial u^2}.$$

Ferner

$$\int u^3.\frac{\partial^3 x}{\partial u^2} = \int u^3\,\partial u.\frac{\partial^3 x}{\partial u^3} = \tfrac{1}{4}u^4.\frac{\partial^3 x}{\partial u^3} - \tfrac{1}{4}\int u^4.\frac{\partial^4 x}{\partial u^3},$$

u. ſ. f. Daher iſt

$$\int u\,\partial x = \text{Conſt.} + \tfrac{1}{2}.\ \frac{\partial x}{\partial u}u^2 - \frac{1.1}{2.3}.\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}u^3$$

$$+ \frac{1.1.1}{2.3.4}.\ \frac{\partial^3 x}{\partial u^3}u^4 - \frac{1.1.1.1}{2.3.4.5}.\ \frac{\partial^4 x}{\partial u^4}u^5 + \text{etc.}$$

Man ſehe Leibn. et Bern. Commerc. epiſt. T.I. p. 16. 22. 28. 75. und Io. Bernoulli Opp. T.I. p. 125. T.III. p. 488.

147. Taylor hat in ſeiner Methodus incrementorum p 38, ein Verfahren angegeben, welches zur Abkürzung der Berechnung nach der Bernoulliſchen Formel ſehr dienlich iſt. Es iſt erſtlich

$$\int X\,\partial x = Xx - \int x\,\partial X.$$

Man bezeichne eine noch unbeſtimmte willkürliche Function von x durch w, ſetze ihr Differential conſtant, und führe dieſes in jene Formel ein, ſo daß

$$\int X\,\partial x = Xx - \int \frac{\partial X}{\partial w}.\ x\,\partial w.$$

Es ſey $\int x \partial w = p$, ſo iſt

$$\int \frac{\partial X}{\partial w} . \partial p = p . \frac{\partial X}{\partial w} - \int p . \frac{\partial^2 X}{\partial w} = p . \frac{\partial X}{\partial w} - \int \frac{\partial^2 X}{\partial w^2} . p \partial w .$$

Man ſetze $\int p \partial w = q$, ſo iſt

$$\int \frac{\partial^2 X}{\partial w^2} . \partial q = q . \frac{\partial^2 X}{\partial w^2} - \int q . \frac{\partial^3 X}{\partial w^3}$$

$$= q . \frac{\partial^2 X}{\partial w^2} - \int \frac{\partial^3 X}{\partial w^3} . q \partial w .$$

Auf gleiche Weiſe ſey $\int q \partial w = r$; $\int r \partial w = s$; $\int s \partial w = t$, u. ſ. f.
und es ergiebt ſich

$$\int X \partial x = X x - p . \frac{\partial X}{\partial w} + q . \frac{\partial^2 X}{\partial w^2} - r . \frac{\partial^3 X}{\partial w^3}$$

$$+ s . \frac{\partial^4 X}{\partial w^4} - t . \frac{\partial^5 X}{\partial w^5} + \text{etc.}$$

Die Function w iſt ſo zu wählen, daß die Differentialquotienten $\frac{\partial X}{\partial w}$, $\frac{\partial^2 X}{\partial w^2}$, etc. leicht zu finden ſeyn.

148. Exempel. Es ſey $X = \sqrt{(aa - xx)}$, ſo iſt $\partial X = - \frac{x \partial x}{X}$. Setzt man $\partial w = + x \partial x$, ſo iſt

$$\frac{\partial X}{\partial w} = - \frac{1}{X}; \quad \frac{\partial^2 X}{\partial w^2} = + \frac{1}{X^2} . \frac{\partial X}{\partial w} = - \frac{1}{X^3};$$

$$\frac{\partial^3 X}{\partial w^3} = + \frac{3}{X^4} . \frac{\partial X}{\partial w} = - \frac{3}{X^5}; \quad \frac{\partial^4 X}{\partial w^4}$$

$$= + \frac{3 . 5}{X^6} . \frac{\partial X}{\partial w} = - \frac{3 . 5}{X^7}, \text{ u. ſ. w.}$$

Ferner iſt $p = \int x^2 \partial x = \frac{1}{3} x^3$; $q = \frac{1}{3} \int x^4 \partial x = \frac{1}{3 \cdot 5} x^5$; $r = \frac{1}{3 \cdot 5} \int x^6 \partial x = \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} x^7$, u. ſ. f.

Alſo iſt, wenn die Bezeichnung X beybehalten wird,

$$\int \partial x \sqrt{(aa - xx)} = Xx + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{X} - \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 5} \cdot \frac{x^5}{X^3} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{x^7}{X^5} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \cdot \frac{x^9}{X^7} + \text{etc.}$$

Dieſelbe Reihe wird nach der Formel I. in (59.) gefunden. Nach der Bernoulliſchen Formel iſt die Rechnung beſchwerlich.

149. Taylor giebt noch eine Formel, worin ſtatt der ſucceſſiven Differentiale von X die von x gebraucht werden. Nämlich es ſey nun $X \partial w = \partial p$; $p \partial w = \partial q$; $q \partial w = \partial r$; $r \partial w = \partial s$; u. ſ. f.; ſo iſt

$$\int X \partial x = \int \frac{\partial x}{\partial w} . X \partial w = p . \frac{\partial x}{\partial w} - \int p . \frac{\partial^2 x}{\partial w} .$$

Ferner $\int p . \frac{\partial^2 x}{\partial w} = \int \frac{\partial^2 x}{\partial w^2} . p \partial w = q . \frac{\partial^2 x}{\partial w^2} - \int q . \frac{\partial^3 x}{\partial w^2}$. Fährt man mit dieſen Reductionen fort, ſo iſt

$$\int X \partial x = \text{Conſt.} + p . \frac{\partial x}{\partial w} - q . \frac{\partial^2 x}{\partial w^2} + r . \frac{\partial^3 x}{\partial w^2} - s . \frac{\partial^4 x}{\partial w^4} + \text{etc.}$$

150. Exempel. Es ſey wiederum $X = \sqrt{(aa - xx)}$. Man ſetze $\partial w = x \partial x$, oder $\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{1}{x}$, ſo iſt

$$\frac{\partial^2 x}{\partial w^2} = - \frac{1}{x^3};\quad \frac{\partial^3 x}{\partial w^3} = + \frac{3}{x^5},\ \text{u. ſ. f.}$$

Da $\partial X = - \frac{x \partial x}{\sqrt{(aa - xx)}}$ iſt, ſo iſt $\partial w = - X \partial X$, alſo $X \partial w = - X^2 \partial X$, und $p = - \frac{1}{3} X^3$. Ferner $p \partial w = + \frac{1}{3} X^4 \partial X$, alſo $q = + \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 5} X^5$. Weiter iſt $q \partial w = - \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 5} X^6 \partial X$, dadurch $r = - \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{3 \cdot 5 \cdot 7} X^7$, u. ſ. f. Alſo iſt, mit Beybehaltung der Bezeichnung X,

$$\int \partial x \sqrt{(aa - xx)} = \text{Conſt.} - \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 3} \cdot \frac{X^3}{x} + \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 5} \cdot \frac{X^5}{x^3} - \frac{1 \cdot 1}{5 \cdot 7} \cdot \frac{X^7}{x^5} + \frac{1 \cdot 1}{7 \cdot 9} \cdot \frac{X^9}{x^7} - \frac{1 \cdot 1}{9 \cdot 11} \cdot \frac{X^{11}}{x^9} + \text{etc.}$$

151. Newtons allgemeine Methode zu integriren, oder wie er es ausdruckt, jede Curve zu quadriren, beruht auf der Interpolation einer gegebenen Reihe von Größen, wozu er in der Methodus differentialis eine Anweiſung giebt, (Einſchalten S. 51.). Man betrachte in der Differentialformel, $X \partial x$ den Factor X als die Ordinate einer Curve, ſo iſt $\int X \partial x$ die Area derſelben für die Abſciſſe x. Man nehme die Curve für eine paraboliſche, deren Ordinaten y ſind, mit denen einige X übereinkommen. Die Ordinate für $x = 0$ ſey $= A$, die Anfangsglieder der Unterſchieds-

reihen ſeyn a, b, c, d, etc, und die Abſtände der Glieder gleich groß, ſo iſt (Arithm. Reihen höherer Ordnungen, 7.)

$$y = A + ax + \tfrac{1}{2}b(x^2 - x) + \tfrac{1}{6}c(x^3 - 3x^2 + 2x) + \tfrac{1}{24}d(x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x) + \text{etc.}$$

Daraus iſt

$$\int y\,\partial x = Ax + \tfrac{1}{2}ax^2 + \tfrac{1}{12}b(2x^3 - 3x^2) + \tfrac{1}{24}c(x^4 - 4x^3 + 4x^2) + \tfrac{1}{720}d(6x^5 - 45x^4 + 110x^3 - 90x^2) + \text{etc.}$$

Die Ordinaten der Curve, oder die Glieder der Reihe, für $x = 0; 1; 2; 3; 4;$ etc. ſeyn A, B, C, D, E, etc. ſo iſt

$a = B - A; \quad b = C - 2B + A;$

$c = D - 3C + 3B - A;$

$d = E - 4D + 6C - 4B + A;$

u. ſ. f. (a. a. O. 2.)

Nimmt man drey, vier, fünf, u. m. Glieder, und ſetzt $x = 2; 3; 4;$ etc. dem Abſtande der äuſſerſten Glieder, wenn der Abſtand zweyer nächſten zur Einheit genommen wird, ſo iſt, nach der zur Seite bemerkten Anzahl von Gliedern, das Integral $\int y\,\partial x =$

3). $\tfrac{1}{3}(6A + 6a + b)$.

4). $\tfrac{1}{8}(24A + 36a + 18b + 3c)$.

5). $\tfrac{1}{45}(180A + 360a + 300b + 120c + 14d)$.

Setzt man für die Anfangsglieder der Differenzreihen, a, b, c, d, ihre Werthe, ſo iſt das Integral

3). $\tfrac{1}{3}(A + C + 4B)$.

4). $\tfrac{3}{8}(A + D + 3(B + C))$.

5). $\tfrac{1}{45}(14(A + E) + 64(B + D) + 24C)$.

Newton giebt als Beyſpiel nur die Formel für vier Ordinaten. Montücla führt in ſeiner Geſchichte der Mathematik Th. III. S. 201. fünf Formeln an, für drey bis

ſieben Ordinaten, ohne anzugeben, wer ſie berechnet hat. Ich ſetze die beiden letzten zu den hier berechneten, mit den von mir gebrauchten Bezeichnungen,

6). $\frac{7}{288}(19(A+F)+75(B+E)+50(C+D))$

7). $\frac{6}{840}(41(A+G)+216(B+F)$
$+27(C+E)+272D)$

152. Exempel. Es werden an einer gleichſeitigen Hyperbel die Abſciſſen auf der einen Aſymptote genommen, und die Ordinaten der andern parallel gezogen, wie in Fig. 58. Tab. IV. Th. I. Die erſte der Ordinaten gehe durch den Scheitelpunct A, ſo iſt (wegen $ACB = 45°$) die Ordinate $AB =$ der Abſciſſe CB. Eine andere Abſciſſe CD ſey $= 2CB$, ſo iſt die Ordinate $DE = \frac{1}{2}AB$. Man ſetze $CB = 1$, alſo $BD = 1$; $AB = 1$; $DE = \frac{1}{2}$. Zwiſchen AB und ED ſchalte man fünf Ordinaten ein in gleichen Abſtänden, ſo ſind dieſe $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{11}$, da ſich die Ordinaten umgekehrt wie ihre Abſciſſen verhalten; die beiden äuſſerſten ſind 1 und $\frac{1}{2}$. Berechnet man die hyperboliſche Area ABDM nach der letzten Formel, ſo iſt ihr Werth $= 0,693147\ldots$ welcher bis auf die letzte Ziffer richtig iſt. Die Integralrechnung giebt

$$\int y\,\partial x = \int \frac{\partial x}{x} = l\,\frac{x}{\text{conſt.}} = lx,$$

wenn die Area bey AB, für $x = 1$, anfängt. Für $x = 2$ iſt ſie $= \log 2$. Der natürliche Logarithme von 2 iſt $= 0,69314718\ldots$

Integralgleichung iſt die endliche Gleichung zwiſchen zwey oder mehreren veränderlichen Größen, die durch die Integrirung einer Differentialgleichung entſtanden iſt. Wenn die Differentialgleichung vom zweyten oder einem höhern Grade iſt, ſo mag man auch die niedrigern Differentialgleichungen, die aus der höhern hergeleitet ſind, relativ Integralgleichungen nennen. Abſolut genommen iſt Integralgleichung die endliche Gleichung, welche durch die ſucceſſiven Integrationen hervorgeht.

Daß zur Integration der Differentialgleichungen keine allgemeine Methoden für jede Gattung derſelben vorhanden ſind, iſt in dem Artikel, Integralrechnung, ſchon bemerkt. In dem gegenwärtigen Artikel insbeſondere werden zu den höhern Gleichungen nur einzelne Beyſpiele von den nöthigſten Fällen angegeben werden können.

I. Sonderung der veränderlichen Größen in den Differentialgleichungen des erſten Grades zwiſchen zwey veränderlichen Größen.

1. Wenn eine Differentialgleichung die Form $Y\partial y = X\partial x$ hat oder erhält, worin X eine Function von x allein, und eben ſo Y von y allein iſt, ſo ſind die veränderlichen Größen geſondert.

Alsdann wird nach den in dem Artikel, Integralformel, gelehrten Methoden, jede der beiden Differentialformeln integrirt, und man erhält bey Zufügung der Conſtante, eine endliche Gleichung zwiſchen x und y. Denn zwey Functionen, deren Differentiale ſich gleich ſind, ſind ſich gleich, oder um eine Conſtante verſchieden.

2. Es ſey $P\partial x = Q\partial y$, und P ſo wie Q, ſey eine Function von x und y zugleich, ſo aber, daß jede ein Product von zwey Functionen, einer von x, und einer von y allein ſey, ſo iſt die Sonderung ſogleich bewerkſtelligt, wenn man durch die Diviſion die Function von y aus P, und die von x aus Q wegſchafft.

3. Es ſeyn in der Gleichung, $P\partial x = Q\partial y$, die Functionen P und Q gleichartige, nämlich ſolche, worin beide veränderliche Größen auf denſelben Grad ſteigen. Man ſetze $y = ux$, ſo wird dadurch $\frac{P}{Q} = U$, einer Function von u, und dadurch $\partial y = U\partial x$. Nun iſt auch $\partial y = u\partial x + x\partial u$, alſo iſt $u\partial x + x\partial u = U\partial x$, und daher

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{U-u}, \text{ alſo}$$

$$\log x = \int \frac{\partial u}{U-u}.$$

Nachdem das Integral, $\int \frac{\partial u}{U-u}$, gefunden iſt, ſetzt man darin für u ſeinen Werth, $\frac{y}{x}$, wodurch die Integralgleichung zwiſchen x und y erhalten wird. Iſt die Function U der veränderlichen u ſo beſchaffen, daß das Integral, $\int \frac{\partial u}{U-u}$, der Logarithmus einer algebraiſchen Function von u iſt, ſo iſt x dieſer Function gleich, und die Gleichung zwiſchen x und u iſt algebraiſch, daher auch die zwiſchen x und y.

4. Exempel. Es ſey

$$(\alpha x + \beta y)\partial x = (\gamma x + \delta y)\partial y.$$

Die Subſtitution $y = ux$ giebt hier

$$U = \frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u}; \; U - u = \frac{\alpha + (\beta - \gamma)u - \delta uu}{\gamma + \delta u},$$

und $\frac{\partial x}{x} = \frac{(\gamma + \delta u)\partial u}{\alpha + (\beta - \gamma)u - \delta uu}$, oder

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{(\delta u + \tfrac{1}{2}\gamma - \tfrac{1}{2}\beta)\partial u + (\tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{1}{2}\beta)\partial u}{\alpha + (\beta - \gamma)u - \delta uu}.$$

Daher

$$\log x = C - \log \sqrt{(\alpha + (\beta - \gamma)u - \delta uu)}$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)\int \frac{\partial u}{\alpha + (\beta - \gamma)u - \delta uu}.$$

Das Integral in dem zweyten Gliede des zweyten Theils wird aus Integralformel (25-28.) gefunden. Es ſind hier

drey Fälle zu unterſcheiden, wenn der Nenner zwey ungleiche reale, zwey gleiche oder zwey unmögliche Factoren hat. In dem erſten iſt das Integral logarithmiſch, daher die Gleichung zwiſchen x und u, ſo wie die zwiſchen x und y, algebraiſch. In dem zweyten iſt das Integral des zweyten Gliedes algebraiſch: in dem dritten hängt es von Winkeln ab; in beiden Fällen iſt die Gleichung zwiſchen x und y transſcendent.

Wenn $\gamma = \beta$ iſt, ſo iſt die Gleichung zwiſchen x und u, alſo zwiſchen x und y, algebraiſch.

5. Die Differentialgleichung ſey

$$(\alpha + \beta x + \gamma y)\partial x = (\delta + \varepsilon x + \zeta y)\partial y.$$

Man ſetze $\alpha + \beta x + \gamma y = t$,

$$\delta + \varepsilon x + \zeta y = u,$$

ſo iſt

$$(\beta\zeta - \gamma\varepsilon)x = \zeta t - \gamma u - \alpha\zeta + \gamma\delta,$$

$$(\beta\zeta - \gamma\varepsilon)y = \beta u - \varepsilon t + \alpha\varepsilon - \beta\delta.$$

Daher $\partial x : \partial y = \zeta\partial t - \gamma\partial u : \beta\partial u - \varepsilon\partial t$. Zugleich iſt $\partial x : \partial y = u : t$. Hieraus ergiebt ſich die homogene Gleichung,

$$(\zeta t + \varepsilon u)\partial t = (\beta u + \gamma t)\partial u,$$

deren Integration in (4) gewieſen iſt.

6. Wenn $\beta\zeta = \gamma\varepsilon$ iſt, ſo würde die in (5.) gebrauchte Subſtitution unendlich große Werthe für x und y geben. Man ſetze $\zeta = n\gamma$, (d. i. $n\beta = \varepsilon$) ſo wird die vorgegebene Gleichung dieſe,

$$\alpha\partial x + (\beta x + \gamma y)\partial x = \delta\partial y + n(\beta x + \gamma y)\partial y.$$

In dieſer ſetze man $\beta x + \gamma y = z$, ſo iſt

$$(\alpha + z)\partial x = (\delta + nz)\partial y.$$

Aus der angenommenen Gleichung iſt $\gamma\partial y = \partial z - \beta\partial x$, alſo verwandelt ſich jene Gleichung in dieſe,

$$(\alpha\gamma + \beta\delta + \gamma z + n\beta z)\partial x = (\delta + nz)\partial z,$$

oder

$$(\alpha\gamma+\beta\delta+(\gamma+\varepsilon)z)\partial x=(\delta+nz)\partial z.$$

Dadurch iſt

$$\partial x=\frac{(\delta+nz)\partial z}{\alpha\gamma+\beta\delta+(\gamma+\varepsilon)z}.$$

Da der Zähler hier von demſelben Grade mit dem Nenner iſt, ſo ſondere man durch die Diviſion den unveränderlichen Theil ab. Zur Abkürzung ſetze man

$$\partial x=\frac{(\delta+nz)\partial z}{fz+g}, \text{ ſo iſt}$$

$$\partial x=\frac{n\partial z}{f}+\frac{(\delta f-ng)\partial z}{f(fz+g)},$$

und **x** iſt zum Theil eine logarithmiſche Größe.

7. Iſt $\varepsilon=-\gamma$, ſo daß

$$(\alpha+\beta x+\gamma y)\partial x=(\delta-\gamma x+\zeta y)\partial y$$

iſt, ſo iſt die Integralgleichung,

$$\tfrac{1}{2}\beta x^2-\tfrac{1}{2}\zeta y^2+\gamma xy+\alpha x-\delta y+\text{Conſt.}=0,$$

eine Gleichung für einen Kegelſchnitt, die in beſondern Fällen auch für ein Syſtem zweyer geraden Linien seyn, das iſt, das Product zweyer Factoren, $a+bx+cy$ und $A+Bx+Cy$, seyn kann.

Der Fall, da hier $\varepsilon=-\gamma$ iſt, iſt derſelbe, da in (4.) $\gamma=-\beta$ iſt, wodurch die Integralgleichung algebraiſch iſt.

8. Es ſeyn ε und $\zeta=0$, und die Gleichung

$$(\alpha+\beta x+\gamma y)\partial x=\partial y.$$

Man ſetze $\beta x+\gamma y=z$, ſo wird erhalten,

$$(\alpha\gamma+\beta+\gamma z)\partial x=\partial z,$$

und daraus

$$\gamma x=\log\frac{\alpha\gamma+\beta+\gamma z}{C}.$$

Für z ſeinen Werth geſetzt, iſt

$$\gamma x = \log \frac{\alpha\gamma + \beta + \beta\gamma x + \gamma\gamma y}{C},$$

oder

$$\beta + \gamma(\alpha + \beta x + \gamma y) = C e^{\gamma x},$$

wo e die Baſis der natürlichen Logarithmen iſt.

9. Joh. Bernoulli, der zuerſt die Integration der homogenen Gleichungen durch die Subſtitution, $y = ux$, gelehrt hat, gab in den Petersburger Commentarien T. I. (Opp. T. III. p. 108.) noch eine andere Methode an, ſolche Gleichungen ohne Sonderung der veränderlichen Größen zu integriren. Zu der Differentialgleichung vom erſten Grade,

$$(ax + by)\partial x + (cx + ey)\partial y = 0,$$

gehöre die Integralgleichung,

$$(x + \alpha y)^{\pi} \times (x + \beta y)^{\tau} = C,$$

ſo ſind die vier Größen, α, β, π, τ, zu beſtimmen. Man nehme das Differential derſelben, mittelſt der Logarithmen,

$$\frac{\pi\partial x + \alpha\pi\partial y}{x + \alpha y} + \frac{\tau\partial x + \beta\tau\partial y}{x + \beta y} = 0.$$

Schafft man die Nenner weg durch die Multiplication mit denſelben, und vergleicht die Coefficienten von $x\partial x$, $y\partial x$, $x\partial y$, $y\partial y$ mit denen in der vorgegebenen Gleichung, ſo beſtimmen ſich die geſuchten Werthe. Bernoulli findet, wenn zur Abkürzung geſetzt wird,

$$\sqrt{(bb + 2bc + cc - 4ac)} = m,$$

daß die geſuchte Integralgleichung iſt,

$$(2ax + (b + c - m)y)^{b-c+m}$$
$$\times (2ax + (b + c + m)y)^{c-b+m} = \text{Conſt.}$$

Den Fall, da $m = 0$ iſt, erklärt Bernoulli nicht richtig oder zu unvollſtändig. Er ſagt, die endliche Gleichung, welche der Differentialgleichung Genüge leiſte, ſey

$2ax + (b + c)y = \text{Const.}$ Vielmehr ſind in dieſem Falle zwey ſolche, eigentlich das Product beider, welche die Gleichung auflöſen.

Bernoulli bemerkt, daß jede homogene Gleichung durch eine einfache, die für eine gerade Linie, aufgelöſet werde. Man ſetze $y = nx$, alſo $\partial y = n\,\partial x$, wo n eine beſtimmte Größe iſt, die inzwiſchen mehrerer Werthe fähig iſt. Durch dieſe Subſtitutionen gehen die veränderlichen Größen aus der Gleichung heraus, und es bleibt eine zwiſchen den gegebenen Coefficienten und der unbekannten n.

10. In der Gleichung, $\partial y + Py\partial x = Q\partial x$, ſind P und Q Functionen von x allein; es ſollen die veränderlichen Größen geſondert werden.

Man ſetze $y = Xu$, wo X eine noch zu beſtimmende Function von x iſt. Dadurch iſt

$$\begin{aligned} X\partial u + u\partial X &= Q\partial x. \\ + PXu\partial x & \end{aligned}$$

Iſt die Function X eine ſolche Function, daß $\partial X + PX\partial x = 0$ iſt, ſo bleibt $X\partial u = Q\partial x$; alſo iſt $\partial u = \frac{Q\partial x}{X}$, wo der zweyte Theil der Gleichung eine Differentialformel iſt, deren Integral ſich, wo nicht vollſtändig, doch durch Annäherung angeben läßt.

Da $\frac{\partial X}{X} = -P\partial x$ iſt, ſo iſt $\log X = -\int P\partial x$, und $X = e^{-\int P\partial x}$. Dadurch iſt $\partial u = e^{\int P\partial x}.\,Q\partial x$, und $u = \int e^{\int P\partial x}.\,Q\partial x$, folglich $y = e^{-\int P\partial x}\int e^{\int P\partial x}.\,Q\partial x$. Eine Conſtante braucht in dem Integral, $\int P\partial x$, nicht beygefügt zu werden, nur in dem $\int e^{\int P\partial x}Q\partial x$.

Dieſe Gleichung gehört zu der Gattung derjenigen, die man lineariſche genannt hat, ſolcher, worin die eine der veränderlichen Größen, y, und ihre Diffe-

rentiale nur in der erſten Potenz vorkommen. Der Ausdruck iſt aber nicht ſchicklich gewählt. ſ. Lineariſch.

11. Exempel. $\partial y + \frac{ny\partial x}{\sqrt{(1+xx)}} = a\partial x.$

Hier iſt $P = \frac{n}{\sqrt{(1+xx)}}$; $Q = a$;

$$\int P\partial x = n\log(\sqrt{(1+xx)}+x);$$

$$e^{\int P\partial x} = (\sqrt{(1+xx)}+x)^n;$$

$e^{-\int P\partial x} = (\sqrt{(1+xx)}-x)^n$, weil

überhaupt $\frac{1}{a+b} = \frac{a-b}{aa-bb}$ iſt. Folglich iſt

$$y = (\sqrt{(1+xx)}-x)^n \int a\partial x(\sqrt{(1+xx)}+x)^n.$$

Den ſummatoriſchen Factor zu entwickeln ſetze man $\sqrt{(1+xx)}+x = u$, ſo iſt

$x = \frac{uu-1}{2u}$; $\partial x = \frac{(1+uu)\partial u}{2uu}$; alſo

$$\int u^n\partial x = \frac{u^{n-1}}{2(n-1)} + \frac{u^{n+1}}{2(n+1)} + C.$$

Da $(\sqrt{(1+xx)}-x)^n = u^{-n}$, ſo iſt

$$y = Cu^{-n} + \frac{au^{-1}}{2(n-1)} + \frac{au}{2(n+1)}.$$

Für u ſein Werth geſetzt, wird

$$y = C(\sqrt{(1+xx)}-x)^n + \frac{na}{nn-1}\sqrt{(1+xx)}$$

$$-\frac{ax}{nn-1}.$$

12. Die Differentialgleichung ſey

$$\partial y + Py\partial x = Qy^{n+1}\partial x,$$

wo P und Q Functionen von x allein ſind.

Man ſetze $\frac{1}{y^n} = z$, ſo iſt $\frac{\partial y}{y} = -\frac{\partial z}{nz}$

und die Gleichung verwandelt ſich in dieſe:

$$-\frac{\partial z}{nz} + P\partial x = \frac{Q\partial x}{z}, \text{ oder}$$

$$\partial z - nPz\partial x = -nQ\partial x.$$

Dieſe hat dieſelbe Form, wie die in (9.) behandelte.

Mit dieſer Gleichung haben ſich beide Bernoulli und Leibnitz beſchäftigt. S. Acta erudit. 1695. 1696. 1697.

13. Die Differentialgleichung ſey

$$\alpha y\partial x + \beta x\partial y + x^m y^n(\gamma y\partial x + \delta x\partial y) = 0.$$

Man dividire die ganze Gleichung durch xy, ſo erhält ſie die Geſtalt:

$$\frac{\alpha\partial x}{x} + \frac{\beta\partial y}{y} + x^m y^n\left(\frac{\gamma\partial x}{x} + \frac{\delta\partial y}{y}\right) = 0.$$

Da $\frac{\alpha\partial x}{x} = \alpha\partial \log. x = \partial \log. x^\alpha$ iſt, und ſo auch die übrigen hier vorkommenden Differentiale, ſo ſetze man $x^\alpha y^\beta = t$, und $x^\gamma y^\delta = u$. Es iſt $\alpha l x + \beta l y = l t$, alſo $\frac{\alpha\partial x}{x} + \frac{\beta\partial y}{y} = \frac{\partial t}{t}$. Eben ſo $\frac{\gamma\partial x}{x} + \frac{\delta\partial y}{y} = \frac{\partial u}{u}$. Dadurch iſt

$$\frac{\partial t}{t} + x^m y^n.\frac{\partial u}{u} = 0.$$

Nun hat man noch für x und y ihre Werthe durch t und u zu ſetzen. Wenn man zur Abkürzung ſetzt $\alpha\delta - \beta\gamma = \lambda$, $\delta m - \gamma n = \mu$; $\alpha n - \beta m = \nu$, ſo iſt

$$\frac{\partial t}{t} + t^{\frac{\mu}{\lambda}}.u^{\frac{\nu}{\lambda}}.\frac{\partial u}{u} = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{\partial t}{t^{\mu:\lambda+1}} + u^{\nu:\lambda-1}\partial u = 0.$$

Hierzu iſt die Integralgleichung:

$$-\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{t^{\mu:\lambda}} + \frac{1}{\nu}u^{\nu:\lambda} = C.$$

14. Die Differentialgleichung ſey

$$(y-x)\partial y = \frac{n(1+yy)^{\frac{3}{2}}\partial x}{\sqrt{(1+xx)}}.$$

Durch die Subſtitution $y = \frac{x-u}{1+xu}$ wird die zweyfach irrationale Größe $\sqrt{\frac{1+yy}{1+xx}}$ in die einfach irrationale, $\frac{\sqrt{(1+uu)}}{1+xu}$, verwandelt. Man gebrauche alſo dieſe Subſtitution, um y und ∂y wegzuſchaffen, ſo erhält man die geſonderte Gleichung:

$$\frac{\partial x}{1+xx} = \frac{u\partial u}{(1+uu)(n\sqrt{(1+uu)}+u)}.$$

Die Gleichung einfacher zu machen, ſetze man

$$\sqrt{(1+uu)} = \frac{1+zz}{2z},\ \text{ſo iſt}$$

$$u = \frac{1-zz}{2z};\ \partial u = -\frac{(1+zz)\partial z}{2z^2}.$$

Durch dieſe Subſtitutionen wird

$$\frac{\partial x}{1+xx} = -\frac{2(1-zz)\partial z}{(1+zz)(n+1+(n-1)zz)},$$

oder

$$\frac{\partial x}{1+xx} = \frac{2n\partial z}{n+1+(n-1)zz} - \frac{2\partial z}{1+zz}.$$

Die Integration der Formeln, woraus dieſe Gleichung beſteht, ergiebt ſich aus Integralformel (15. 12.)

15. Die Differentialgleichung ſey:

$$\partial y + byy\partial x = ax^m \partial x.$$

Dieſes iſt die von Riccati herrührende, womit die Analyſten ſich viel beſchäftiget haben, ſ. oben S. 770.

I. Man ſuche, für welchen Werth von m die Gleichung homogen gemacht werden kann. Zu dem Ende ſetze man $y = z^n$, ſo verwandelt ſich die Gleichung in dieſe:

$$nz^{n-1}\partial z + bz^{2n}\partial x = ax^m \partial x.$$

Damit die Exponenten von z und x gleich groß ſeyn, muß $n = -1$ und $m = -2$ geſetzt werden. Die verwandelte Gleichung iſt nun

$$(az^2 - bx^2)\partial x = x^2 \partial z.$$

Setzt man $z = ux$, ſo wird nach (3.) erhalten:

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{auu - u - b},$$

wo beide Theile integrirbar ſind.

II. Behält man einen unbeſtimmten Werth für m, ſetzt aber $n = -1$, oder $y = \frac{1}{z}$, ſo iſt

$$-\frac{\partial z}{zz} + \frac{b\partial x}{zz} = ax^m \partial x, \text{ oder}$$

$$-\partial z + b\partial x = az^2 x^m \partial x.$$

Man ſetze $x^m \partial x = f\partial t$, um die Gleichung der vorgegebenen ähnlich zu machen, und dadurch die Integration der einen auf die der andern zu gründen. So iſt $\frac{1}{m+1} x^{m+1} = ft.$

Nimmt man $f = \frac{1}{m+1}$, ſo iſt $x^{m+1} = t$; alſo

$$\partial x = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{\partial t}{x^m} = \frac{1}{m+1} \cdot t^{-m:(m+1)}\partial t,$$

und die verwandelte Gleichung iſt

$$\partial z + \frac{a}{m+1} . z^2 \partial t = \frac{b}{m+1} t^{-m:(m+1)} \partial t.$$

Dieſe Gleichung iſt der vorgegebenen ähnlich. Kann in einer von beiden die Sonderung der veränderlichen Größen bewerkſtelligt werden, ſo wird die andere mittelſt jener aufgelöſet. Hat m in jener (der zwiſchen x und y) den beſtimmten Werth m′, in dieſer den Werth m″, ſo iſt

$$m'' = \frac{-m'}{m'+1}.$$

III. Man ſetze allgemeiner $y = Ax^p + x^q z$, und beſtimme p, q, A ſo, daß die verwandelte Gleichung drey Glieder wie die vorgegebene enthalte. Man wird finden, daß zu dem Ende geſetzt werden muß

$$y = \frac{1}{bx} + \frac{z}{xx}.$$ Dadurch iſt

$$\partial y = -\frac{\partial x}{bxx} + \frac{\partial z}{xx} - \frac{2z\partial x}{x^3},$$ und

$$yy = \frac{1}{b^2x^2} + \frac{2z}{bx^3} + \frac{z^2}{x^4}.$$ Die vorgegebene Gleichung iſt daher dieſe:

$$\partial z + \frac{bzz\partial x}{xx} = ax^{m+2}\partial x.$$

Setzt man $x = \frac{1}{t}$, daher $\partial x = -\frac{\partial t}{tt}$, ſo iſt

$$\partial z - bz^2 \partial t = -at^{-m-4}\partial t,$$

oder, wenn z mit —z vertauſcht wird,

$$\partial z + bz^2 \partial t = at^{-m-4}\partial t,$$

eine Gleichung, welche der vorgegebenen ganz ähnlich iſt. Iſt die eine von beiden integrirbar, ſo iſt es die andere mittelſt der hier angewandten Subſtitutionen auch. Nun iſt, für m = o, die Gleichung,

$\partial y + byy\partial x = a\partial x$, integrirbar, da aus derſelben iſt $\frac{\partial y}{a - byy} = \partial x$. Alſo iſt auch die Gleichung, $\partial z + bz^2\partial t = at^{-4}\partial t$, integrirbar durch die Subſtitutionen, $t = \frac{1}{x}$, und $z = \frac{1}{bt} - \frac{y}{tt}$, welche dieſelbe Form haben, wie diejenigen, durch welche die verwandelte Gleichung aus der erſtern entſtanden iſt. Dadurch wird ſie in die erſtere verwandelt.

IV. Die Werthe von m, für welche die vorgegebene Gleichung integrirbar iſt, ſind alſo 1) $m^{I} = 0$. 2) $m^{II} = -4$. 3) $m^{III} = \frac{+4}{-4+1} = -\frac{4}{3}$. 4) $m^{IV} = +\frac{3}{4} - 4 = -\frac{8}{3}$. 5) $m^{V} = \frac{+8:3}{-8:3+1} = -\frac{8}{5}$. 6) $m^{VI} = +\frac{8}{5} - 4 = -\frac{12}{5}$. 7) $m^{VII} = \frac{+12:5}{-12:5+1} = -\frac{12}{7}$. u. ſ. f.

Alle dieſe Exponenten ſind unter den beiden Formen $-\frac{4i}{2i-1}$ und $-\frac{4i}{2i+1}$ begriffen. Durch wiederholte Subſtitutionen, wie die in II und III. angegebenen ſind, welche wechſelsweiſe angewandt werden, kommt man zuletzt auf die Differentialgleichung von der Form $\partial y + byy\partial x = a\partial x$. Z. B. für $m = -\frac{8}{5}$ ſind vier ſolche Operationen erforderlich.

16. Die Methode der Subſtitutionen, um in einer Differentialgleichung die veränderlichen Größen zu ſondern, iſt von eingeſchränkten Nutzen, weil ſie nur ſelten angewandt werden kann, beſonders bey Gleichungen mit mehr als drey Gliedern, man müßte denn zufälliger Weiſe eine ſchickliche Subſtitution errathen. Bey höhern Differentialgleichungen iſt ſie nicht brauchbar. Hingegen iſt die

All

Methode, durch Hinzufügung eines Factors, der eine gewiſſe Function der veränderlichen Größen iſt, eine Differentialgleichung integrirbar zu machen, der geradeſte und natürlichſte Weg zur Integration, und auch bey höheren Gleichungen anwendbar.

Es iſt freylich auch noch keine allgemeine Methode zur Entdeckung des integrirenden Factors gefunden.

II. Integration der Differentialgleichung durch Multiplication mit einer Function der veränderlichen Größen.

17. In dem Artikel, Differentialgleichung (12—14.), iſt bewieſen, daß aus der Gleichung, $\partial V = P \partial x + Q \partial y$, welche aus einer Function V von x und y unmittelbar hergeleitet iſt, folget $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$. Dieſe letztere Gleichung iſt das Kennzeichen derjenigen Differentialgleichungen, welche ſich unmittelbar, ohne Umwandlungen, integriren laſſen. Um es dazu anzuwenden, müſſen P und Q endliche Functionen von x und y ſeyn.

18. Eine Differentialgleichung kann aber auf verſchiedene Art in der Form verändert werden, wodurch die Gleichheit der partiellen Differentialquotienten, $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$, aufgehoben wird. Es ſey $M + aN = b$, eine urſprüngliche Gleichung zwiſchen x und y, ſo daß M und N irgend welche Functionen von x und y ſeyn. Die Differentialgleichung iſt $\partial M + a \partial N = 0$. Man ſchaffe die Conſtante a durch Verbindung mit der endlichen Gleichung heraus, ſo wird erhalten: $\partial M + \frac{b - M}{N} \partial N = 0$, oder auch $N \partial M + (b - M) \partial N = 0$. Bey dieſer Gleichung kann der Charakter der unmittelbar integrirbaren Gleichungen nicht mehr Statt haben, weil darin der

Differential = Quotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ von der Conſtante b abhängig gemacht wird, von welcher er nicht abhängen darf, da b bey der Differentiation herausgeht. Die Form der Verhältnißglieder wird dadurch geändert, ſo aber, daß das Verhältniß $\partial x : \partial y$ für dieſelben x und y daſſelbe bleibt, wie in der unmittelbaren Differentialgleichung. Wird $b = o$ genommen, ſo iſt durch Wegſchaffung von a, die Differentialgleichung, $N \partial M - M \partial N = o$, worin ebenfalls die Form des Verhältniſſes verändert wird.

Zu der unmittelbaren Differentialgleichung kann auch das Product der endlichen urſprünglichen Gleichung in eine willkührliche Differentialformel, $p \partial x + q \partial y$, additiv oder ſubtractiv geſetzt werden, wo p und q Functionen von x und y ſind. Man ſehe von den Umwandlungen der Differentialgleichungen Eulers Differentialrechnung, Th. I. Kap. IX.

19. Die Differentialgleichung, welche unmittelbar aus einer endlichen Gleichung $U = Const.$ entſteht, ſey $M \partial x + N d y = o$. Sie werden multiplicirt mit einer Function L von x und y, ſo iſt $L M \partial x + L N \delta y = o$. Man ſetze $L M = P$; $L N = Q$, ſo daß $P \partial x + Q \partial y = o$ iſt. Nun ſind die partiellen Differentialquotienten

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = M\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) + L\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = N\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) + L\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

Hieraus folgt, weil $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ iſt,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = M\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) - N\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right).$$

Sollte $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ ſeyn, ſo wäre

$M:N = (\frac{\partial L}{\partial x}) : (\frac{\partial L}{\partial y})$. Dieſes letztere kann nicht Statt finden, wenn nicht L die Function ſelbſt iſt, woraus die Differentialgleichung, $M \partial x + N \partial y = 0$, entſteht.

Da L eine jede Function von x und y, oder einer von ihnen ſeyn kann, ſo giebt es für jede endliche Gleichung unzählig viele Differentialgleichungen, die alle in der Form verſchieden ſind, aber in dem Differential-Quotienten übereinkommen.

20. Eine gegebene Differentialgleichung, $P \partial x + Q \partial y = 0$, erfülle die Bedingung der Integrabilität nicht, weil ein Factor (oder Diviſor), der eine Function von x und y, oder einer von ihnen iſt, weggefallen iſt. Dieſer Factor (einen Diviſor unter dieſer Benennung mit begriffen), ſey $= R$, ſo daß die Gleichung, $L P \partial x + L Q \partial y = 0$, der Bedingung der Integrabilität gemäß ſey. (Daß L hier das umgekehrte von L in 19. iſt, wird keine Irrung machen). Dadurch iſt $(\frac{\partial . LP}{\partial y}) = (\frac{\partial . LQ}{\partial x})$, das iſt,

$$P(\frac{\partial L}{\partial y}) + L(\frac{\partial P}{\partial y}) = Q(\frac{\partial L}{\partial x}) + L(\frac{\partial Q}{\partial x}),$$

alſo

$$L\left((\frac{\partial P}{\partial y}) - (\frac{\partial Q}{\partial x})\right) = Q(\frac{\partial L}{\partial x}) - P(\frac{\partial L}{\partial y}).$$

Dieſe Gleichung für L wird gewöhnlich nicht leichter aufzulöſen ſeyn, als die vorgegebene ſelbſt, weil die Function L nicht allein von zwey veränderlichen Größen, ſondern auch von zwey partiellen Differentialquotienten abhängt.

Wenn in (19.) für M geſetzt wird $\frac{P}{L}$, und für N deſſen Werth $\frac{Q}{L}$, ſo wird eben eine ſolche Gleichung, wie

die hier gefundene erhalten, nur daß der zweyte Theil entgegengeſetzt iſt.

21. Man pflegt vorauszuſetzen, daß zu jeder Differentialgleichung zwiſchen zwey veränderlichen Größen eine endliche Gleichung gehöre, woraus ſie unmittelbar oder mittelbar hergeleitet ſey. Euler ſagt zwar am Ende des dritten Bandes der Integralrechnung, in dem Supplement, §. 2. er habe ſonſt ſchon gezeigt, daß für jede Differentialgleichung, es ſey vom erſten oder von einem höheren Grade, ein Factor möglich ſey, durch welchen ſie integrirbar werde, allein ich habe nicht finden können, wo er dieſes ausgeführt hat. D'Alembert ſagt in den Opuſcules T. IV. p. 255. (1768) ihm ſey nicht bekannt, daß jemand bewieſen habe, daß für jede Differentialgleichung vom erſten Grade zwiſchen x und y es eine Function derſelben gebe, durch welche die Gleichung multiplicirt ein vollſtändiges Differential werde. Er giebt hierauf einen Beweis, mit Zuziehung geometriſcher Vorſtellungen, der aber zu dunkel iſt. Durch die Gleichung $P\partial x + Q\partial y = 0$, iſt das Differentialverhältniß $\partial x : \partial y$ für jedes x durch das zugehörige, hier freylich noch unbekannte y, beſtimmt. Setzt man für $x = a$, die zugehörige $y = b$, welches wegen der noch willkührlichen Conſtante geſchehen darf, ſo iſt dadurch in einer ſtetigen Reihe das unmittelbar folgende y beſtimmt. Daraus ergiebt ſich wegen des beſtimmten Differentialverhältniſſes das auf jenes unmittelbar folgende y, und ſo immer fortgehend. Eine Curve in derſelben Ebene wird durch die Ordinate in dem Anfangspuncte der Abſciſſen oder für irgend eine gegebene Abſciſſe, und durch die Richtungen in jedem folgenden Puncte (das Verhältniß $\partial x : \partial y$) beſtimmt. Auch folgen die Halbmeſſer der Krümmung ſucceſſiv aus dem in dem Anfangspuncte angenommenen.

22. Iſt ein integrirender Factor für eine Differentialgleichung gefunden, ſo kann man unzählig viele andere finden. Die Gleichung ſey $P\partial x + Q\partial y = 0$, der in-

tegrirende Factor $=L$, ſo daß $LP\partial x + LQ\partial y = \partial Z$, und die Function Z ſich durch Integration finden laſſe. Es ſey φZ irgend eine Function von Z, ſo iſt $(LP\partial x + LQ\partial y)\,\varphi Z = \varphi Z.\,\partial Z$. Der zweyte Theil iſt als eine Differentialformel mit einer einzigen veränderlichen Größe auf eine oder andere Art integrirbar. Folglich iſt die Gleichung, $P\partial x + Q\partial y = 0$, durch den Factor φZ integrirbar, wenn ſie es durch den Factor Z wird.

23. Durch $\int P\partial x$ wird immer ein Integral bezeichnet, das bloß in Abſicht auf diejenige veränderliche Größe, deren Differentialzeichen beygefügt iſt, genommen wird, wenn gleich P eine Function von zwey oder mehrern veränderlichen Größen iſt. Man nenne es kurz ein relatives Integral. Z. B. $\int x^m y^n \partial x = \frac{1}{m+1} x^{m+1} y^n$.

24. Eine Differentialgleichung, $P\partial x + Q\partial y = 0$, ſey entweder für ſich integrirbar, oder durch einen integrirenden Factor es geworden: es ſoll die Integralgleichung zu derſelben gefunden werden.

Es ſey Z die endliche Function, deren Differential $\partial Z = P\partial x + Q\partial y$. Die Gleichung werde bloß in Abſicht auf x integrirt, ſo iſt $Z = \int P\partial x + Y$, wo Y eine Function von y allein, mit einer willkührlichen Conſtante iſt, da y bey dieſer Integration als eine unveränderliche Größe behandelt wird. Es enthält alſo Y alle Glieder der Gleichung, welche von der veränderlichen x frey ſind. Nun differentiire man Z in Abſicht auf x und y zugleich, ſo iſt

$$\partial Z = P\partial x + V\partial y + \partial Y,$$

wo $V\partial y$ der Theil des Differentials von $\int P\partial x$ iſt, der durch die Veränderlichkeit von y entſteht, ſo wie $P\partial x$ durch die Veränderlichkeit von x erhalten wird. Vergleicht man dieſe Gleichung mit der gegebenen, ſo iſt

$V \partial y + \partial Y = Q \partial y$, alſo $\partial Y = (Q - V) \partial y$, und $Y = \int (Q - V) \partial y$.

Folglich iſt

$$Z = \int P \partial x + \int (Q - V) \partial y,$$

wo $Q - V$ eine Function von y allein iſt, weil Y eine ſolche iſt.

24. Integrirt man zuerſt in Abſicht auf y allein, und bezeichnet das partielle Differential von $\int Q \partial y$ in Abſicht auf x durch $U \partial x$, ſo iſt

$$Z = \int Q \partial y + \int (P - U) \partial x,$$

wo $P - U$ eine Function von x allein iſt.

25. Es iſt der partielle Differentialquotient

$$\left(\frac{\partial . \int P \partial x}{\partial y}\right) = \int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Denn es ſey Z eine ſolche Function von x und y, daß $\partial Z = P \partial x + Q \partial y$, und $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$.

Nun iſt $Z = \int P \partial x + Y$, und $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial . \int P \partial x}{\partial y}\right) + \frac{\partial Y}{\partial y}$, oder $Q = V + \frac{\partial Y}{\partial y}$, wo V zur Abkürzung für das erſte Glied des zweyten Theils geſetzt iſt. Hieraus iſt $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$, alſo $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$, und integrirt $V = \int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$.

Nämlich ſo wie in dem Differential ∂V bloß x als veränlich betrachtet wird, ſo auch in der Größe unter dem Integralzeichen.

Oder: es iſt $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = P$, und $\left(\frac{\partial \partial Z}{\partial x \partial y}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$.

Aus der Gleichung $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = V + \frac{\partial Y}{\partial y}$ folgt auch

$$\left(\frac{\partial \partial Z}{\partial y \partial x}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right); \text{ daher iſt } \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

und $V = \int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ wie vorher.

Die Conſtante zu dem durch V bezeichneten Integral kann eine Function von y ſeyn, eben ſo wie die Conſtante zu $\int P \partial x$.

26. Exempel. Es ſey $Z = x^m y^n + x^\mu + y^\nu + a$, welche Function alle Arten von Gliedern enthält, die in einer rationalen ganzen algebraiſchen vorkommen können. Hieraus iſt $P = m x^{m-1} y^n + \mu x^{\mu-1}$; $Q = n x^m y^{n-1} + \nu y^{\nu-1}$; ferner $V = n x^m y^{n-1}$, alſo $Q - V = \nu y^{\nu-1}$, und nun rückwärts $Z = \int P \partial x + \int (Q - V) \partial y = x^m y^n + x^\mu + y^\nu$, wie es angenommen worden.

Auch iſt hier $\left(\frac{\partial . \int P \partial x}{dy}\right) = n x^m y^{n-1}$, und

$$\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \int m n x^{m-1} y^{n-1} \partial x = n x^m y^{n-1}.$$

27. Exempel. Es ſey $Z = \log \left(x + \sqrt{(xx+yy)}\right)$, ſo iſt (Differentialformel, 14.)

$$\partial Z = \frac{1 + x : \sqrt{(xx+yy)}}{x + \sqrt{(xx+yy)}} \partial x + \frac{y : \sqrt{(xx+yy)}}{x + \sqrt{(xx+yy)}} dy.$$

Multiplicirt man in dem erſten Bruche Zähler und Nenner durch $\sqrt{(xx+yy)}$, in dem zweyten durch daſſelbe und durch $\sqrt{(xx+yy)} - x$, ſo wird

$$\partial Z = \frac{\partial x}{\sqrt{(xx+yy)}} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{(xx+yy)}}\right)dy.$$

Hier iſt $\int P\partial x = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(xx+yy)}} =$

$l(x+\sqrt{(xx+yy)})$, und $V = \frac{y:\sqrt{(xx+yy)}}{x+\sqrt{(xx+yy)}}$.

Daher $V = Q$, und $Q - V = 0$, ſo daß

$Z = \log\left(x+\sqrt{(xx+yy)}\right) + \text{Conſt}.$

Auch iſt hier $\left(\frac{\partial.\int P\partial x}{\partial y}\right) = \frac{y:\sqrt{(xx+yy)}}{x+\sqrt{(xx+yy)}}$

$= \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{(xx+yy)}}$; und $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$

$= \int \frac{-y\partial x}{(xx+yy)^{3:2}} = \text{Conſt} - \frac{x}{y\sqrt{(xx+yy)}}$,

wo die Conſtante eine Function von y ſeyn kann, in dieſem Falle $= \frac{1}{y}$ iſt.

28. Exempel. Die Differentialgleichung, $(aa+2xy+xx)\,\partial x + (xx+yy-aa)\,\partial y = 0$, zu integriren.

Hier iſt $P = aa+2xy+xx$; und

$Q = xx+yy-aa$, alſo $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = 2x$; und

$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 2x$, daher die Gleichung an ſich integrirbar iſt. Nun iſt $\int P\partial x = aax + xxy + \frac{1}{3}x^3$, und $V\partial y = xx\partial y$, alſo $(Q - V)\,\partial y = (yy-aa)\,\partial y$, und $\int (Q - V)\,\partial y = \frac{1}{3}y^3 - aay$, folglich iſt die Integralgleichung:

$$aax + xxy + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{3}y^3 - aay = \text{Conſt}.$$

In dieſem Beyſpiele iſt es leicht zu bemerken, daß die beiden Glieder, $2xy\partial x + xx\partial y$, aus xxy entſtehen. Die übrigen ſind alle Differentiale von einer einzigen veränderlichen Größe, daher die Integration ohne eine künſtliche Methode ſich ergiebt.

29. Zur Erläuterung des angewieſenen Verfahrens bemerke man, daß darum, weil bey der Integrirung von $P\partial x$ die veränderliche Größe y als unveränderlich angeſehen wird, das Differential, welches aus derſelben entſteht, durch ein gleiches entgegengeſetztes gehoben werden muß. Dieſes iſt das durch $V\partial y$ bezeichnete. Da $Q - V$ eine Function von y allein iſt, ſo iſt das Integral, $\int (Q - V)\partial y$ entweder in einer endlichen Geſtalt, oder durch eine Reihe zu finden möglich.

30. Wenn das Integral $\int P\partial x$ den Factor $x - f$, oder eine Potenz von $x - f$ als Factor enthält, ſo iſt derſelbe Factor auch in $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ enthalten.

Denn es ſey $\int P\partial x = U$, einer Function von x und y, und $U = (x-f)^n T$, wo T eine Function von x und y iſt. Nun iſt $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = (x-f)^n \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)$, alſo $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = (x-f)^n \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)$, nach (25.). Beide Integrale, $\int P\partial x$ und $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$, ſind alſo für $x = f$ zugleich Null, und die Beſtimmung der Conſtante in dem einen bringt zugleich die Beſtimmung der Conſtante in dem andern mit ſich.

Euler macht dieſe Bemerkung allgemeiner. Wenn $\int P\partial x$ für $x = f$ Null iſt, ſo iſt, ihm zufolge, für denſelben Werth von x auch $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ Null. Calc. In-

tegr. T. 1. §. 457. Man wird die Beſtimmmung, $\int P\partial x = 0$, darauf einſchränken müſſen, daß ſie durch einen gegebenen Werth von x, nicht durch einen von y abhangenden erfüllt werde. Denn in dem Exempel (27.) iſt $\int P\partial x = 0$, wenn $x + \sqrt{(xx + yy)} = 1$ iſt, aber das Integral $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ wird gar nicht Null.

31. Aufg. Für eine gleichartige Gleichung, $P\partial x + Q\partial y = 0$, den integrirenden Factor zu finden.

Es ſeyn P und Q jede Functionen von n Dimenſionen, in Beziehung auf x und y, da die unveränderlichen Größen hier nur bloße Zahlgrößen ſind. Durch die Subſtitution $y = ux$, wird $P = x^n U$, und $Q = x^n V$, wo U und V Functionen von u allein ſind. Da $\partial y = u\partial x + x\partial u$ iſt, ſo iſt

$P\partial x + Q\partial y = x^n (U + Vu)\,\partial x + x^{n+1} V\partial u.$

Hier iſt nach den gemachten Subſtitutionen, $x^{n+1}(U + Vu) = Px + Qy$. Dividirt man die Gleichung auf der einen Seite durch $Px + Qy$, auf der andern durch $x^{n+1}(U + Vu)$, ſo iſt

$$\frac{P\partial x + Q\partial y}{Px + Qy} = \frac{\partial x}{x} + \frac{V\partial u}{U + Vu}.$$

Der Theil rechter Hand iſt an ſich integrirbar, daher auch der Theil linker Hand und der geſuchte integrirende Factor iſt $\frac{1}{Px + Qy}$.

32. Es muß alſo, wenn der Kürze wegen $\frac{P}{Px + Qy} = R$, und $\frac{Q}{Px + Qy} = S$ geſetzt wird, $\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)$ ſeyn. Es verlohnt ſich der Mühe, dieſes aus der Natur der homogenen Gleichungen herzuleiten.

In dem Artikel, Differentialgleichung, (10.), iſt gezeigt, daß, wenn V eine gleichartige Function von n Dimenſionen, und $\partial V = P\partial x + Q\partial y$ iſt, daraus $Px + Qy = nV$ folget. Nun läßt ſich das Differential der unbeſtimmten Functionen P, Q, folgendergeſtalt durch die partiellen Differentiale derſelben ausdrücken:

$$\partial P = \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \partial y \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

$$\partial Q = \partial x \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \partial y \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right).$$

Daraus iſt, nach dem angeführten Satze,

$$nP = x \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + y \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$nQ = x \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + y \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right).$$

Ferner iſt

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = \left[(Px+Qy)\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - Px\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - Py\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - PQ\left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)\right] : [Px+Qy]^2,$$

das iſt

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = \left[Qy\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - Py\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - PQ\right] : [Px+Qy]^2.$$

Eben ſo iſt, wenn P und Q, x und y gegenſeitig vertauſcht werden,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) = \left[Px\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) - Qx\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) - PQ\right] : [Px+Qy]^2.$$

Die Werthe von n P und n Q multiplicire man, jenen mit Q, dieſen mit P, ſo geben die beiden gleichen Werthe von n P Q die Gleichung,

$$Q y \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - P y \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = P x \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) - Q x \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right).$$

Daher ſind die partiellen Differentialquotienten, $\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)$, einander gleich.

33. Mit der verwandelten Gleichung, $R \partial x + S \partial y = 0$, verfährt man nun ſo, wie in (24.) angewieſen iſt. Es wird meiſtens bequemer ſeyn, ſich der Methode durch Scheidung der veränderlichen Größen in (3.) zu bedienen, als dieſer durch einen integrirenden Factor. Die Gleichung,

$$(\alpha x + \beta y) \partial x + (\gamma x + \delta y) \partial y = 0,$$

welche in (4.) durch Sonderung integrirt iſt, würde mittelſt eines integrirenden Factors ſehr viele Mühe machen. In einzelnen Fällen aber kann es bequem ſeyn, ſich eines ſolchen zu bedienen.

34. Ex. Die Gleichung $\alpha y \partial x + \beta x \partial y = 0$, zu integriren. Hier iſt der integrirende Factor $= \frac{1}{(\alpha + \beta) x y}$ oder mit Weglaſſung des unveränderlichen Factors $= \frac{1}{x y}$, wodurch die verwandelte Gleichung iſt, $\frac{\alpha \partial x}{x} + \frac{\beta \partial y}{y} = 0$.

Die Integrale iſt $\alpha l x + \beta l y = C$, oder $l x^\alpha y^\beta = C$, oder $x^\alpha y^\beta = C$.

35. Für die Gleichung,

$$(\alpha + \beta x + \gamma y) \partial x = (\delta + \varepsilon x + \zeta y) \partial y,$$

den integrirenden Factor zu finden, ſetze man, wie in (5.) geſchehen iſt, $\alpha + \beta x + \gamma y = t$, und $\delta + \varepsilon x + \zeta y = u$, ſo iſt $(\zeta t + \varepsilon u) \partial t = (\beta u + \gamma t) d u$.

Dieſes iſt eine gleichartige Gleichung, und daher durch Zufügung eines Factors integrirbar, da ſie es im Allgemeinen nicht iſt. Setzt man in (31.) t und u für x und y; ferner $P = \zeta t + \varepsilon u$; $Q = -\beta u - \gamma t$, ſo iſt der integrirende Diviſor $= \zeta tt + (\varepsilon - \gamma) tu - \beta uu$, in welchem nun wieder für t und u ihre Werthe zu ſetzen ſind.

36. Zuweilen bietet ſich der integrirende Factor oder Diviſor gleich dar, wie bey der Gleichung, $Xy\partial x + \partial y = o$, wo dieſer Diviſor iſt y, wenn nämlich X eine Function von x allein iſt. Es iſt dadurch

$$X\partial x + \frac{\partial y}{y} = o, \text{ und die Integrale iſt}$$

$\int X\partial x + ly = C$. Da $\log. e^z = z$, ſo iſt die Gleichung auch $\log. e^{\int X\partial x} + \log. y = C$ oder $\log. e^{\int X\partial x} y = C$. Daher iſt auch $e^{\int X\partial x} y = C$, und $e^{\int X\partial x}$ iſt ein Multiplicator, der die Differentialgleichung integrirbar macht.

Es entſteht nämlich aus der endlichen Gleichung, $e^u y = C$, die Differentialgleichung $e^u y\partial u + e^u \partial y = o$, das iſt, $y\partial u + dy = o$. Hier iſt $u = \int X\partial x$; $\partial u = X\partial x$.

37. Aufg. Zu der Gleichung, $\partial y + Py\partial x = Q\partial x$, worin P und Q Functionen von x allein ſind, den integrirenden Factor zu finden.

Da der zweyte Theil bloß x enthält, und der erſte die Formel in (36.) iſt, welche durch die Multiplication mit $e^{\int P\partial x}$ integrirbar wird, ſo wird die ganze Gleichung durch dieſen Factor integrirbar.

Die Integralgleichung iſt nun

$$e^{\int P\partial x} y = \int e^{\int P\partial x} Q\partial x,$$

wie in (9.) ſchon gefunden iſt.

38. Exempel. In Joh. Bernoulli Hydraulik, Opp. T. IV. p. 408 kommt folgende Gleichung vor:

$$\alpha z\partial x + (\beta + \gamma x)\partial z = (\varepsilon + \theta x)\partial x.$$

Man gebe dieſer die Geſtalt,

$$\partial z + \frac{\alpha z \partial x}{\beta + \gamma x} = \frac{\varepsilon + \theta x}{\beta + \gamma x} \partial x,$$

ſo iſt hier $P = \frac{\alpha}{\beta + \gamma x}$; $Q = \frac{\varepsilon + \theta x}{\beta + \gamma x}$,

und $\int P \partial x = \frac{\alpha}{\gamma} \log(\beta + \gamma x)$. Zur Abkürzung ſey $\beta + \gamma x = u^{\gamma : \alpha}$, ſo iſt $\int P \partial x = \log u$, und $e^{\int P \partial x} = e^{\log u} = u$. (Es iſt nämlich log u der Logarithme dieſer Exponentialgröße). Alſo iſt der integrirende Factor u oder $(\beta + \gamma x)^{\frac{\alpha}{\gamma}}$. Es ſey $\frac{\alpha}{\gamma} = m$, ſo iſt

$$\beta + \gamma x = u^m; \; x = \frac{u^m - \beta}{\gamma}; \; \partial x = \frac{1}{\alpha} u^{m-1} \partial u;$$

und die Gleichung iſt

$$\partial z + \frac{z \partial u}{u} = \frac{\varepsilon}{\alpha} \cdot \frac{\partial u}{u} + \frac{\theta}{\alpha \gamma} (u^m - \beta) \frac{\partial u}{u},$$

und durch die Multiplication mit u,

$$u \partial z + z \partial u = \frac{\varepsilon}{\alpha} \partial u + \frac{\theta}{\alpha \gamma} (u^m - \beta) \partial u.$$

Die Integralgleichung iſt

$$u z = \frac{\gamma \varepsilon - \beta \theta}{\alpha \gamma} u + \frac{\theta}{(\alpha + \gamma) \gamma} u^{m+1} + C.$$

Wird x wieder eingeführt, ſo iſt, nach gehöriger Reduction,

$$z = \frac{\varepsilon(\alpha + \gamma) - \beta \theta}{\alpha(\alpha + \gamma)} + \frac{\theta x}{\alpha + \gamma} + C.$$

Man ſieht, daß eine ſehr einfache endliche Gleichung eine ziemlich zuſammengeſetzte Differentialgleichung geben kann. Es ſind in jener eigentlich nur zwey gegebene Größen. Dieſe ſind aus mehrern zuſammengeſetzt, und

darauf vertheilt worden. Dann iſt vor der Differentiation eine Potenzialgröße als Factor zugeſetzt.

39. Die Gleichung, $\partial y + P y \partial x = Q y^{n+1} \partial x$, wird durch die Subſtitution $\frac{1}{y^n} = z$ in dieſe:

$$\partial z - n P z \partial x = - n Q \partial x,$$

verwandelt, und wird alſo durch einen Factor von derſelben Form, wie der in (37.) gefundene integrirt.

40. Auch die Gleichung, $\partial Y + P Y \partial x = Q \partial x$, wird durch den Factor $e^{\int x \partial x}$ integrirbar.

41. Aufg. Zu der Differentialgleichung,

$$\alpha y \partial x + \beta x \partial y = x^m y^n (\gamma y \partial x + \delta x \partial y),$$

den integrirenden Factor zu finden.

Man ſuche zuerſt für jeden der beiden Theile den einfachſten Factor, und nehme dann den allgemeinen unbeſtimmten nach (22.) ſo, daß für beide Theile der Factor derſelbe werde. Für den erſten Theil iſt nach (34.) ein integrirender Factor $\frac{1}{xy}$, und das Integral $= x^\alpha y^\beta$; daher ein unbeſtimmter allgemeiner Factor $= \frac{1}{xy} \varphi x^\alpha y^\beta$. Für den zweyten Theil iſt der einfachſte Factor $= \frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}}$, als wodurch derſelbe wird $\frac{\gamma \partial x}{x} + \frac{\delta \partial y}{y}$, wovon das Integral iſt $\log x^\gamma y^\delta$, oder auch $x^\gamma y^\delta$, weil beides einer unbeſtimmten Conſtante gleich ſeyn muß. Der allgemeine integrirende Factor iſt nun hier $\frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}} \varphi x^\gamma y^\delta$. Die Functionen ſeyn die eine die μte Potenz, die andere die νte der Functionalgröße, ſo muß ſeyn

$$x^{\mu\alpha-1}y^{\mu\beta-1}=x^{\nu\gamma-m-1}y^{\nu\delta-n-1}.$$

Daraus folgt $\mu\alpha=\nu\gamma-m$, und $\mu\beta=\nu\delta-n$, ſo daß $\mu=\frac{\gamma n-\delta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}$; $\nu=\frac{\alpha n-\beta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}$. Werden nun die beiden Theile der Gleichung, der erſte mit $x^{\mu\alpha-1}y^{\mu\beta-1}$, der andere mit $x^{\nu\gamma-m-1}y^{\nu\delta-n-1}$ multiplicirt, ſo iſt die Gleichung integrirbar und, die Integrale iſt

$\frac{1}{\mu}x^{\mu\alpha}y^{\mu\beta}=\frac{1}{\nu}x^{\nu\gamma}y^{\nu\delta}+\text{Conſt.}$ wo für μ und ν ihre obigen Werthe zu ſetzen ſind.

42. Wenn $\mu=0$, ſo iſt $\log. x^{\alpha}y^{\beta}=\frac{1}{\nu}x^{\nu\gamma}y^{\nu\delta}+C$. Und auf gleiche Art iſt, wenn $\nu=0$ iſt,

$$\frac{1}{\mu}x^{\mu\alpha}y^{\mu\beta}=\log. x^{\nu}y^{\delta}+C.$$

Iſt $\alpha\delta=\beta\gamma$, ſo verwandelt ſich die allgemeine Gleichung in dieſe:

$$(\alpha y\partial x+\beta x\partial y)\left(1-\frac{\gamma}{\alpha}x^{m}y^{n}\right)=0.$$

Dadurch iſt theils $\alpha y\partial x+\beta x\partial y=0$, theils $1-\frac{\gamma}{\alpha}x^{m}y^{n}=0$, alſo ſowohl $x^{\alpha}y^{\beta}=\text{Conſt.}$ als $x^{m}y^{n}=\frac{\alpha}{\gamma}$. Beide Gleichungen geben $x^{\alpha-m}y^{\beta-n}=\frac{C\gamma}{\alpha}$. Dieſer Fall entſteht, wenn in der allgemeinen Integralgleichung (40.) die Conſtante $=0$ geſetzt wird.

43. Wenn für eine Differential-Gleichung ſich kein integrirender Factor finden läßt, ſo verſuche man eine Subſtitution für die veränderlichen Größen, durch welche

die Sonderung möglich wird. Die vorgegebene Gleichung ſey $P\partial x + Q\partial y = 0$. Durch die Einführung zweyer andern veränderlichen Größen, t und u, die Functionen von x und y ſind, werde eine Gleichung, $R\partial t + S\partial u = 0$, erhalten, welche durch die Diviſion mit einer Function V von t und u eine geſonderte werde, ſo daß $\frac{R}{V}$ eine Function von t allein, und $\frac{S}{V}$ eine Function von u allein ſey. Da nun die Formel, $\frac{R\partial t + S\partial u}{V}$, an ſich integrirbar iſt, ſo iſt auch die Formel, $\frac{P\partial x + Q\partial y}{V}$, integrirbar, nachdem in der Function V für t und u ihre Werthe durch x und y zurückgeſetzt ſind.

44. Wenn alſo eine Differentialgleichung ſich in eine geſonderte verwandeln läßt, ſo iſt für ſie ein integrirender Factor zu finden möglich. Im Gegentheil wird aber nicht immer eine Sonderung möglich ſeyn, wo ein integrirender Factor ſich angeben läßt. Die Methode, durch Factoren zu integriren erſtreckt ſich alſo weiter als die der Sonderung.

45. Da ſich keine beſtimmte Vorſchriften geben laſſen, den integrirenden Factor für jeden Fall zu finden, ſo iſt es ſehr nützlich, umgekehrt aus einer angenommenen Form des integrirenden Factors die Functionen von x und y zu beſtimmen, welche eine durch jenen Factor integrirbare Gleichung, $P\partial x + Q\partial y = 0$, geben. Euler hat die Methode in der Integralrechnung, T. I. Sect. II. Cap. III. abgehandelt, womit man nach Lacroix Integralrechnung §. 561—565. vergleichen mag. Die Methode hiezu iſt im allgemeinen folgende. Die Gleichung ſey $P\partial x + Q\partial y = 0$; der angenommene Factor $= V$, ſo iſt $\left(\frac{\partial . PV}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial . QV}{\partial x}\right)$, alſo $V\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) + P\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$

$-V\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)-Q\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)=0$. In P, Q, V ſey die Zuſammenſetzung aus y und x beſtimmt, ſo aber, daß die darin befindlichen Functionen von x, die durch X, X^{1}, X^{11} etc. bezeichnet werden, unbeſtimmt gelaſſen werden. Z. B. $P=Xy$ oder $Xy+X^{1}$, oder $X+y$, oder $X+y^{2}$. Auf gleiche Art verhalte es ſich mit Q, und eben ſo mit V, als

$V=y^{3}+Xy^{2}+X^{1}y$, oder $\frac{y^{m}}{(1+Xy)^{n}}$, oder

$(yy+Xy+X^{1})^{n}$. Ordnet man in der Gleichung für die partiellen Differentialquotienten die Glieder nach den Potenzen von y, und ſetzt das Aggregat der zu derſelben Potenz gehörigen $=0$, ſo erhält man Bedingungsgleichungen für die Formen der unbeſtimmt gelaſſenen Functionen von X, deren alſo gerade ſo viele ſeyn müſſen, als man Bedingungsgleichungen erhalten hat.

46. Läßt man in der Gleichung, $P\partial x+Q\partial y=0$, die Functionen P und Q beide auf eine unbeſtimmte Art ſowohl x als y enthalten, und nimmt zum integrirenden Factor die Formel $Px+Qy$, ſo werden die Functionen P und Q auf folgende Art beſtimmt.

In der Formel $\frac{P\partial x+Q\partial y}{Px+Qy}$ ſetze man $Q=PR$,

ſo wird ſie dieſe: $\frac{\partial x+R\partial y}{x+Ry}$. Um die partiellen Differentiale dieſer Function bezeichnen zu können, ſetze man $\partial R=M\partial x+N\partial y$, wo die Relation zwiſchen M und N noch zu beſtimmen iſt. Da die Function $\frac{\partial x+R\partial y}{x+Ry}$ an ſich integrirbar ſeyn ſoll, ſo iſt zufolge der Bedingungsgleichung für dieſe Beſchaffenheit,

$\frac{1}{\partial y}\partial.\frac{1}{x+Ry}=\frac{1}{\partial x}\partial.\frac{R}{+Ry}$, weil nun anſtatt

P und Q die Functionen $\frac{1}{x + Ry}$ und $\frac{R}{x + Ry}$ geſetzt ſind. Folglich iſt $\frac{-R - Ny}{(x + Ry)^2} = \frac{Mx - R}{(x + Ry)^2}$. Es iſt nämlich $\left(\frac{\partial . Ry}{\partial y}\right) = N + R$; $\left(\frac{\partial . Ry}{\partial x}\right) = Mx$; $\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) = M$. Die gefundene Gleichung giebt $Mx = -Ny$. Daher iſt $\partial R = M\partial x - \frac{Mx\partial y}{y}$

$$= My . \frac{y\partial x - x\partial y}{yy} = My . d\frac{x}{y}.$$

Damit dieſe Formel integrirbar ſey, muß My eine Function von $\frac{x}{y}$, ſeyn. Daher iſt auch R, eine Function von $\frac{x}{y}$, das iſt, R iſt eine gebrochne Function von x und y, in welcher die Dimenſionen des Zählers und Nenners ſich gleich ſind. Alſo iſt $\frac{Q}{P}$, als der Werth von R, auch eine ſolche Function von x und y, und die Functionen P und Q ſind gleichartige von derſelben Dimenſion, übereinſtimmig mit dem, was in (31.) gefunden iſt.

47. Wenn man eine endliche Gleichung zwiſchen x und y ſo annimmt, daß ſie in zwey Theile zerfällt, in welchen x und y ganz auf einerley Art enthalten ſind, ſo kommt man durch Differentiation auf zwey Differentialformeln für x und y, die völlig ähnlich und ſich gleich ſind.

48. Eine ſolche Gleichung iſt

M) $\alpha + 2\beta(x + y) + \gamma(xx + yy) + 2\delta xy = 0.$

Dieſe differentiirt wird

$$2\beta(\partial x + \partial y) + 2\gamma(x\partial x + y\partial y) + 2\delta y\partial x + 2\delta x\partial y = 0.$$

oder

$$\frac{\partial x}{\beta+\gamma y+\delta x}+\frac{\partial y}{\beta+\gamma x+\delta y}=0.$$

Die Nenner ſuche man nun ſo zu beſtimmen, daß der erſtere bloß von x, der andere bloß von y eine Function ſey, und zwar von der Form

$\surd(A+2Bx+Cxx)$ und $\surd(A+2By+Cyy)$.
Es ſey $\beta+\gamma x+\delta y=p$; und $\beta+\gamma y+\delta x=q$, ſo iſt erſtlich

$$pp=\beta\beta+2\beta(\gamma x+\delta y)+\gamma\gamma xx+\delta\delta yy$$
$$+2\gamma\delta xy.$$

Von dem Theile rechter Hand ziehe man die mit γ multiplicirte Gleichung M) ab, ſo iſt

$$pp=\beta\beta-\alpha\gamma+2\beta(\delta-\gamma)y+(\delta\delta-\gamma\gamma)yy.$$

Eben ſo iſt

$$qq=\beta\beta-\alpha\gamma+2\beta(\delta-\gamma)x+(\delta\delta-\gamma\gamma)xx.$$

Es haben alſo die Nenner p, q die verlangte Form, und es iſt nur nöthig, die Größen α, β, γ, δ, durch A, B, C zu beſtimmen. Eine von jenen iſt willkührlich, und giebt die unbeſtimmte Conſtante, wodurch die Integralgleichung eine vollſtändige wird. Es iſt

$$\beta\beta-\alpha\gamma=A;\ \beta(\delta-\gamma)=B;\ \delta\delta-\gamma\gamma=C.$$

Hieraus iſt $\frac{\partial+\gamma}{\beta}=\frac{C}{B}$, oder $\partial+\gamma=\frac{C\beta}{B}$, und $\partial-\gamma$ $=\frac{B}{\beta}$, alſo

$$\gamma=\frac{C\beta}{2B}-\frac{B}{2\beta};\quad \delta=\frac{C\beta}{2B}+\frac{B}{2\beta};$$

$$\alpha=\frac{\beta\beta-A}{\gamma}=\frac{2(\beta\beta-A)B\beta}{C\beta\beta-BB}.$$

Setzt man dieſe Werthe in die angenommene Gleichung, ſo erhält man die vollſtändige Integrale der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial x}{\surd(A+2Bx+Cxx)}+\frac{\partial y}{\surd(A+2By+Cyy)}=0.$$

Euler ſetzt (Calc. integr. T. I. §. 580.)

$$\alpha=\frac{\beta\beta}{\gamma}-\frac{\beta A}{\gamma B}(\partial-\gamma)=\frac{\beta\beta}{\gamma}-\frac{\beta\beta AC}{\gamma BB}$$

$+\frac{2\beta A}{B}$, und findet die Integralgleichung,

$$\beta\beta(BB-AC)+2\beta\gamma AB+2\beta\gamma BB(x+y)$$
$$+\gamma\gamma BB(xx+yy)+2\gamma B(\beta C-\gamma B)xy=0.$$

Hier iſt der Quotient $\frac{\beta}{\gamma}$ die Conſtante. Dieſer ſey $=a$, ſo iſt

$$a(BB-AC)+2AB+2BB(x+y)$$
$$+\frac{BB}{a}(xx+yy)+2B(C-\frac{1}{a}B)xy=0.$$

49. Hier ſieht man, daß die Integrale einer Differentialgleichung algebraiſch ſeyn kann, wenn gleich beide Theile derſelben kein ſolches Integral geben. Auch bleibt die Form der algebraiſchen Gleichung dieſelbe, die Integrale der beiden Theile der Differentialgleichung mögen von den Winkeln oder von Logarithmen abhangen.

50. Euler hat dieſe Methode Integrale zu finden vorzüglich bearbeitet, zuerſt in dem VI. und VII. Bande der neuen Petersburger Commentarien, dann in dem erſten Theile ſeiner Integralrechnung, Sect. II. Cap. V. VI und in dem Supplement am Ende des dritten Theils. La Grange hat eine Methode zur Integrirung der Gleichung, $\frac{\partial x}{\surd X}=\frac{\partial y}{\surd Y}$, gelehrt, worüber Euler Erläuterungen mitgetheilt hat, in den Actis Acad. Petr. T. II. P. I. 1778. Man ſehe noch Cousin Calc. diff. et int. T. II. §. 423—434. Es iſt merkwürdig, daß die For-

mel $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}}$ weder vermittelſt Logarithmen noch Winkel integrirt werden kann, und daß doch eine aus zwey ſolchen Formeln zuſammengeſetzte Gleichung eine algebraiſche Gleichung zwiſchen x und y giebt. Euler zeigt dieſes auch von einer Differential-Gleichung, wo die Wurzelgrößen in den beiden Theilen alle Potenzen bis zur vierten enthalten. Die Unterſuchung hat ihre, freylich bloß ſpeculative, Anwendung in der Geometrie der Curven, mehrere Bogen derſelben Curve zu finden, deren Unterſchied eine algebraiſche Größe iſt, oder welche ein gegebenes Verhältniß gegen einander haben.

III. Methoden durch Annäherung eine Differentialgleichung aufzulöſen.

51. Man ſetze $y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta$ + etc. wo die Exponenten entweder eine zunehmende, oder eine abnehmende Reihe ausmachen. Hieraus iſt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \alpha A x^{\alpha - 1} + \beta B x^{\beta - 1} + \gamma C x^{\gamma - 1} + \text{etc.}$$

Jene Reihe ſetze man in der Differentialgleichung zwiſchen x und y für y, dieſe in eben derſelben, nachdem ſie durch ∂x dividirt iſt, in den Gliedern, welche den Differential-Quotienten enthalten für denſelben. Hierauf verfahre man zur Beſtimmung der Exponenten und Coefficienten ſo, wie es in dem Artikel, Function, gewieſen iſt, wenn die Exponenten eine arithmetiſche Reihe ausmachen ſollen. Dieſes iſt inzwiſchen nicht nothwendig. Die Glieder der Particular-Reihen, welche zu einer und derſelben Potenz von x gehören ſollen, heben ſich einander auf. Auf dieſem Umſtande beruhen die Beſtimmungen der Coefficienten und Exponenten, worin kein Widerſpruch entſtehen darf. Es muß ein Coefficient unbeſtimmt bleiben, damit das Integral ein vollſtändiges werde. Sonſt giebt die Reihe nur eine particulare Auflöſung.

52. Exempel. Die gegebene Gleichung ſey $\partial y + y\partial x = ax^n \partial x$. Es iſt daraus

$$\frac{\partial y}{\partial x} + y - ax^n = 0.$$

Die Subſtitution der beiden Reihen in (51.) giebt die Particularreihen:

$$+\frac{\partial y}{\partial x} = \alpha A x^{\alpha-1} + \beta B x^{\beta-1} + \gamma C x^{\gamma-1} + \delta D x^{\delta-1} + \text{etc.}$$

$$+ y = \quad + A x^{\alpha} + B x^{\beta} + C x^{\gamma} + \text{etc.}$$

$$- ax^n = - ax^n.$$

Man ſieht hier leicht, daß die Reihe der Exponenten zum Unterſchiede die Einheit haben muß. Stellt man die Particularreihen ſo wie es hier geſchehen iſt, ſo iſt $\alpha = n + 1$; $\beta = \alpha + 1 = n + 2$; $\gamma = \beta + 1 = n + 3$, u. ſ. f.

Dadurch iſt $A = \frac{a}{n+1}$; $B = -\frac{a}{(n+1)(n+2)}$;

$C = +\frac{a}{(n+1)(n+2)(n+3)}$; u. ſ. f.

und $y = Ax^{n+1} + Bx^{n+2} + Cx^{n+3} + \text{etc.}$

Stellt man die Reihen folgendergeſtalt unter einander:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \quad \alpha A x^{\alpha-1} + \beta B x^{\beta-1} + \text{etc.}$$

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} \quad + \text{etc.}$$

$$- ax^n = - ax^n,$$

ſo iſt $\alpha = n$; $\beta = n - 1$; $\gamma = n - 2$, u. ſ. f.

$A = a$; $B = -na$; $C = +n(n-1)a$;

$D = -n(n-1)(n-2)a$, u. ſ. f. und

$y = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \text{etc.}$

Die Conſtante muß in beiden Fällen noch zugefügt werden.

53. Dieſes Beyſpiel gehört unter die allgemeine Gleichung in (9.), wo für den gegenwärtigen Fall iſt $P = 1$; $Q = ax^n$; $\int P \partial x = x$. Dadurch iſt $y = e^x \int e^x . ax^n \partial x$. Aus Integralformel, 100. iſt, weil das dortige a hier e, die Baſis der natürlichen Logarithmen iſt, alſo $la = le = 1$,

$$\int e^x x^n \partial x = e^x (x^n - n x^{n-1} + n(n-1) x^{n-} \\ - n(n-1)(n-2) x^{n-2} + \text{etc.}),$$

und $y = a e^{-x} \int e^x x^n \partial x = a (x^n - n x^{n-1} + \text{etc.})$ welches mit der zweyten Reihe ganz übereinſtimmt. Sie bricht für ein ganzes n ab. Die erſte Reihe kann nur für kleine x gebraucht werden.

54. Bequemer und ſicherer wird der Taylorſche Lehrſatz, der ſchon zu der Annäherung bey Differentialformeln angewandt iſt, auch bey Differentialgleichungen gebraucht: bequemer, weil die Coefficienten durch die Differentiation einer Function von x und y gefunden werden; ſicherer, weil man das Intervall zwiſchen zwey Werthen von x in mehrere Theile α theilen, und aus dem Werthe von y, der zu einem Werthe von x gehört, den zu $x + \alpha$ gehörigen, und ſo ſucceſſiv aus dem zu $x = a$ gehörigen den für $x = a + n\alpha$ herleiten kann.

55. Es ſey nun $y = fx$, wo man zwar die Beſchaffenheit der Function, die durch f bezeichnet wird, nicht kennt, aber den Werth derſelben für $x = a$ als bekannt annimmt. Es iſt.

$$f(x+u) = fx + \frac{\partial y}{\partial x} . \frac{u}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{u^2}{1.2} + \text{etc.}$$

(Differenzenrechnung, 38.). Hier wird $\frac{\partial y}{\partial x}$ als eine Function von x und y gegeben. Daher ſind die höhern Differentialquotienten auch ſolche Functionen. Setzt man

$x = a$, ſo iſt in dieſen Functionen auch für x zu ſetzen a, und für y der zu dieſem Werthe von x gehörige, der b ſey, und gegeben werden muß. Die Differential-Quotienten für dieſe Werthe von x und y ſeyn

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A; \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = B; \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = C, \text{ u. ſ. f.}$$

Es iſt nun für $x = a + u$,

$$y = b + Au + \tfrac{1}{2}Bu^2 + \tfrac{1}{6}Cu^3 + \tfrac{1}{24}Du^4 + \text{etc.}$$

56. Exempel. Die Differentialgleichung ſey $dy = (xx + yy)\partial x$. Hier iſt $\frac{\partial y}{\partial x} = xx + yy$, alſo, wenn ∂x conſtant iſt,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial y} = 2x + \frac{2y\partial y}{\partial x} = 2x + 2x^2 y + 2y^3.$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 2 + 4xy + \frac{2x^2\partial y}{\partial x} + \frac{6y^2\partial y}{\partial x}$$

$$= 2 + 4xy + 2x^4 + 8x^2y^2 + 6y^4$$

$$\frac{\partial^4 y^4}{\partial x^4} = 4y + 8x^3 + 16xy^2$$

$$+ (4x + 16x^2y + 24y^3)\frac{\partial y}{dx}$$

$$= 4y + 12x^3 + 20xy^2 + 16x^4y$$

$$+ 40x^2y^3 + 24y^5$$

Setzt man in dieſen Werthen $x = a$, und $y = b$, ſo ergeben ſich die Coefficienten der für y angeſetzten Reihe.

57. Damit man im allgemeinen einſehe, wie die Differentialquotienten durch die unmittelbare Abhängigkeit von y modificirt werden, folgt hier die Entwicklung des zweyten und dritten.

Es ſey $\frac{\partial y}{\partial x} = V$. und $\partial V = M\partial x + N\partial y$,

wo $N\partial y$ das partielle Differential in Beziehung auf y iſt. Es iſt nun

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial x} = M + \frac{N\partial y}{\partial x} = M + NV.$$

Man ſetze $\partial M = m\partial x + n\partial y$; und $\partial N = \mu\partial x + \nu\partial y$, ſo iſt

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = m + nV + \frac{V(\mu\partial x + \nu\partial y)}{\partial x}$$

$$+ \frac{N(M\partial x + N\partial y)}{\partial x}$$

$$= m + nV + \mu V + \nu V^2 + MN + NNV.$$

Hier iſt $n = \mu$ (Differentialgleichung, 12.). In den Symbolen für partielle Differentiale iſt

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) + 2V\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)$$

$$+ V^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + V\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

58. Von der ältern Methode handelt ausführlich Käſtner in der Anal. d. U. S. 496—548. Die neuere lehrt Euler in der Integralrechnung T. 1 Sect. II. Cap. VII. Man ſehe auch La Grange in dem Mém. de l'Acad. de Berlin 1776; La Croix Integralrechn. p. 284—296.

IV. Integration der Gleichungen mit Potenzen und Producten der Differentialien erſten Grades.

59. In geometriſchen Unterſuchungen, worin Bogen von krummen Linien vorkommen, finden ſich Quadrate der Elemente der rechtwinklichten Coordinaten in die Gleichungen eingemiſcht. Schon um dieſer Urſache allein iſt es nöthig, von der Integration der angezeigten Gleichungen Beyſpiele zu geben.

60. Man bezeichne den Quotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ durch p.

ſo daß $\frac{\partial y}{\partial x} = p$. Es ſey eine Gleichung zwiſchen x und p gegeben, worin p auf einen höhern Grad als den erſten ſteigt. Nun drücke man, wenn die Gleichung auflösbar iſt, p durch x aus, ſo iſt p eine Function von x, oder es iſt $p = X$. Daher iſt $\partial y = X \partial x$, und $y = \int X \partial x$.

61. Oder, wenn es bequemer iſt, drücke man x durch p aus, ſo iſt x eine Function von p, oder $x = P$, wo P dieſe Function bedeutet. Da $\partial x = \partial P$, ſo iſt $\partial y = p \partial P$, und $y = pP - \int P \partial p$. In dieſem Falle werden x und y jede durch p beſtimmt. Werden die beiden Gleichungen vollſtändig gegeben, ſo läßt ſich p herausſchaffen, und es wird eine Gleichung zwiſchen x und y erhalten.

62. Läßt ſich weder p durch x, noch x durch p bequem ausdrücken, ſo ſuche man eine neue Größe einzuführen, durch welche beide ſich beſſer beſtimmen laſſen.

63. Der Fall iſt ſchwerer, wenn beide veränderliche Größen nebſt p in der Gleichung vorhanden ſind. Iſt ſie eine gleichartige, ſo ſetze man $y = ux$. Dadurch geht x nebſt y heraus, und es bleibt eine Gleichung zwiſchen u und p, aus welcher die eine durch die andere beſtimmt wird. Es iſt $\partial y = u \partial x + x \partial u$, das iſt $p \cdot \partial x - u \partial x = x \partial u$, oder $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p - u}$. Da p durch u gegeben iſt, ſo wird durch Integration eine Gleichung zwiſchen x und u erhalten, ſo daß beide, x und y, durch dieſelbe u beſtimmt werden.

64. Die Differentialgleichung ſey $\partial y^2 - \partial x^2 = 0$, das iſt, $pp - 1 = 0$. Alſo iſt $p + 1$. Daher $y = x + a$, und $y = -x + b$, wo a und b die Conſtante in jeder der beyden Gleichungen ſind. Beide Gleichungen vereinigt geben

$(y - x - a)(y + x - b) = 0$,

oder $yy - xx - (a + b)y - (a - b)x + ab = 0$.

Die Gleichung gehört für ein Syſtem zweyer parallelen geraden Linien.

65. Die Differentialgleichung ſey

$y\partial x - x\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = 0$, das iſt

$y - x\sqrt{(1 + pp)} = 0$. Da dieſe gleichartig iſt, ſo ſetze man $y = ux$, und es iſt $u = \sqrt{(1 + pp)}$,

daher $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p - u}$ (63.), oder $\frac{dx}{x} = -\frac{du}{u - p}$.

Nun iſt $\partial . \log. (u - p) = \frac{\partial u - \partial p}{u - p}$,

alſo iſt $\int \frac{\partial u}{u - p} = \log (u - p) + \int \frac{\partial p}{u - p}$.

Für u deſſen Werth geſetzt, iſt

$$\frac{\partial p}{u - p} = \frac{\partial p}{\sqrt{(1 + pp)} - p} = (\sqrt{(1 + pp)} + p)\partial p.$$

Daher $\int \frac{\partial p}{u - p} = \frac{1}{2}pp + \int \partial p\sqrt{(1 + pp)}$

$= \frac{1}{2}pp + \frac{1}{2}p\sqrt{(1 + pp)} + \frac{1}{2}\log.(\sqrt{(1 + pp)} + p)$,

(Integralformel 69. 50.). Ferner iſt $\log. (u - p)$

$= \log.(\sqrt{(1 + pp)} - p) = -\log.(\sqrt{1 + pp}) + p)$.

Folglich iſt $\log x = C + \frac{1}{2}\log. (\sqrt{(1 + pp)} + p)$

$- \frac{1}{2}pp - \frac{1}{2}p\sqrt{(1 + pp)}$.

Iſt x durch p gefunden, ſo iſt $y = x\sqrt{(1 + pp)}$, da $y = ux$ iſt.

66. Die Differentialgleichung ſey

$y\partial x - x\partial y = a\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, das iſt $y - px$ $= a\sqrt{(1 + pp)}$. Dieſe differentiirt giebt die Glei-

chung, $-x\partial p = \frac{ap\partial p}{\sqrt{(1+pp)}}$, da $\partial y = p\partial x$ iſt.

Hier iſt entweder $\partial p = 0$, oder $-x = \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$.
Das erſte giebt $p = \alpha$, einer Conſtante; das andere giebt ohne Integration x durch p. Da $\partial y = p\partial x$, ſo iſt $\partial y = -\frac{ap\partial p}{(1+pp)^{3:2}}$, und $y = \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$. Dadurch iſt $xx + yy = aa$. Dieſe Aufloͤſung iſt nur eine particulare, da keine unbeſtimmte Conſtante hinzugefuͤgt werden kann. Der Werth $p = \alpha$ giebt $\partial y = \alpha\partial x$, alſo $y = \alpha x +$ conſt. Fuͤr dieſen Werth von p iſt die gegebene Gleichung, $y - \alpha x = a\sqrt{(1+\alpha\alpha)}$, ſo daß die Conſtante $= a\sqrt{(1+\alpha\alpha)}$ iſt.

67. Die Gleichung, $y\partial x - x\partial y = a\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, entſteht aus der, $y = ax + e$, durch einige Veraͤnderungen. Es iſt daraus erſtlich, $\partial y = a\partial x$. Schafft man die gegebene a weg, um c hineinzubringen, ſo entſteht daraus die Gleichung $y\partial x - x\partial y = c\partial x$. Ferner iſt $\partial y^2 + \partial x^2 = (1+a^2)\partial x^2$. Setzt man hieraus den Werth von ∂x in jene Gleichung, ſo iſt

$$y\partial x - x\partial y = \frac{c\partial x}{\sqrt{(1+aa)}}\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}.$$

Nimmt man $c = a\sqrt{(1+aa)}$, ſo erhaͤlt man die in (66.) aufgegebene Gleichung.

68. Die Differentialgleichung ſey $y\partial y^3\partial x = a(\partial x^2 + \partial y^2)^2$, welche die Geſtalt des Koͤrpers beſtimmt, der in einem fluͤſſigen Mittel den geringſten Widerſtand leidet. Die Coordinaten x und y ſind rechtwinklichte. Die Axe der x iſt die Richtung der Bewegung.

Durch die Subſtitution $\frac{\partial y}{\partial x} = p$ verwandelt ſie ſich in dieſe: $p^3 y = a(1 + pp)^2$, daher

$$y = \frac{a(1 + pp)^2}{p^3}. \text{ Hieraus iſt}$$

$$\partial y = -\frac{3a\partial p}{p^4} - \frac{2a\partial p}{p^2} + a\partial p.$$

$$\partial x = -\frac{3a\partial p}{p^5} - \frac{2a\partial p}{p^3} + \frac{a\partial p}{p}.$$

$$x = +\frac{3a}{4p^4} + \frac{a}{p^2} + a\log p.$$

Die Gleichung zwiſchen x und y iſt transcendent. Doch können für jede angenommene Werthe von p die zuſammengehörigen Werthe von x und y gefunden werden.

V. Integration der Differentialgleichungen vom zweyten Grade.

69. In dem Artikel, Differentio = Differentialgleichung, iſt bemerkt, daß die Differentialgleichungen jedes Grades auf zweyerley Art dargeſtellt werden können, theils ſo, daß die Symbole der Differentiale ſelbſt in Verbindung mit den veränderlichen Größen gebraucht werden, theils daß die Differentialquotienten ſtatt jener eingeführt werden, wodurch eine Differ ntialgleichung die Form einer endlichen Gleichung erhält. Hier füge ich noch die Bemerkung hinzu, daß bey der zweyten Form kein Differential conſtant genommen zu werden braucht, daher bey dieſer Form für dieſelbe Relation der veränderlichen Größen auch nur eine und dieſelbe Relation zwiſchen den veränderlichen Größen und den Differentialquotienten ſtatt findet. Bey dem Gebrauche der Differentiale ſelbſt entſtehen verſchiedene Ausdrücke, nachdem das eine oder das andere der Differentiale conſtant genommen wird. Ein

Beyſpiel geben die Werthe des Halbmeſſers der Krümmung an derſelben Curve. Bey der Integration einer Differentialgleichung vom zweyten oder höheren Grade muß immer eines der Differentiale unveränderlich geſetzt werden, weil ſonſt die Glieder der Differentialverhältniſſe keine beſtimmte Relation durch die gegebenen und veränderlichen Größen erhalten, ſ. Differentio • Differentialgleichung, 12. 15.

70. Euler gebraucht durchgehends die Bezeichnungen, $\partial y = p \partial x$ und $\partial p = q \partial x$, bey einer Differentialgleichung vom zweyten Grade. Wenn aber mehrere veränderliche Größen, die von einander abhangen, in Rechnung kommen, z. B. Coordinaten einer Curve und der zugehörige Bogen, ſo wird es dienlich ſeyn, ein Differential, das veränderlich iſt, durch dasjenige, das unveränderlich geſetzt wird, mittelſt eines Factors, wie ∂y durch $p \partial x$, auszudrucken. Die Relation der Differentiale zu einander muß ergeben, wie die übrigen Differentiale durch das unveränderliche mittelſt einer Function von p auszudrucken ſind.

71. Z. B. Es ſeyn x und y die rechtwinklichten Coordinaten einer Curve, s der Bogen, ſo iſt $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial s^2$. Nimmt man ∂s zu dem conſtanten Differential, ſo ſetze man $\partial x = p \partial s$, oder $\frac{\partial x}{\partial s} = p$, und es iſt dann $\partial y = \partial s \sqrt{(1 - pp)}$, oder $\frac{\partial y}{\partial s} = \sqrt{(1 - pp)}$.

72. Wenn ∂x unveränderlich, und $\partial y = p \partial x$ geſetzt wird, ſo iſt $\partial^2 y = \partial p \partial x$. Setzt man dieſe Ausdrücke in eine Gleichung, worin y fehlt, ſo läßt ſie ſich durch ∂x dividiren, und es wird eine Differentialgleichung vom erſten Grade zwiſchen p und x erhalten. Die Auflöſung derſelben giebt p durch x. Setzt man dieſen Werth in die Formel $\partial y = p \partial x$, ſo erhält man eine Differentialgleichung vom erſten Grade zwiſchen x und y.

Oder wenn ſich p nicht füglich durch x ausdrucken läßt, wohl aber x durch p, ſo ſetze man für ∂x den Werth durch ∂p und eine Function von p, ſo wird eine Gleichung für ∂y durch p erhalten. Kann man ſowohl x als y durch p darſtellen, ſo läßt ſich aus beiden Gleichungen p herausſchaffen, ſo daß eine endliche Gleichung zwiſchen x und y hervorgeht.

73. Iſt y bloß in der erſten Potenz in der Gleichung vorhanden, ſo iſt es eine brauchbare Subſtitution, $y = uv$ zu ſetzen. Dadurch iſt $\partial y = u\partial v + v\partial u$, und $\partial^2 y = u\partial^2 v + 2\partial u\partial v + v\partial^2 u$. Da v und u von einander unabhängig ſind, ſo kann man irgend eine Relation für ſie annehmen, und zwar ſo, daß die transformirte Gleichung in zwey einzelne Gleichungen zertheilt werde, die ſich beſſer behandeln laſſen.

74. Man ſetze $y = e^{\int u\partial x}$, wo e die Baſis der natürlichen Logarithmen iſt, ſo iſt $\partial y = u\partial x . e^{\int u\partial x}$; $\partial^2 y = (\partial u\partial x + uu\partial x^2) e^{\int u\partial x}$. Enthält die Gleichung nur drey Glieder, in einem y, in dem andern ∂y, in dem dritten $\partial^2 y$, ſie mögen übrigens aus mehrern Theilen nach x zuſammengeſetzt ſeyn, ſo wird ſie durch dieſe Subſtitution auf eine vom erſten Grade zwiſchen u und x gebracht.

75. Auch die Subſtitution $x = e^{\int u\partial y}$ kann brauchbar ſeyn. Es iſt $\partial x = u\partial y . e^{\int u\partial y}$. Wenn ∂x unveränderlich iſt, ſo iſt $\partial^2 x = 0$, und $0 = u\partial^2 y + \partial u\partial y + u^2\partial y^2$, alſo $-\partial^2 y = \dfrac{u^2\partial y^2 + \partial u\partial y}{u}$.

Läßt ſich durch dieſe Subſtitutionen für x und ∂x beides herausſchaffen, ſo erhält man eine Gleichung vom erſten Grade zwiſchen u und y.

76. Die Auflöſung der Differentialgleichungen iſt bis jetzt noch auf gewiſſe Formen derſelben eingeſchränkt. Die

leichteſte iſt, wenn der Differentialquotient $\frac{\partial p}{\partial x}$ (da p $= \frac{\partial y}{\partial x}$ iſt) eine Function von x, oder von y, oder von p allein iſt. Dieſe Differentialgleichungen nennt Euler einfache. Dann folgen die Formen, worin eine der veränderlichen Größen fehlt, wiewohl ihre Differentiale vorhanden ſind. Ferner die gleichartigen Gleichungen, ſolche, worin die veränderlichen Größen zugleich mit ihren erſten und zweyten Differentialen in allen Gliedern gleich große Dimenſionen geben. Die Gleichungen, worin eine der veränderlichen Größen nicht über die erſte Dimenſion ſteigt, können ſchwierig ſeyn, mögen aber doch auf Gleichungen vom erſten Grade gebracht werden können. Die Multiplication durch einen ſchicklichen Factor wird beſonders in ſchweren Fällen angewandt, wiewohl es nicht leicht iſt, denſelben zu finden. Umgekehrt werden auch hier die Formen der integrirbaren Gleichungen zu einem gegebenen Multiplicator geſucht. Die Auflöſung durch einen Reihenausdruck kann kaum anders angewandt werden, als wo die veränderliche y, deren Werth durch x zu finden iſt, bloß einfach, nicht als Potenz vorhanden iſt.

Die Methoden werden durch Beyſpiele am deutlichſten erhellen.

77. Es ſey $a \partial y^2 = \partial^2 y$. Dieſe Gleichung bezieht ſich auf ein ausgelaſſenes conſtantes Differential ∂x, ſo daß ſie durch Hinzufügung deſſelben wird $\frac{a \partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial y^2}{\partial x^2}$. Setzt man $\partial y = p \partial x$, und $\partial p = q \partial x$, alſo $\partial^2 y = q \partial x^2$, ſo iſt $a q = p^2$. Zur Integration ſetzt man für q ſeinen Werth, ſo iſt $a \partial p = p^2 \partial x$, oder $\partial x = \frac{a \partial p}{p^2}$; folglich $x = b - \frac{a}{p}$. Nunmehr iſt $\partial y = p \partial x = \frac{a \partial x}{b - x}$, alſo $y = a \log \frac{c}{b - x}$. Die

beiden Conſtanten, welche durch die doppelte Integration eingeführt werden, ſind b und c.

78. Behandelt man die Gleichung als eine vom erſten Grade, nachdem ſie dieſe Form, $\frac{a\partial^2 y}{\partial y} = \partial y$, erhalten hat, ſo iſt $a \log \frac{\partial y}{c\partial x} = y$, wo die Conſtante ein unveränderliches Differential $c\partial x$ iſt. Dadurch iſt $\frac{\partial y}{c\partial x} = e^{y:a}$, und $e^{-y:a}\partial y = c\partial x$. Daraus wird (Differentialformeln 15.) $-ae^{-y:a} = cx - b$, oder $e^{y:a} = \frac{a}{b - cx}$, und $\frac{y}{a} = \log \frac{a}{b - cx}$, wo die Conſtanten nur eine andere Form haben, als nach der erſten Auflöſung.

79. Es ſey $\partial y = \frac{a\partial^2 x}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}$, wo ∂y conſtant iſt. Die Gleichung gehört für die Kettenlinie. Da $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, und $q = \frac{\partial p}{\partial x}$, ſo iſt $q = -\frac{\partial y \partial^2 x}{\partial x^3}$. Die Gleichung verwandelt ſich in, $\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = -\frac{aq}{\sqrt{(1 + pp)}}$, oder $pp = -\frac{aq}{\sqrt{(1 + pp)}}$. Folglich $\partial x = -\frac{a\partial p}{pp\sqrt{(1 + pp)}}$, und $\partial y = -\frac{a\partial p}{p\sqrt{(1 + pp}}$. Dieſes giebt (Integralformel, 65, 53.) $x = b + \frac{\sqrt{(1 + pp)}}{p}$, und

$y = -a \log \frac{\sqrt{(1+pp)} - 1}{cp}$, oder $y =$

$+ a \log \frac{cp}{\sqrt{(1+pp)} - 1} = + a \log \frac{c[\sqrt{(1+pp)} + 1]}{p}$.

Für $x = 0$ ſey $y = 0$, und $\frac{1}{p} = 0$, ſo iſt $\frac{\sqrt{(1+pp)}}{p}$

oder $\sqrt{(\frac{1}{p} + 1)} = 1$, alſo $b + a = 0$, und $b = -a$.

Dadurch wird $c = 1$. Es iſt nun $\frac{x+a}{a} = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{p}$.

Daraus iſt $p^2 = \frac{aa}{x^2 + 2ax}$; $p^2 + 1 = \frac{(a+x)^2}{x^2 + 2ax}$;

$p \partial p = - \frac{aa(x+a)\partial x}{(xx + 2ax)^2}$; $\frac{\partial p}{p} = - \frac{(x+a)\partial x}{xx + 2ax}$;

folglich $\frac{\partial p}{p\sqrt{(1+pp)}} = - \frac{\partial x}{\sqrt{(xx + 2ax)}}$, alſo

$\partial y = \frac{a \partial x}{\sqrt{(xx + 2ax)}}$.

80. Es ſey $\partial y^3 = a \partial s \partial^2 x$, wo $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, und dieſes Differential conſtant iſt. Es bleibe $\partial y = p \partial x$, ſo iſt $\partial s = \partial x \sqrt{(1+pp)}$. Da ∂s conſtant ſeyn ſoll, ſo iſt $0 = \partial^2 x \sqrt{(1+pp)} + \frac{p \partial x \partial p}{\sqrt{(1+pp)}}$, alſo iſt $\partial^2 x = - \frac{q \partial x \partial y}{1+pp}$. Unſere Gleichung wird nun dieſe, $\partial y^2 = - \frac{aq \partial s \partial x}{1+pp}$, das iſt, $pp = - \frac{aq}{\sqrt{(1+pp)}}$, welches dieſelbe Gleichung zwiſchen den Differentialquotienten wie in (79.) iſt. Die

Gleichungen für die Differentiale ſind nur in der Annahme des conſtanten Differentials verſchieden.

81. Für die zweyte Form, wo ∂s conſtant iſt, ſetze man $\frac{\partial x}{\partial s} = p$, ſo iſt $\partial y = \partial s \surd(1 - pp)$. Dann ſey auch $q = \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}$, und unſere Gleichung iſt, $(1 - pp)^{\frac{3}{2}} = aq$. Setzt man für q ſeinen Werth durch ∂p, ſo iſt $(1 - pp)^{\frac{3}{2}} = \frac{a \partial p}{\partial s} = \frac{ap \partial p}{\partial x}$, alſo

$$\partial x = \frac{ap\partial p}{(1 - pp)^{3:2}}, \text{ und } \partial y = \partial s \surd (1 - pp)$$

$$= \frac{\partial x \surd (1 - pp)}{p} = \frac{a \partial p}{1 - pp}.$$ Daraus iſt

$$x = \frac{a}{\surd(1 - pp)} + b; \text{ und } y = \tfrac{1}{2} a \, l \frac{1 + p}{1 - p} + C.$$

82. Es ſey $y \partial^2 y = \partial y^2$, ſo iſt mit den vorherigen Bezeichnungen, $qy = pp$. Daraus wird $y \partial p = pp \partial x$, ferner $\frac{\partial p}{p} = \frac{p \partial x}{y} = \frac{\partial y}{y}$, alſo durch Integration $\log. p = \log. \frac{y}{a}$, und $p = \frac{y}{a}$. Nun iſt $\partial x = \frac{\partial y}{p} = \frac{a \partial y}{y}$, und daher $x = a \log. \frac{y}{b}$. Die beiden Conſtanten ſind a und b.

83. Es ſey $a^2 \partial^2 y = (a - y) \partial x^2$, wo ∂x conſtant iſt. Hier iſt $a^2 q = a - y$; alſo $a^2 \partial p = (a - y) \partial x$, und $a^2 p \partial p = (a - y) \partial y$. Die Integration giebt $a^2 p^2 = b^2 - (a - y)^2$. Ferner $\partial x = \frac{\partial y}{p}$

$= \frac{a \partial y}{\sqrt{(b^2 - (a-y)^2)}}$. Zur Abkürzung ſey $a - y = z$, ſo iſt $\partial x = - \frac{a \partial z}{\sqrt{(bb - zz)}}$, und daraus (Integralformel, 49.) $x = c - a \text{ Ang. sin } \frac{z}{b}$, oder $x = c - a \text{ Ang. sin } \frac{a-y}{b}$.

84. Es ſey $(a-y)^2 \partial^2 y = c \partial x^2$, und ∂x conſtant. Hier iſt $(a-y)^2 q = c$; das iſt, $\partial p = \frac{c \partial x}{(a-y)^2}$. Daher $p \partial p = \frac{c \partial y}{(a-y)^2}$, und durch Integration, $p^2 = b + \frac{2c}{a-y}$. Da $\partial x = \frac{\partial y}{p}$, ſo iſt $\partial x = \frac{\partial y \sqrt{(a-y)}}{\sqrt{(b(a-y) + 2c)}}$. Setzt man zur Abkürzung $a - y = u$, ſo iſt $\partial x = - \frac{u \partial u}{\sqrt{(bu^2 + 2cu)}}$, wovon das Integral aus Integralformel 71. gefunden wird.

Für $y = 0$, ſey $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, ſo iſt $b = - \frac{2c}{a}$, und $\partial x = \frac{(a-y) \partial y}{\sqrt{(ay - yy)}} \sqrt{\frac{a}{2c}}$. Dieſer Fall kommt bey der geradlinichten Bewegung eines Körpers vor, der nach einem Mittelpuncte der Kräfte, die ſich umgekehrt wie das Quadrat des Abſtandes verhalten, getrieben wird.

85. An der elaſtiſchen Linie iſt der Halbmeſſer der Krümmung umgekehrt proportional der Abſciſſenlinie, dem Abſtande eines Punctes der Curve von der Richtung des

krümmenden Gewichts. Der Halbmeſſer der Krümmung iſt allgemein $= -\frac{(1+pp)^{3:2}}{q}$ wo die Negation anzeigt, daß die Concavität nach der Abſciſſenlinie hin gekehrt iſt. Es iſt $p = \frac{\partial y}{\partial x}$; $q = \frac{\partial p}{\partial x}$. Die Gleichung für die Elaſtica iſt nun $x = -\frac{aaq}{(1+pp)^{3:2}}$, wo der Factor aa dient, der Abſciſſe x einen abſoluten Werth zu geben. Um bey der Integration Brüche zu vermeiden, ſetze man $\frac{1}{2}aa$ ſtatt aa, ſo iſt $2x = -\frac{aaq}{(1+pp)^{3:2}}$. Für q deſſen Werth geſetzt, wird $-2x\partial x = \frac{aa\partial p}{(1+pp)^{3:2}}$. Daraus iſt $cc - xx = \frac{aap}{\sqrt{(1+pp)}}$, und hieraus $p^2 = \frac{(cc-xx)^2}{a^4-(cc-xx)^2}$. Da $\partial y = p\partial x$ iſt, ſo iſt $\partial y = \frac{(cc-xx)\partial x}{\sqrt{(a^4-(cc-xx)^2)}}$. Die Conſtante c iſt die Abſciſſe für den Punct, wo $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, oder die berührende horizontal iſt.

86. Man ſieht aus dieſen Beyſpielen, wie man zu verfahren hat, wenn in einer Differentialgleichung vom zweyten Grade die eine der veränderlichen Größen fehlt. Nachdem eine Gleichung, worin y nicht vorhanden iſt, auf eine zwiſchen den Differentialquotienten p und q nebſt der veränderlichen x gebracht iſt, ſetze man ſtatt q deſſen Werth $\frac{\partial p}{\partial x}$, ſo hat man eine Differentialgleichung vom erſten

Grade zwiſchen x und p. Aus dieſer ſuche man den Werth von x durch p, oder den von p durch x. In dem erſtern Falle ſey $p = X$, einer Function von x, und es iſt $y = \int X \partial x + C$. In dem andern Falle ſey $x = P$, einer Function von p, ſo iſt $\partial y = p \partial x = p \partial P$, und $y = P p - \int P \partial p$. Kann weder x durch p, noch p durch x ausgedruckt werden, ſo muß man ſuchen, ob ſich nicht beide durch eine neue veränderliche Größe u ausdrucken laſſen, ſo daß $x = U$, und $p = U'$ ſey. Dadurch wird $y = \int U' \partial U$.

87. Wenn in einer Differentialgleichung x fehlt, ſo ſetze man in der Gleichung zwiſchen y, p und q für q deſſen Werth $\frac{p \partial p}{dy}$, der aus den beiden Werthen, $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, und $q = \frac{\partial p}{\partial x}$, hergeleitet wird. Dadurch entſteht eine Gleichung zwichen y und p. Nun ſey $y = P$, einer Function von p, ſo iſt $\partial x = \frac{\partial P}{p}$, alſo $x = \int \frac{\partial P}{p} = \frac{P}{p} + \int \frac{P \partial p}{pp}$. Oder es ſey $p = Y$, einer Function von y, ſo iſt $x = \int \frac{\partial y}{Y}$. Läßt ſich weder das eine noch das andere erhalten, ſo muß man eine neue veränderliche u ſuchen, wodurch p und y ſich ausdrucken laſſen.

89. Es ſey $\partial s^2 \partial^2 y = X \partial x^4$, wo X eine Function von x iſt. Das Differential ∂s ſey conſtant. Es ſey $\partial y = p \partial x$, ſo iſt $\partial s = \frac{\partial y \sqrt{(1 + pp)}}{p}$. Da $\partial^2 s = 0$ iſt, ſo iſt $\partial^2 y = \frac{\partial p \partial y}{p(1 + pp)}$, und $\partial s^2 \partial^2 y = \frac{\partial p \partial y^3}{p^3}$. Folglich iſt $\partial p = X \partial x$, und $p = \int X \partial x + A$.

Nun iſt $\partial y = p \partial x = \partial x \int X \partial x + A \partial x$, alſo

$$y = \int \partial x \int X \partial x + Ax + B.$$

Die Conſtanten ſind A und B.

90. Eine gleichartige (homogene) Differentialgleichung vom zweyten Grade heißt diejenige, worin die veränderlichen Größen, x und y, mit den Differentialen ∂x, ∂x, $\partial^2 x$, $\partial^2 y$ in allen Gliedern dieſelbe Anzahl von Dimenſionen geben, wie in der Gleichung $x^2 \partial^2 y + x \partial x^2 + y \partial y^2 = 0$. Es iſt eben eine ſolche Gattung, wie die homogenen Gleichungen vom erſten Grade (3), wo man aber nicht nöthig hatte, auf die Differentiale ∂x, ∂y zu achten, um die Anzahl der Dimenſionen in den Gliedern zu beſtimmen.

91. Es ſey wie bisher, $\partial y = p \partial x$, $\partial p = q \partial x$, und ∂x conſtant, ſo iſt $q = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Es iſt alſo p eine Größe von der Dimenſion Null, und q von der Dimenſion -1. Die Gleichung werde auf die endliche (M) zwiſchen x, y, p, q gebracht, ſo iſt dieſe in Beziehung auf dieſe Größen, gleichartig, und durch die Subſtitutionen, $y = ux$, und $q = \frac{v}{x}$, erhalten alle Glieder dieſelbe Potenz von x, die alſo aus der Gleichung herausgeht, ſo daß eine Gleichung (N) zwiſchen den drey Größen u, v, p, hervorgeht. Da $\partial y = p \partial x$ iſt, ſo iſt $u \partial x + x \partial u = p \partial x$, und daher $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p - u}$. Da ferner $\partial p = q \partial x$ iſt, ſo iſt $\partial p = \frac{v \partial x}{x}$, alſo $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial p}{v}$. Folglich iſt $\frac{\partial u}{p-u} = \frac{\partial p}{v}$, oder $v \partial u = p \partial p - u \partial p$, (O). Kann man nun aus der Gleichung (N) die Größe v durch p und u ausdrucken, ſo wird durch die

Subſtitution dieſes Werthes von v in (O) eine Differentialgleichung des erſten Grades zwiſchen p und u erhalten. Kann aus dieſer p durch u dargeſtellt werden, ſo iſt die Gleichung, $\frac{\partial x}{x} = \frac{du}{p-u}$, eine geſonderte zwiſchen x und u, ſo daß daraus ſich x durch u ergiebt. Die Gleichung $y = ux$ liefert daher y durch u. Oder man ſetzt in dem Integral, $\int \frac{\partial u}{p-u}$, für u den Werth $\frac{y}{x}$, ſo entſteht eine Gleichung zwiſchen x und y.

92. Exempel. Es ſey $x^2 \partial^2 y = x \partial x \partial y + n y \partial x^2$. Durch die Subſtitutionen, $\partial y = p \partial x$, und $\partial p = q \partial x$, entſteht die Gleichung, $qxx = px + ny$.

Durch die Subſtitutionen, $y = ux$; $q = \frac{v}{x}$, entſteht die Gleichung, $v = p + nu$,

Die Gleichung (O) in (91.) wird nun durch die Subſtitution des Werthes von v,

$$p \partial u + nu \partial u = p \partial p - u \partial p,$$

oder $nu \partial u + p \partial u + u \partial p = p \partial p$,

wovon die Integrale iſt,

$$C + nuu + 2pu = pp.$$

Daraus iſt $p = u \pm \sqrt{(C + (n+1)uu)}$.

Nun iſt $\frac{\partial x}{x} = \frac{\pm \partial u}{\sqrt{(C + (n+1)uu)}}$,

oder, wenn $n + 1 = mm$ geſetzt, und das Vorzeichen unbeſtimmt gelaſſen wird,

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{\sqrt{(C + mmuu)}},$$

Die Integration giebt (Integralformel. 50.)

$$\log. x = \frac{1}{m} \log. \frac{mu + \surd(C + mmuu)}{D},$$

das iſt

$$Dx^m = mu + \surd(C + mmuu).$$

Hieraus iſt, da $y = ux$ iſt,

$$Dy^m = mu^{m+1} + u^m \surd(C + mmuu).$$

Wenn $n + 1$ eine negative Zahl, $-mm$, iſt, ſo iſt log x ein Winkel.

93. In der Differentialgleichung,

$$\partial\partial y + P\partial x\partial y + Qy\partial x^2 = 0,$$

ſind P und Q Functionen von x, und das Differential ∂x iſt conſtant, es ſoll dieſe auf eine Gleichung vom erſten Grade gebracht werden.

Man ſetze $y = e^{\int u\partial x}$, ſo iſt (Differentialformel, 14.), $\partial y = u\partial x. e^{\int u\partial x}$, und $\partial^2 y = (\partial u\partial x + u^2\partial x^2)e^{\int u\partial x}$, daher die reducirte Gleichung,

$$\partial u + uu\partial x + Pu\partial x + Q\partial x = 0.$$

Iſt hieraus u durch x gefunden, ſo iſt das Integral, $\int u\partial x$, zu ſuchen. Durch dieſes iſt $\log y = \int u\partial x$, als die Gleichung zwiſchen x und y.

94. Die Differentialgleichung,

$$\partial^2 y + P\partial y\partial x + Qy\partial x^2 = X\partial x^2,$$

worin P, Q, X Functionen von x ſind, und ∂x conſtant genommen wird, auf eine Gleichung vom erſten Grade zu bringen.

Man ſetze $y = uv$, ſo wird die Gleichung dieſe:

$$u\partial^2 v + 2\partial u\partial v + v\partial^2 u + Pu\partial x\partial v + Pv\partial x\partial u + Quv\partial x^2 = X\partial x^2.$$

Hieraus mache man zwey Gleichungen,

I. $\partial^2 v + P\partial x\partial v + Qv\partial x^2 = 0.$

II. $2\partial u\partial v + v\partial^2 u + Pv\partial x\partial u = X\partial x^2.$

Die erſtere wird nach (93) integrirt, und daraus v durch x gegeben. In der zweyten ſetze man $\partial u = s \partial x$, ſo iſt

III. $v \partial s + 2 s \partial v + P s v \partial x = X \partial x$.

Dieſe Gleichung wird durch die Multiplication mit $v e^{\int P \partial x}$ integrirbar, ſo daß die Integrale wird

IV. $v v s e^{\int P \partial x} = \int e^{\int P \partial x} X v \partial x$,

wo v eine aus I. gefundene Function von x iſt. Hieraus wird nun s durch x gefunden, und daraus u auch durch x mittelſt der Integration der Gleichung, $\partial u = s \partial x$. Da nun u und v durch x gegeben werden, ſo iſt auch $y = u v$ durch x erfindbar.

Dieſe verwickelten Operationen können große Schwierigkeit machen, wenn die eingeführten Größen nicht anders als durch Reihen ſich darſtellen laſſen.

Euler hat ſich früh mit der Auflöſung dieſer Gleichung beſchäftiget, in den ältern Petersburger Commentarien T. X. Ihre Auflöſung durch Reihen hat er in der Integralrechnung gewieſen. T. II. Cap. VII. VIII. Einen beſondern Fall hat er hernach in den neuen Petersburger Commentarien, T. XVII. 1773, betrachtet, und in einer handſchriftlich nachgelaſſenen, (in der neuen Ausgabe der J. R. T. IV. p. 533) die Fälle zu finden gelehrt, in welchen die Gleichung, $(1 - axx) \partial^2 y - bx \partial x \partial y - cy \partial x^2 = 0$, integrirbar iſt. Sehr ausführlich hat Pfaff die Gleichung, $x^2 (a + bx^n) d^2 y + x (c + ex^n) \partial y \partial x + (f + gx^n) y \partial x^2 = X \partial x^2$, behandelt, und die Fälle der Integrabilität herausgeſucht. Disquisitiones analyticae, p. 135 bis 224. In den Abhandlungen der Societät zu Verona, T. II. P. I. iſt eine hieher gehörige Abhandlung von Lorgna enthalten.

95. Leichter iſt der Fall, wenn

$$\partial^2 y + Q y \partial x^2 = X \partial x^2$$

iſt. Hier iſt, wenn wiederum $y = u v$ geſetzt wird,

I. $\partial^2 v + Qv\partial x^2 = 0$.

II. $2\partial u\partial v + v\partial^2 u = X\partial x^2$.

III. $v\partial s + 2s\partial v = X\partial x$.

Die letztere multiplicire man mit v, als einer Function von x, ſo iſt die Integrale

IV. $vvs = \int Xv\partial x$.

Alſo iſt

$$s = \frac{\int Xv\partial x}{vv};\; u = \int \frac{\partial x}{vv}\int Xv\partial x;\; y = v\int\frac{\partial x}{vv}\int Xv\partial x.$$

96. Dieſe Gleichungen gehören zu den ſogenannten linearischen. In beſondern Fällen wird man die Auflöſung leichter machen, wenn man einen integrirenden Factor ſucht, wie in dem folgenden Beyſpiele, welches in der Unterſuchung über die Perturbationen des elliptiſchen Laufes der Planeten brauchbar iſt.

97. Es ſey $\frac{\partial^2 y}{\partial\omega^2} + m^2 y = a + b \cos\varphi$,

wo ω und φ Winkel ſind, die ſo von einander abhangen, daß $\partial\varphi = n\partial\omega$ iſt, wobey $\partial\omega$ conſtant geſetzt wird.

Sie werde zuerſt mit $\sin m\omega . \partial\omega$ multiplicirt, ſo wird durch die Integration,

$$\sin m\omega . \frac{\partial y}{\partial\omega} - my\cos m\omega =$$

$$-\frac{a}{m}\cos m\omega - \frac{b}{2(n+m)}\cos(\varphi + m\omega)$$
$$+\frac{b}{2(n-m)}\cos(\varphi - m\omega) + A.$$

Ferner werde ſie mit $\cos m\omega . \partial\omega$ multiplicirt, ſo wird durch die Integration,

$$\cos m\omega . \frac{\partial y}{\partial\omega} + my\sin m\omega =$$

$$+\frac{a}{m}\sin m\omega + \frac{b}{2(n+m)}\sin(\varphi + m\omega) + \frac{b}{2(n-m)}\sin(\varphi - m\omega) + B.$$

Es ſind A und B die durch die Integration eingeführten Conſtanten.

Die erſtere Gleichung werde mit $\cos m\omega$, die andere mit $\sin m\omega$ multiplicirt, ſo entſteht durch Subtraction der erſtern von der zweyten

$$m y = \frac{a}{m} + \frac{mb}{mm - nn}\cos\varphi - A\cos m\omega + B\sin m\omega,$$

wo das zweyte Glied des zweyten Theils durch Zuſammenziehung der Glieder $+\frac{b\cos\varphi}{2(n+m)} - \frac{b\cos\varphi}{2(n-m)}$, entſtanden iſt. Die beiden Glieder, $A\cos m\omega - B\sin m\omega$, kann man bequem in ein einziges vereinigen, $D\cos(\eta + m\omega)$; Denn es iſt $D\cos(\eta + m\omega) = D\cos\eta \,.\, \cos m\omega - D\sin\eta \,.\, \sin m\omega$. Iſt nun $D\cos\eta = A$; $D\sin\eta = B$, ſo iſt

$$y = \frac{a}{mm} + \frac{b}{mm - nn}\cos\varphi - D\cos(\eta + m\omega),$$

wo ſtatt $\frac{D}{m}$ geſetzt iſt D, da eines ſo gut wie das andere eine Conſtante bedeutet. Das Integral iſt vollſtändig, weil zwey Conſtanten D und η hineingekommen ſind.

Wenn der zweyte Theil der vorgegebenen Gleichung mehrere Glieder wie $b\cos\varphi$ erhält, ſo wird für jedes derſelben in dem Werthe von y ein Theil, wie

$\frac{b}{mm - nn}\cos\varphi - D\cos(\eta + m\omega)$, erhalten, wo n

und die beiden Conſtanten die zu jedem der durch φ allgemein bezeichneten Winkel gehörigen Größen ſind.

98. Als Beyſpiel, ein Syſtem von Differential-Gleichungen des zweyten Grades zu integriren, diene folgendes, welches aus einem Aufſatze von Gauß über die Abweichung fallender Körper von der lothrechten, in Benzenbergs Verſuchen über die Umdrehung der Erde, 1804. S. 369. genommen iſt, wo aber nur bloß die Integralen ohne die Analyſis beygefügt ſind. Es iſt

$$\text{I.}\quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - 2na\frac{\partial y}{\partial t} = 0.$$

$$\text{II.}\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2na.\frac{\partial x}{\partial t} + 2nb.\frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

$$\text{III.}\quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - 2nb.\frac{\partial y}{\partial t} + g = 0.$$

Das Differential ∂t iſt unveränderlich geſetzt. Es iſt $a = \sin\alpha$; $b = \cos\alpha$, daher $aa + bb = 1$.

Aus I. iſt

$$\text{IV.}\quad \frac{\partial x}{\partial t} - 2nay + A = 0.$$

Aus III. iſt

$$\text{V.}\quad \frac{\partial z}{\partial t} - 2nby + gt + B = 0.$$

Dadurch wird aus II. die Gleichung

$$\text{VI.}\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 4nn(aa+bb)y - 2nbgt - 2n(Aa+Bb) = 0.$$

Da $aa + bb = 1$ iſt, ſo iſt

$$\text{VII.}\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 4nny - 2nbgt - 2n(Aa+Bb) = 0.$$

Dieſe Gleichung werde mit sin 2nt. dt multiplicirt, ſo wird durch Integration wie in (97.) erhalten

$$\text{VIII.}\quad \sin 2nt.\frac{\partial y}{\partial t} - 2ny\,\mathrm{coſ}\,2nt + bgt\,\mathrm{coſ}\,2nt - \frac{bg}{2n}\sin 2nt + (Aa + Bb)\,\mathrm{coſ}\,2nt + C = 0.$$

Dieſelbe Gleichung werde mit coſ 2nt. ∂t multiplicirt, und dann integrirt, ſo iſt

$$\text{IX.}\quad \mathrm{coſ}\,2nt.\frac{\partial y}{\partial t} + 2ny\sin 2nt - bgt\sin 2nt - \frac{bg}{2n}\mathrm{coſ}\,2nt - (Aa + Bb)\sin 2nt + D = 0.$$

Dieſe Gleichungen wie in (97.) combinirt geben

$$\text{X.}\quad 2ny = bgt + C\,\mathrm{coſ}\,2nt - D\sin 2nt + Aa + Bb = 0,$$

oder

$$\text{XI.}\quad 2ny = bgt - E\sin(2nt - \mathfrak{A}) + Aa + Bb.$$

Nun werden die beiden andern veränderlichen, x und z, leicht gefunden. Aus IV. iſt

$$\text{XII.}\quad x = \tfrac{1}{2}abgt^2 - (Ab^2 - Bab)t + \frac{Ea}{2n}\mathrm{coſ}\,(\mathfrak{A}2nt-) + F;$$

und aus V.

$$\text{XIII.}\quad z = G + \frac{Eb}{2n}\mathrm{coſ}\,(2nt - \mathfrak{A}) - \tfrac{1}{2}a^2gt^2 + (Aab - Ba^2)t.$$

Die Conſtanten zu beſtimmen, müſſen die Werthe von

$\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, x, y, z für t = o bekannt ſeyn, oder angenommen werden.

99. Man bemerke an dem Beyſpiele (97.), daß durch die erſte Integration zwey vollſtändige Differentialgleichungen vom erſten Grade gefunden ſind, durch deren Verbindung, ohne nochmahlige Integration, die endliche Gleichung gefunden wird. Allgemein hat jede Differentialgleichung vom zweyten Grade zwey Differentialgleichungen des erſten Grades zu ihren Integralen. Man bezeichne eine endliche Gleichung zwiſchen zwey veränderlichen Größen x und y durch M = o; ihre erſte Differentialgleichung durch P = o, ihre zweyte durch Q = o. Sind in den beiden Differentialgleichungen noch die willkürlichen Conſtanten, A und B, enthalten, wie es in dem Beyſpiele (97.) der Fall iſt, ſo laſſen ſie ſich durch Verbindung derſelben mit der Gleichung M = o herausſchaffen. Es entſteht nun eine Differentialgleichung vom zweyten Grade, V = o, die von den willkührlichen Größen unabhängig iſt, wie ſie es ſeyn muß. Ferner leite man aus den beiden Gleichungen, M = o, und P = o, durch Elimination der einen und der andern Conſtante zwey Differentialgleichungen erſten Grades, R = o, S = o, her, in deren erſterer bloß A, in der andern bloß B enthalten ſey. Durch die Differentiation beider erhält man eine und dieſelbe Differentialgleichung des zweyten Grades, weil in dieſer die Conſtanten fehlen, das iſt, diejenigen Größen, welche auf die Differentialquotienten vom zweyten Grade keinen Einfluß haben. Sie iſt alſo mit der V = o einerley. Dieſe hat folglich zwey Differentialgleichungen vom erſten Grade zu Integralen.

Ueberhaupt hat eine Differentialgleichung vom nten Grade n vollſtändige Differentialgleichungen vom (n — 1)ten Grade zu Integralen, vermittelſt deren es bisweilen möglich ſeyn wird, die endliche vollſtändige In-

tegralgleichung zu finden. Fontana hat zuerſt dieſe Bemerkung gemacht. Couſin traité de calcul diff. et int. T. I. nr. 262.

100. Die Unterſuchung, wie Differentialgleichungen vom zweyten Grade durch Zufügung eines Factors integrirbar werden, und die Beſtimmung der Relationen zwiſchen den Functionen der veränderlichen Größen in einer Differentialgleichung und einem Factor von gewiſſer Form, damit jene durch dieſen integrirbar werde, ſind ſo verwickelt, daß ſie ſich nicht mehr für das gegenwärtige Werk eignen. Man ſehe Eulers Integralrechnung, T. II. Sect. I. Cap. V. VI. Wegen der Integrationen durch Reihen muß ich ebenfalls auf dieſes Werk verweiſen. In der neuen Ausgabe ſind noch zwey handſchriftlich hinterlaſſene Abhandlungen über die Differentialgleichungen vom zweyten Grade hinzugekommen.

101. Die Integration der Differentialgleichungen, die noch über den zweyten Grad hinausgehen, ſind begreiflich noch viel ſchwieriger, daher ich ſie hier ganz übergehe. Diejenigen, welche ſie anzuwenden haben, werden wiſſen, ſich darüber Belehrungen zu verſchaffen. Die Quellen hat la Croix in dem Verzeichniſſe vor dem zweyten Theile ſeines Werks angezeigt. D'Alembert in den Mém. de l'Acad. de Berlin 1748; de l'Acad. de Paris, 1767 u. 1769; Miſcell. Taurinenſia, T. III. la Grange in Mém. de l'Acad. de Berlin, 1775; Miſc. Taurin. T. III. la Place in den Miſc. Taur. T. IV. Lexell in den Act. Ac. Petr. 1777 u. 1779. Lorgna in den Mem. della Soc. Italiana, T. II. In Eulers Integralrechnung iſt der zweyte Abſchnitt des zweyten Theils dieſer Unterſuchung gewidmet. Dazu kommen noch in der neuen Ausgabe zwey handſchriftlich hinterlaſſene Aufſätze.

102. Die Integration der Differentialgleichungen mit drey veränderlichen Größen, verſpare ich zu dem Artikel, Partielle Differentiale, wo ſich mehr Raum zu An

wendungen dieſer Rechnung finden wird. Die Variationsrechnung an ihrem Orte.

Interpolation, ſ. Einſchalten.

Interſcendens, ein Kunſtwort, wodurch Potenzen mit irrationalen Exponenten von Einigen bezeichnet ſind, z. B. $z^{\sqrt{2}}$. Leibnitz nannte auch Potenzen mit gebrochenen Exponenten interſcendentia. Opp. T. III. p. 107. Die Curven, in deren Gleichungen Potenzen der veränderlichen Größen mit irrationalen Exponenten vorkommen, nannte Leibniz interſcendentes, weil ſie gleichſam zwiſchen den algebraiſchen und transſcendenten in der Mitte ſind.

Inverſa methodus tangentium, umgekehrte Methode der Berührenden, iſt das Verfahren aus gegebenen Eigenſchaften der Berührenden an einer Curve oder der Normalen die Gleichung für die Curve zu finden. Die directe Methode beſtimmt aus der Gleichung für jeden Punct der Curve die Lage der Berührenden.

Z. B. die Curve zu finden, an welcher die Subtangente $= \frac{yy}{a+x}$ iſt. Da der allgemeine Ausdruck für die Subtangente iſt $\frac{y\partial x}{\partial y}$ (Berührende Linie, 13), ſo iſt $\frac{y\partial x}{\partial y} = \frac{yy}{a+x}$; alſo $(a+x)\partial x = y\partial y$. Daher $ax + \frac{1}{2}xx = \frac{1}{2}yy$, oder $2ax + xx = yy$, wenn die Conſtante $= 0$ geſetzt wird. Dieſes iſt die Gleichung für die gleichſeitige Hyperbel, wenn die Abſciſſen auf der Hauptaxe vom Scheitel an genommen werden.

Da die Gleichung durch Integration gefunden wird, ſo hat man auch bisweilen die Integralrechnung ſelbſt die

umgekehrte Methode der Berührenden genannt. Doch iſt es beſſer, die Benennung auf das erklärte Verfahren einzuſchränken. Die Beauniſche Aufgabe war die erſte dieſer Art.

Inverſe bezeichnet bey Proportionen, daß die zuſammengehörigen Größen in ungleichnamigen Gliedern zu ſtehen kommen. Z. B. bey gleichen Kreisbogen verhalten ſich die zugehörigen Winkel inverſe wie die Halbmeſſer. Sind die Halbmeſſer R, r, die Winkel W, w, ſo iſt R : r = w : W. Bey der Zuſammenſetzung der Verhältniſſe kommen die Glieder derjenigen einzelnen Verhältniſſe, in welchen dieſe entgegengeſetzte Stellung Statt hat, ententweder als Factoren in einer ſolchen Stellung, oder als Diviſoren in dasjenige Glied, welches demjenigen gleichnamig iſt, worin ſich die zugehörige Größe befindet. Z. B. der räumliche Inhalt zweyer Körper verhält ſich directe wie das Gewicht und inverſe wie die Dichtigkeit. Sind die Räume R, r, die Gewichte G, g, die Dichtigkeiten D, d, ſo iſt

$$R : r, = G . d : g . D, \text{ oder } R : r = \frac{G}{D} : \frac{g}{d}.$$

Inverſio eines Verhältniſſes iſt nach Einigen der lateiniſche Ausdruck für das, was Euklides ἀναστροφη λογου nennt, die Vergleichung des Vordergliedes mit dem Ueberſchuſſe deſſelben über das Hinterglied. Andere nennen es converſio. Lorenz nennt dieſes Verhältniß ein zurückkehrendes.

Involute nennen einige die Curve, welche durch die Abwickelung einer andern erzeugt wird. Der Ausdruck iſt nicht ſchicklich. Beſſer wird man ſie die evolvirende nennen.

Involution heißt zuweilen die Erhebung auf eine Potenz. Man könnte auch die Verwandlung eines

Aggregats in ein Product aus zwey oder mehr Factoren ine Involution nennen, ſo wie man die entgegengeſetzte Operation eine Evolution nennt. Eine neue merkwürdige Art von Involution iſt die von Hindenburg angegebene combinatoriſche, ſ. Combination, 39.

Irrational iſt ein Verhältnißbegriff, für Größen, deren eine nicht aus gleichen Theilen der andern zuſammengeſetzt werden kann, wie die Diagonale eines Quadrats oder Würfels in Beziehung auf die Seite jenes oder dieſes. Wenn eine Größe ſchlechtweg irrational heißt, ſo iſt dieſes in Beziehung auf die Einheit zu verſtehen. So ſind die Quadratwurzeln aller ganzen Zahlen, die ſich nicht unter den ganzen Zahlen finden, irrationale Zahlen. Ein irrationales Verhältniß iſt zwiſchen Größen, für welche kein gemeinſchaftliches Maaß Statt hat.

Die Arithmetik der Irrationalgrößen hat zum Gegenſtande die Vergleichung der verſchiedenen Gattungen dieſer Größen, und der aus ſolchen und rationalen zuſammengeſetzten. Euklides hat vielen Fleiß darauf gewandt. Das zehnte Buch ſeiner Anfangsgründe handelt ganz davon, und enthält 117 Sätze. Er nennt Größen incommenſurabel (ἀσυμμετρα), für welche ſich gar kein gemeinſchaftliches Maaß finden läßt, nennt aber gerade Linien, deren Quadrate mit dem von einer angenommenen Linie commenſurabel ſind, ob ſie gleich ſelbſt es nicht ſind, rational (ῥηται), gleich denen, die der Länge nach mit jener commenſurabel ſind, und ſolche, deren Quadrate mit dem Quadrate der angenommenen Linie nicht commenſurabel ſind, irrationale (ἀλογοι). Ein Raum, der mit dem Quadrate der angenommenen Linie (der Vergleichungs-Linie) incommenſurabel iſt, heißt irrational. Unter Potenz (Vermögen, δυναμις) verſteht Euklides bloß Quadrate, und daher bedeutet der Ausdruck, eine gerade Linie vermag oder potenzirt (δυναται) einen Ram das Quadrat dieſer Linie iſt dem Raume gleich.

Der eigentliche Gegenſtand der Euklidiſchen Abhandlung ſind gewiſſe Formen der irrationalen Größen, das Wort in unſerer, Anfangs erklärten Bedeutung genommen. Euklides hat für ſie eigene Kunſtbenennungen. Die Erklärungen derſelben mittelſt der Bezeichnungen unſerer Buchſtabenrechnung werden für diejenigen nützlich ſeyn, welche die Euklidiſche Methode ſtudieren wollen. Junge Analyſten werden wohl thun, ſich mit ihr bekannt zu machen, um den Sachen eine andere Anſicht abzugewinnen. Die Buchſtaben a, b, c, bedeuten gerade Linien, deren Verhältniſſe rational ſind, m, n, p, rationale, ganze oder gebrochene Zahlen, $\sqrt[4]{}m$, $\sqrt[4]{}m$, u. dergl. irrationale Wurzeln.

I. Die Linie, welche das Rechteck von den beiden Linien $a\sqrt{m}$ und $b\sqrt{n}$ potenzirt, oder $\sqrt{ab} . \sqrt[4]{mn}$, heißt eine Mediale (μεσῃ). (22. Satz.)

Ein mediales Rechteck hat die Form $ab\sqrt{m}$, oder $ab\sqrt{mn}$. Dieſes zeigt Euklides nicht ausdrücklich an; allein es erhellt aus ſeinen Beweiſen. So nennt er (S. 25.) das Rechteck mit den Seiten $a\sqrt[4]{m}$ und $b\sqrt[4]{m}$ medial, und (S. 26.) ſo das Rechteck mit den Seiten $a\sqrt[2]{mn^2}$ und $b\sqrt[4]{mp^2}$.

II. Die Zuſammengeſetzte, $a\sqrt{m} + b\sqrt{n}$, heißt eine Binomiale, oder ein Binomium (ἡ ἐκ δυο ὀνοματων). Statt einer der Wurzeln mag auch eine rationale Zahl ſtehen. S. 37. Euklides unterſcheidet zwey Gattungen, jede mit drey Arten der Binomialen, wovon in dem Artikel, Binomium, Nachricht ertheilt iſt. Das Quadrat der Binomiale iſt $= ma^2 + nb^2 + 2ab\sqrt{mn}$.

III. Die Zuſammengeſetzte, $a\sqrt[4]{m} + b\sqrt[4]{\frac{1}{m}}$,

heißt die erſte **Bimediale.** Das Quadrat derſelben iſt $= (ma^2 + b^2) \sqrt{\frac{1}{m}} + 2ab$.

IV. Die zuſammengeſetzte, $a\sqrt[4]{m} + b\sqrt[4]{\frac{n^2}{m}}$, heißt die zweyte **Bimediale.** Das Quadrat derſelben iſt $= (ma^2 + nb^2) \sqrt{\frac{1}{m}} + 2ab\sqrt{n}$.

V. Die Zuſammengeſetzte, $\sqrt{(aa + ac\sqrt{n})} + \sqrt{(aa - ac\sqrt{n})}$, heißt die **größere Irrationale.** Es iſt $nc^2 = a^2 - mb^2$, wodurch das Rechteck beider Theile ein Mediales wird. Das Quadrat der ganzen iſt $= 2aa + 2ab\sqrt{m}$.

VI. Die Zuſammengeſetzte, $\sqrt{(aa\sqrt{m} + ac\sqrt{n})} + \sqrt{(aa\sqrt{m} = ac\sqrt{n})}$, heißt die **ein Rationales und Mediales potenzirende** (ῥητον και μεσον δυναμενη). Es iſt $nc^2 = ma^2 - b^2$. Das Quadrat der ganzen iſt $2aa\sqrt{m} + 2ab$.

VII. Die Zuſammengeſetzte, $\sqrt{(aa\sqrt{m} + ac\sqrt{n})} + \sqrt{(aa\sqrt{m} - ac\sqrt{n})}$, heißt die **zwey Mediale potenzirende,** wenn $nc^2 = ma^2 - pb^2$, wodurch das Quadrat der ganzen $= 2aa\sqrt{m} + 2ab\sqrt{p}$ iſt.

VIII. Der Unterſchied $a\sqrt{m} - b\sqrt{n}$ heißt eine **Apotome.** Davon ſind zwey Gattungen, jede mit drey Arten, ſ. Apotme.

IX. Hier bildet Euklides ebenfalls fünf Irrationalgrößen, wie die in III. bis VII., worin der zweyte Theil ſubtractiv iſt. Er nennt ſie die **erſte** und die **zweyte Medialapotome:** die **kleinere Irrationale;** die

mit einem Rationalen ein Mediales ausmachende; die mit einem Medialen ein Mediales ausmachende.

Euklides zeigt (S. 55-60) daß die ſechs Binomialen zur Wurzel eine der von II. bis VII. genannten Irrationalen haben. Er zerlegt nämlich das Rechteck von einer dieſer Binomialen und einer Rationallinie in zwey Quadrate und in zwey Rechtecke, deren Seiten die Seiten dieſer Quadrate ſind, eben ſo wie man durch Rechnung zeigt, daß $\sqrt{(a\sqrt{m}+b\sqrt{n})} = A + B\sqrt{mn}$ iſt. Eben das zeigt er von den ſechs Apotomen (S. 92-97). Dieſe Unterſuchungen hängen mit der Lehre von den Wurzeln quadratiſcher Gleichungen zuſammen, die Euklides durch geometriſche Conſtructionen ſehr gut zu finden wußte. Man ſehe die beiden Aufgaben in B. VI. S. 28. 29. Die Zerlegung eines Rechtecks, worin eine Seite eine Binomiale, die andere eine Rationallinie iſt, führt in drey Fällen durch die Rechnung auf biquadratiſche Gleichungen, die aber einer quadratiſchen gleichgültig ſind. Die Wurzeln ſind die in V., VI., VII. angegebenen Theile der binomiſchen Irrationalen.

Hier noch der Beweis, den Euklides X. 27 führt, daß $a\sqrt{m} - b\sqrt{n}$ nicht rational ſeyn kann, nur in unſern Symbolen ausgedruckt.

Es ſey, wenn es möglich iſt, $a\sqrt{m} - b\sqrt{n} = c$ rational. Alſo wären nb^2 und $2bc\sqrt{n}$ incommenſurabel. Da nb^2 mit $nb^2 + c^2$ commenſurabel iſt, ſo iſt $nb^2 + c^2$ mit $2bc\sqrt{n}$ nicht commenſurabel, alſo auch $nb^2 + c^2 + 2bc\sqrt{n}$ oder $(b\sqrt{n} + c)^2$ nicht mit $nb^2 + c^2$; folglich wäre, da $a\sqrt{m} = c + b\sqrt{n}$ iſt, ma^2 mit $nb^2 + c$ incommenſurabel, welches es doch nicht iſt, daher muß c irrational ſeyn.

Algebraiſcher Commentar über das zehnte Buch der Elemente des Euklides, von Meyer Hirſch. Berlin 1794. 3 Bog. 8. An ein paar Stellen mag der Sinn verfehlt ſeyn; übrigens brauchbar.

In dem Artikel, Gleichung 223. iſt wegen Fermats Methode, irrationale complexe Größen aus einer Gleichung wegzuſchaffen, auf den gegenwärtigen Artikel verwieſen worden. Hier iſt das Beyſpiel, wodurch Fermat ſeine Vorſchrift erläutert hat. Die Gleichung ſey

$$\sqrt[3]{(a^2 b + b^3)} + \sqrt{(bc + c^2)} = b.$$

Man ſetze $\sqrt{(bc + c^2)} = d$, ſo iſt

$$\sqrt[3]{(a^2 b + b^3)} = b - d, \text{ und daher}$$

$$a^2 b + b^3 = b^3 - 3 b^2 d + 3 b d^2 - d^3.$$

Hier muß man ſuchen, die eingeführte d auf die erſte Potenz herab zu bringen. Da $d^2 = bc + c^2$ iſt, ſo multiplicire man die Theile der zuletzt erhaltenen Gleichung den einen mit d^2, den andern mit $bc + c^2$, ſo iſt, nach gehöriger Reduction, nebſt Diviſion durch d,

$$3 b^3 c + 3 b^2 c^2 = (3 b^2 c + 3 b c^2 - a^2 b) d$$
$$- (bc + c^2) b^2.$$

Den erſten Theil dieſer Gleichung multiplicire man mit d^2, den andern mit $bc + c^2$, und dividire alles durch d, ſo erhält man eine Gleichung für d in der erſten Potenz, alſo den Werth von d. Setzt man dieſen in der Gleichung $\sqrt[3]{(a^2 b + b^3)} + d = b$, oder in $a^2 b + b^3 = (b - d)^3$ ſo erhält man die vorgegebene Gleichung von ihren irrationalen Ausdrücken befreyt.

Auf gleiche Art hätte man zu verfahren, wenn mehr als zwey irrationale Wurzelgrößen in einer Gleichung vorhanden ſind. Die Rechnung wird aber beſchwerlich, und Fälle von ſolcher Art kommen kaum vor. Die ſchwierigen Fälle in der Mathematik und ihrer Anwendung ſind die,

wo transſcendente Größen von anderer Art als Winkel- und logarithmiſche Functionen vorkommen, und wo Reihen zu entwickeln und mit einander zu verbinden ſind, zugleich unter der Bedingung der Convergenz.

Fermat gab Descartes und andern Analyſten die Elimination der Irratonalitäten in folgendem Beyſpiele auf, welches ich mit der jetzt gewöhnlichen Bezeichnung ſchreibe:

$$\sqrt{(ab - aa)} + \sqrt{(aa + ad + zz)}$$
$$+ \sqrt{ma} + \sqrt{(dd - aa)} - \sqrt{(ar + aa)} = ab.$$

Man ſehe Carteſii epiſt. T. III. p. 266. Descartes ſahe die Aufgabe als ſehr leicht an, worin er ſich aber gar ſehr irrte. Genty in ſeiner Preisſchrift über Fermat berechnet, daß durch die ſucceſſiven Erhebungen 359026206 Termini entſtehen würden.

In einzelnen Fällen kann die Wegſchaffung der Irrationalgrößen leicht ſeyn. Z. B. Es ſey

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 0.$$

Aus combinatoriſcher Analyſis (53.) iſt, wenn daſelbſt ſtatt a, b, c hier die Wurzeln geſetzt werden, da $A = 0$ genommen iſt, und D wegfällt, die vierte Formel, $S = 2B^2$, das iſt,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc})^2$$
$$= 2(ab + ac + bc) + 4(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})\sqrt{abc};$$

folglich

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + ac + bc).$$

Es ſey $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = 0$, ſo iſt in der angeführten Formel für dieſen Fall $S = 2B^2 - 4D$. Man ſchreibe für die Wurzelgrößen die einfachen Zeichen, α. β, γ, δ, etc. wenn ihrer nämlich auch mehr als vier ſind, bezeichne die Summen der verſchiedenen Combina-

tionen durch das vorgeſetzte ſ. (wie in Combination 43.). Alſo iſt $B = ſ.\,\alpha\beta$, und $B^2 = ſ.\,\alpha^2\beta^2 + 2ſ.\,\alpha^2\beta\gamma + 6ſ.\,\alpha\beta\gamma\delta$. Ferner iſt, $C = ſ.\,\alpha\beta\gamma$, und $C.\,ſ.\,\alpha = ſ.\,\alpha^2\beta\gamma + 4ſ.\,\alpha\beta\gamma\delta$. Da $ſ.\,\alpha = 0$ geſetzt iſt, ſo iſt $ſ.\,\alpha^2\beta\gamma = -4ſ.\,\alpha\beta\gamma\delta$, alſo $B^2 = ſ.\,\alpha^2\beta^2 - 2ſ.\,\alpha\beta\gamma\delta$. Demnach iſt $ſ.\,\alpha^4 = 2ſ.\,\alpha^2\beta^2 - 8ſ.\,\alpha\beta\gamma\delta$. Iſt die Anzahl der Größen $= 4$, und werden die Wurzelgrößen wieder gebraucht, ſo iſt

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) - 8\sqrt{abcd},$$

wo die noch gebliebene Irrationalität wegzuſchaffen iſt.

Die Bedingungen, unter welchen eine irrationale Formel einen rationalen Werth erhält, in dem Artikel, unbeſtimmte Analytik.

Irreducibilis caſus, ſ. Gleichung, 76.

Irregular wird insbeſondere von ebenen geradlinichten Figuren gebraucht, deren Seiten und Winkel einander nicht gleich ſind. Körper mit ungleichen Seitenflächen, Flächen- und Eckenwinkeln, heißen irregular im Gegenſatz gegen diejenigen, woran alles dieſes, jedes in ſeiner Art, von gleicher Größe iſt. Eine irregulare Curve iſt diejenige, für welche kein gewiſſes Geſetz durch ihre Coordinaten Statt hat.

Iſagonion, was gleich große Winkel hat.

Iſochronon, dasjenige, was, oder woran etwas in gleichen Zeittheilen geſchieht. Die Schwingungen der Pendel geſchehen deſto näher in gleichen Zeiten, je kleiner die Bogen ſind. Die Curve, worauf ein ſchwerer Punct in gleich großen Zeittheilen fällt und ſteigt, könnte eine iſochrona heißen, wiewohl ſie gewöhnlich tautochrona heißt. Die Benennung iſochrona gehört für die Curve,

auf welcher ein fallender Punct in gleich großen Zeittheilen gleiche Räume nach der Richtung der Schwerkraft beſchreibt. Die Iſochrona paracentrica iſt diejenige, auf welcher der fallende Körper ſich einem gegebenen Puncte in gleichen Zeiten um gleiche Theile des Abſtandes nähert oder ſich von demſelben entfernt. S. die zweyte Abtheilung dieſes Werks.

Iſomoeria, ein Kunſtwort von Vieta, für die Methode die Brüche aus Gleichungen wegzuſchaffen. Von ισος gleich, und μοιρα Theil.

Iſoperimetron, was gleich großen Umfang hat. Unter Figuren gleichen Umfanges haben diejenigen den größten Inhalt, welche die meiſten Seiten haben. S. Größtes und Kleinſtes. Von dem iſoperimetriſchen Problem, deſſen in den Artikeln, Geometrie S. 339, und Integralrechnung S. 761, erwähnt iſt, ſ. Variationsrechnung.

Iſopleuron, was gleich große Seiten hat. Von πλευρα, die Seite.

Iſoſceles, gleichſchenklicht, wird von einem Dreyeck gebraucht. Von σκελος, Schenkel.

Staats-
Bibliothek
Bamberg

Druckfehler und Verbeſſerungen im erſten Theile.

Seite 9 Zeile 2 lies Vieta.

— 20 — 7 ſtatt halbe große Axe l. große Axe.

— 20 — 4 von unten l. ea eadem ſunt.

— 34 — 16 v. u. $6n^i$ l. $6n^o$.

— 35 — 14 v. u. l. beantwortete.

— 43 — 1 l. trinomiſchen.

— 43 — 5 l. $(a^2 + b - c)^2 - 4 a^2 b$.

— 44 — 17 v. u. l. Analytik.

— 45 — 45 l. elegans.

— 71 — 21 l. conſtructio.

— 71 — 7 v. u. l. zwey.

— 75 — 17 l. $\frac{1.\ 50 + 2.\ 16}{3}$

— 92 — 10 l. die Linie AC.

— 101 — 3 v. u. iſt das Semicolon verſetzt.

— 112 — 6 l. die Gleichung.

— 117 — 1 l. $DN = \frac{a(x+b)}{x-b}$

— 119 — 19 ſt. $(x^2 - b)^2$ l. $(x - b)^2$.

— 119 — 24 ſetze man AC ſt. BD, und ziehe in Fig. 15. die Diagonale AC ſt. der BD.

— 121 — 12 ſt. 7te l. 9te.

— 121 — 5 v. u. l. $AE^2 : BF^2$.

— 133 — 8 l. $AC = c$.

— 147 — 3 l. $\frac{a x^3}{p^3}$

— 150 — 13 ſt. 2φ l. φ.

— 155 — 8 v. u. l. $\sqrt[3]{\text{tang}}\,(45^\circ \pm \tfrac{1}{2}A) = \text{tang}\, B$.

— 160 — 8 ſt. $+$ l. $\pm$.

— 160 — 16 muß der Zähler beydemahl ſeyn $2(m + r)\pi$.

— 161 — 14 v. u. l. $x = \pm 1.\ \sqrt{-1}$.

— 162 — 3 l. die Biquadratwurzeln aus $+1$ ſind ± 1.

— 162 — 13 nach $x^n - a^n$ zu ſetzen, und $x^n + a^n$.

— 162 — 7 und 4 von unten ſetze man noch hinzu, nebſt o. Auch iſt zu bemerken, daß für $\text{coſ}\,\varphi = \pm 1$ nicht $x^2 \pm 2ax + aa$, ſondern $x \mp a$ ein Factor des Binomium iſt, weil in dieſem Falle $\text{ſin}\,\varphi = o$ iſt.

— 163 — 11 v. u. l. $\text{coſ}\,(A + B) + \text{coſ}\,(A - B)$.

— 164 — 5 v. u. l. $\frac{(2n - 2)\pi + \alpha}{n}$

— 170 — 7 ließ L. IV.

— 174 — 16 von unten l. Porphyrius.

Seite 183 Zeile 2 ſtatt des zweyten 100 l. 1000.

— 199 Columne 1 ſt. $\Delta^6 x$ l. $\Delta^6 y$.

— 204 Zeile 7 v. u. ſt. r 2 r + 1 l. r, r + 1.

— 209 — 19 Nach a^{n+1} einzuſchieben $(a + b)^{n+1}$, und in allen Exponenten n + 1 zu ſetzen.

— 219 — 16 v. u. l. Arithmomantica.

— 242. In dem Columnentitel zu ſetzen: Bauniſche Aufgabe.

— 249 — 1 und 2 von unten. Zu verbeſſern folgendergeſtalt: Die Gleichung, $x^2 - 62x - 63 = 0$ hat eine poſitive Wurzel $= 63$. Man hat alſo für R erſt von 67 an die Primzahlen zu verſuchen. Auf Seite 250 Zeile 2. 3. fällt nun weg: die erſte Bedingung macht 61 unbrauchbar.

— 250 — 9 v. u. ſt. einer in, l. in einer.

— 252 der Columnentitel heiße: Bekanntes Glied.

— 252 Zeile 20 l. comparationis.

— 254 — 4 v. u. ſt $\frac{7}{1}$ l. $\frac{7}{2}$.

— 255 — 8 v. u. ſt. 1. 23 l. 1. 2. 3.

— 257 — 1 in dem dritten Gliede ſt. φ l. φ^5.

— 257 — 2 in dem zweyten Gliede ſt. φ l. φ^2.

— 257 — 7 l. $\frac{1 + \cos \varphi}{2}$

— 257 — 8 l. $\alpha\varphi$.

— 262 — 6 l. $b x y^2$.

— 262 — 11 nach y^3 eine) ſt. 1.

— 262 — 16 l. $d\,(z^2 + zx + x^2)$.

— 262 — 1 v. u. ſt. a z — x ſetze a^{z-x}.

— 263 — 3 l. $+ \frac{(z-x)\,(z-x-1)\,(z-x-2)}{1.\ 2\ 3.} b^3$.

— 263 — 7 hinter $\frac{z-x}{u-y}$ fehlt das Multiplicationszeichen, oder das y aus der folgenden Zeile iſt dahinter zu ſetzen.

— 272 — 10 l. $\frac{CP\ (Ct - CM)}{CM.\ Ct}$

— 272 — 5 v. u. ſt. φd l. $d\varphi$.

— 279 — 17 ſt. CN l. PN.

— 296 — 9 ſt. D x E l. D $\times$ E.

— 304 — 20 l. $(1 - x^2)^m$.

— 317 — 9 l. $\alpha - 3\mathfrak{A}$.

— 331 — 1 ſt. des zweyten z^2 l. z^3.

— 336 — 7 ſt. 16 l. 64.

— 341 — 2 v. u. ließ Transactionen.

— 353 — 14 v. u. ſt (5) . (6).

— 355 — 2 l. infiniment.

— 376 — 11 ſt. E l. D.

Seite 380 Zeile 1 v. u. Die hier ausgelaſſene Reihe II. ſteht S. 382 Z. 1.

— 385 — 1 l. $\frac{a}{b} : 1$

— 388 — 4 l. 9,5228787. S. 389 Z. 6 v. u. nach A eine). S. 389 Z. 1 v. u. ſt. $n =$ l. $u =$. Ebdſ. nach $-n$ eine).

— 390 — 10 l. $\sqrt[3]{Q}$.

— 391 — 4 ſt. lA l. lA. S. 391 Z. 12 ſt. lC^3 l. lC^3. S. 391 Z. 17 ſt. AC l. AC. S. 392 Z. 5 v. u. l. $(1 \pm \sqrt{-3})$. S. 393 Z. 2 l. neun. S. 393 Z. 13 ſt. P_1 l. P. S. 394 Z. 5 l. $\frac{1}{2}\sqrt{(p-3n)}$. S. 396 Z. 16 ſt. a^2x^b l. a^2x. S. 396 Z. 17 l. $z^2 = y^2 + x^2$.

— 396 — 3 v. u. ſt. $y^4 2au^3 + 2au^2$ l. $y^4 + 2au^3 + 2auy^2$.

— 396 — 2 v. u. ſt. a l. u.

— 397 — 2 v. u. l. $y^2 = \frac{3}{16} a^2$.

— 399 — 7 v. u. l. Dominicus. S. 401 Z. 13 ſt. Ap l. AP. S. 402 Z. 3 l. $p + \Delta p$.

— 404 — 9 l. $\frac{(1+pp)\, dxd^2p}{2dp^2}$

— 404 — 7 v. u. ſt. $u - pp$ l. $1 - pp$.

— 404 — 5 v. u. l. $\frac{(1+pp)\, dxd^2p}{2dp^2}$

— 405 — 11 l. $2\sqrt{(1+pp)}$.

— 406 — 7 ſt. p^2dx l. y^2dx.

— 410 — 3 v. u. l. $MRN = \frac{ds}{r}$, u. ſetze nach $\frac{ds}{r}$ ein;.

— 411 — 9 v. u. ſt. (G.) l. (10. VI.).

— 413 — 4 ſt. $\alpha + S$, l. $a + \alpha + S$.

— 413 — 19 l. (7–9).

— 423 — 15 v. u. ſt. d Summe l. Summe.

— 430 — 3 ſt. $\frac{4}{3}\pi r^2$ l. $\frac{4}{3}\pi r^3$

— 434 — 3 v. u. ſt. AP^2 l. AP^3.

— 461 in der ſiebenten horizont. Reihe, im 5ten Felde ſtatt b^3c l. b^4c. Ebendaſelbſt im ſechsten Felde ſt. b^5 l. b^6.

— 461 in der letzten horizont. Reihe, im 4n Felde ſt. bh^3 l. b^3h.

— 462 Zeile 15 l. Abtheilung.

— 463 — 18 l. gz^6. S. 464 Z. 16 ſt. 01244 l. 01234.

— 466 — 2 v. u. ſt. $\int a^{m-3}$ l. $\int a^m$, und ſt. $\int abc \times^{m-3}$ l. $\int abc \times \int a^{m-3}$.

— 472 — 1 v. u. l. qualibet. S. 477 Z. 6 l. involutoriſchen. S. 478 die Seitenzahl unrichtig.

— 478 Zeile 10 v. u. l. die Summe der Stellenzahlen ihrer Elemente.

— 478 — 8 v. u. l. Combinationen.

— 479 — 14 v. u. ſt. die l. der.

Seite 479 Zeile 12 v. u. ſt. $a\alpha\mathfrak{A}c$ l. $a\alpha\mathfrak{A}C$.
— 481 — 8. 9 v. u. ſt. (in 10. 11) l. (in 9. 10.).
— 483 — 15 ſt. $p]q$ l. p, q.
— 483 — 16 l. $pqr]m$.
— 490 — 3 v. u. nach etc. eine).
— 491 — 16 im Nenner ſtatt $\delta.\ \delta-1\,..\times$ etc. ließ $\delta.\delta-1\,...\,1\times$ etc.
— 492 — 9 v. u. links ſt. a^{m-8} l. a^{m-3}.
— 495 — 10 nach B^3 eine).
— 497 — 5 ſt. ${}^{n+3}C$ l. ${}^{n+2}C$.
— 513 — 15 iſt vor π noch der Faktor 2 zu ſetzen.
— 513 — 4 v. u. vor : eine).
— 514 — 16 ſt. $\frac{dy}{dx^2}$ l. $\frac{dy^2}{dx^2}$
— 514 — 5 muß der Exponent $\frac{3}{2}$ ſt. $\frac{2}{3}$ ſeyn.
— 518 — 6 ſt. o l. a.
— 518 — 12 das $\sqrt{}$ am Ende der Zeile iſt wegzuſtreichen.
— 518 — 4 von unten ließ Goniometrie.
— 519 — 1 l. $\frac{bc}{aa} = \text{tang}\,\alpha.\ \text{ſec}\,\alpha$.
— 519 — 11 ſt. $dy\,(c^2y^2+b^4)$ l. $\int dy\,\sqrt{(c^2y^2+b^4)}$.
— 519 — 13 das $\sqrt{}$ am Ende der Zeile iſt wegzuſtreichen.
— 525 — 9 ſt. bei l. beide.
— 526 — 4 ſt. x. von l. von x.
— 527 — 5 v. u. ſt. ydy l. yd^2y.
— 534 — 11 v. u. ſt. $+$ l. $\pm$.
— 535 — 4 v. u. iſt das Vorzeichen — vor $\frac{t}{u}\cdot\frac{du}{dy}$ ausgefallen.
— 539 — 2 v. u. ſt. $\sqrt{(a^2-y^2)^2}$ l. $\sqrt{(a^2-y^2)}$.
— 540 — 1 l. $29^\circ\ 55'\frac{1}{2}$. S. 550 Z. 21 ſt. $\sqrt{dx}$ l. Xdx. S. 566 Z. 1 v. u. ſt. a^r l. a^{2n}. S. 567 Z. 2 v. u. l. $+\frac{1}{16}\,\text{coſ}\,\alpha$. S. 578 Z. 10 v. u. l. $\frac{r}{2}(1\pm\sqrt{5})$. S. 578 Z. 9 v. u. nach $\sqrt{3}$ eine). S. 581 Z. 4 v. u. vor $2ax$ eine (. S. 585 Z. 9 v. u. ſt. Ellipſe l. Hyperbel. S. 585 Z. 1 v. u. ſt. mu l. $2mu$. S. 587 Z. 7 v. u. nach AB zu ſetzen (Fig. 94.). S. 588 Z. 9 ſt. aa^2 l. a^2 S. 589 Z. 5 ſt. d^2 l. b^2; u. ſt. $2dydx$ l. $2bydx$. S. 605 Z. 14 l. $4a^2\sin\frac{1}{2}\varphi^2.\,d\varphi^2$. S. 605 Z. 12 v. u. ſt. DR l. DE. S. 608 Z. 2 ſt. $\int\omega\ \text{coſ}\,\omega^2\,d\omega$ l. $\omega\ \text{coſ}\,\omega\,d\omega$. S. 608 Z. 5 ſt. $\frac{2}{3}\,s\omega$ l. $\frac{2}{3}\,\text{coſ}\,\omega$.
— 608 — 17 ſt. π^3a^3 l. $2\pi^3a^3$.
— 608 — 3 v. u. ſt. da l. $d\omega$.
— 609 — 5 ſt. $\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\,\omega d\omega$ l. $\frac{1}{2}\int\sin\frac{1}{2}\,\omega d\omega$.
— 624 — 13. v. u. ſt. $2(m+3)$ l. $2(2m+3)$.
— 629 — 5 ſt. 4 l. 46 S. 650 Z. 23 l. Fig. 102.
— 652 — 8 ſt. $=$ l. $-$. S. 660 Z. 1 ſt. $(\frac{1}{2}^5$ l. $(\frac{1}{2})^5$,

Seite 663 Zeile 4 v. u. im Zähler ſt. $4t^5$ l. $4t^4$. S. 671 Z. 4. v. u. ſt. 58. 55. l. 61. 58. S. 676 Z. 10 v. u. ſt. 56. 58. l. 59. 61.
— 677 — 2 nach coſ (a + nb) zu ſetzen = ſt. +.
— 678 — 5 v. u. ſt. geometriſchen l. goniometriſchen.
— 679 — 18 ſt. sin A l. coſ A.
— 689 — 12 v. u. ſt. 10 l. 100.
— 697 iſt die Seitenzahl unrichtig, und der Columnentitel iſt Cyklotechnie.
— 706 Zeile 6 v. u. l. Euklides.
— 717 — 20 ſt. Decimalrechnung l. Decimalbruch; Rechn.
— 735 — 4 im vierten Gliede ſt. x^2 l. x^3.
— 742 — 10 v. u. ſt. $\varphi\beta + \beta^n$ l. $\varphi\beta = \beta^n$.
— 765 — 5 ſt. Δz in dem 2n Theile der Gleichung l. Δx.
— 773 — 11 v. u. ſt. $+u^2$ l. $-u^2$. S. 777 Z. 6 v. u. ſt. 29 l. 26. S. 801 Z. 10 ſt. x+, l. x+1. S. 811 Z. 9 v. u. iſt $+\Delta yy$ wegzuſtreichen. S. 821 Z. 2 v. u. ſt. Kleinheit l. Klarheit. S. 825 Z. 5 ſt. nur l. zwar. S. 831 Z. 7 v. u. ſt. $x = o$ l. $x + o$. S. 865 Z. 7 ſt. $\alpha\beta$ l. $a\beta$.
— 876 — 2 v. u. l. $e^{\Phi\sqrt{-1}}$.
— 886 — 10 v. u. iſt in dem Zähler von Q in dem dritten Gliede y^2 ausgefallen.
— 890 — 9 hinter R $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ das Zeichen = zu ſetzen.
— 896 — 7 v. u. ſt. z^{m-3} l. x^{m-3}.
— 902 — 6 l. $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.
— 910 — 3 ſt. Scheitels l. Schnittes.
— 918 — 1 ſt. V. l. IV.
— 933 — 16 ſt. lineariſchen l. literariſchen.
— 934 — 15 v. u. ſt. Pp l. BP.
— 935 — 4 v. u. nach $\omega t \frac{1}{2} A$ ſtatt. das Zeichen ×.

Verbeſſerungen in den Figuren.

Fig. 15 Tab. I. iſt ſtatt BD die Diagonale AC zu ziehen.
Fig. 19 Tab. I. iſt BD bis an d. Halbkreis Aea in b zu verlängern.
Fig. 53 Tab III. iſt die Chorde mn, wie auch die Chorde PQ zu ziehen.
Fig. 92 Tab. VI. fehlt am Ende der Linie BO der Buchſtab Z.
Fig. 97 Tab. VI. fehlt an dem Durchſchnitte der MQ mit dem Kreiſe d e der Buchſtab R.
Fig. 120 Tab. VIII. ſind die Buchſtaben C und D zu vertauſchen.

Druckfehler und Verbeſſerungen im zweyten Theile.

Seite 15 Zeile 1 v. u. ſt. q l. y.
— 33 — 15 l. CC = 784,00 der Schreibfehler, der aus einer Verwechslung entſtanden iſt, hat keinen Einfluß.
— 36 — 7 v. u. ſt. 16 l. 14. II. S. 87 Z. 7 ſetze Fig. 9. S. 91 Z. 1 v. u. l. T'. S. 92 Z. 6 v. u. l. Chorde. S. 93 Z. 6 ſt. GQ l. CQ.

Seite 101 Zeile 14 von unten iſt zu ſuppliren (5.).

— 121 — 5 von unten l. (Integralformel (57 und 49.).

— 135 — 16 ſt. Drehung l. Dehnung.

— 272 — 15 ſt. dieſer l. dieſen.

— 456 — 8 ſt. gleiche l. gleich.

— 458 — 6 nach zweyte einzuſchieben: oder die 2te u. 3te.

— 458 — 11 ſt. (N) l. (P).

— 609 — 1 v. u. und S. 610 Z. 1 wegzuſtreichen die wiederholten Worte: des Bogens AD iſt AF.

— 718 — 15 ſt. MN l. Mt.

— 721 — 8 ſt. AS l. CS.

* * *

Seite 20 Zeile 4 v. u. iſt es beſſer, $\frac{n-x}{n-m}$ ſtatt $\frac{x-n}{m-n}$ zu ſetzen.

— 24 — 3 ſetze man zufolge der dritten Formel in (15), $\frac{\alpha x}{m} - \frac{\beta x}{n} = + o$, 6. 21.

— 455. Es iſt deutlicher, wenn anſtatt des Satzes (185.) der umgekehrte erwieſen wird, nämlich dieſer: Hat die Gleichung (A) zwey gleich große Wurzeln, p, p, ſo hat die Gleichung (B) die Wurzel p einfach. Hat (A) drey gleich große Wurzeln, p, p, p, ſo hat die Gleichung (B) zwey gleiche, p, p, und die Gleichung (C) hat die Wurzel p einfach. Hat (A) vier gleiche Wurzeln, p, p, p, p, ſo hat (B) die Wurzeln, p, p, p; (C) die Wurzeln, p, p; (D) die Wurzel p einfach, u. ſ. f.

Der dort gegebene Beweis braucht nur wenig abgeändert zu werden. Der Abſchnitt VI. wird nun folgender:

Wenn die Gleichung (A) die gleich großen Wurzeln, p, p hat, ſo wird für dieſe in (N) der Unterſchied $u = o$, alſo in $P = o$. daher iſt p eine der Wurzeln der Gleichung (B).

Der Abſchnitt VIII. wird nun folgendergeſtalt verändert:

Wenn die Gleichung (A) drey gleich große Wurzeln, p, p, p, hat, ſo hat u in (N) zwey Werthe $= o$. Es iſt alſo erſtlich $P = o$, da nach der Diviſion durch den Faktor $(u - o)$ oder u, $Q + Ru + Su^2 \dots u^{m-2} = o$ iſt, ſo iſt auch $Q = o$. Es hat alſo die Gleichung (C) eine Wurzel $= p$, und aus dem in IX. angeführten Grunde hat die Gleichung (B) zwey gleichgroße Wurzeln, p, p. Nämlich, wenn die Grundgleichung zwey gleiche Wurzeln hat, ſo hat die wie (B) aus (A) daraus derivirte eine derſelben zur Wurzel. Umgekehrt alſo, wenn eine derivirte mit ihrer Grundgleichung eine Wurzel gemein hat, ſo muß dieſe letztere dieſelbe Wurzel zweymahl enthalten.

Der Abſchnitt VIII. wird auf ähnliche Art verändert.

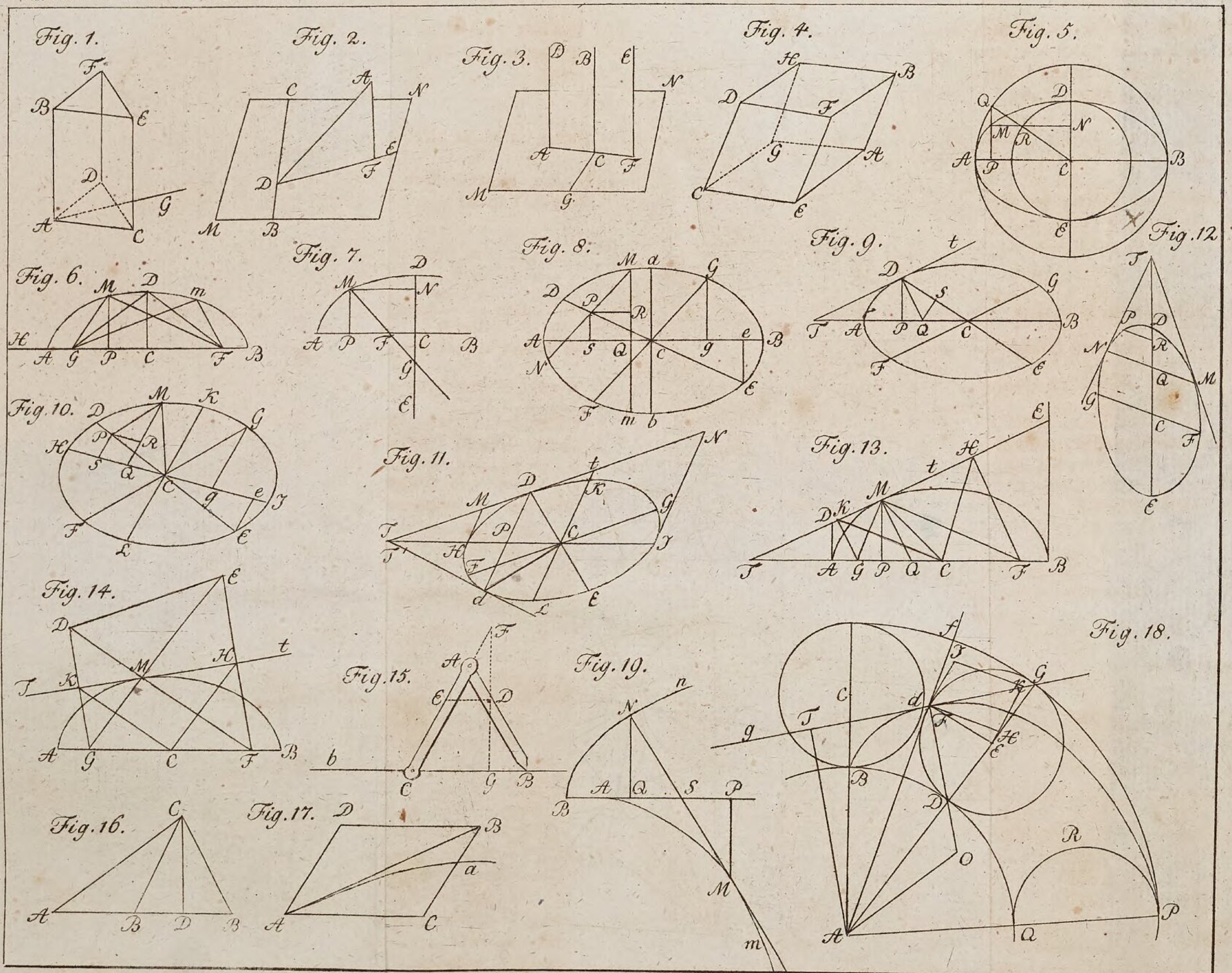


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 12.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 19.
Fig. 18.
Fig. 16.
Fig. 17.

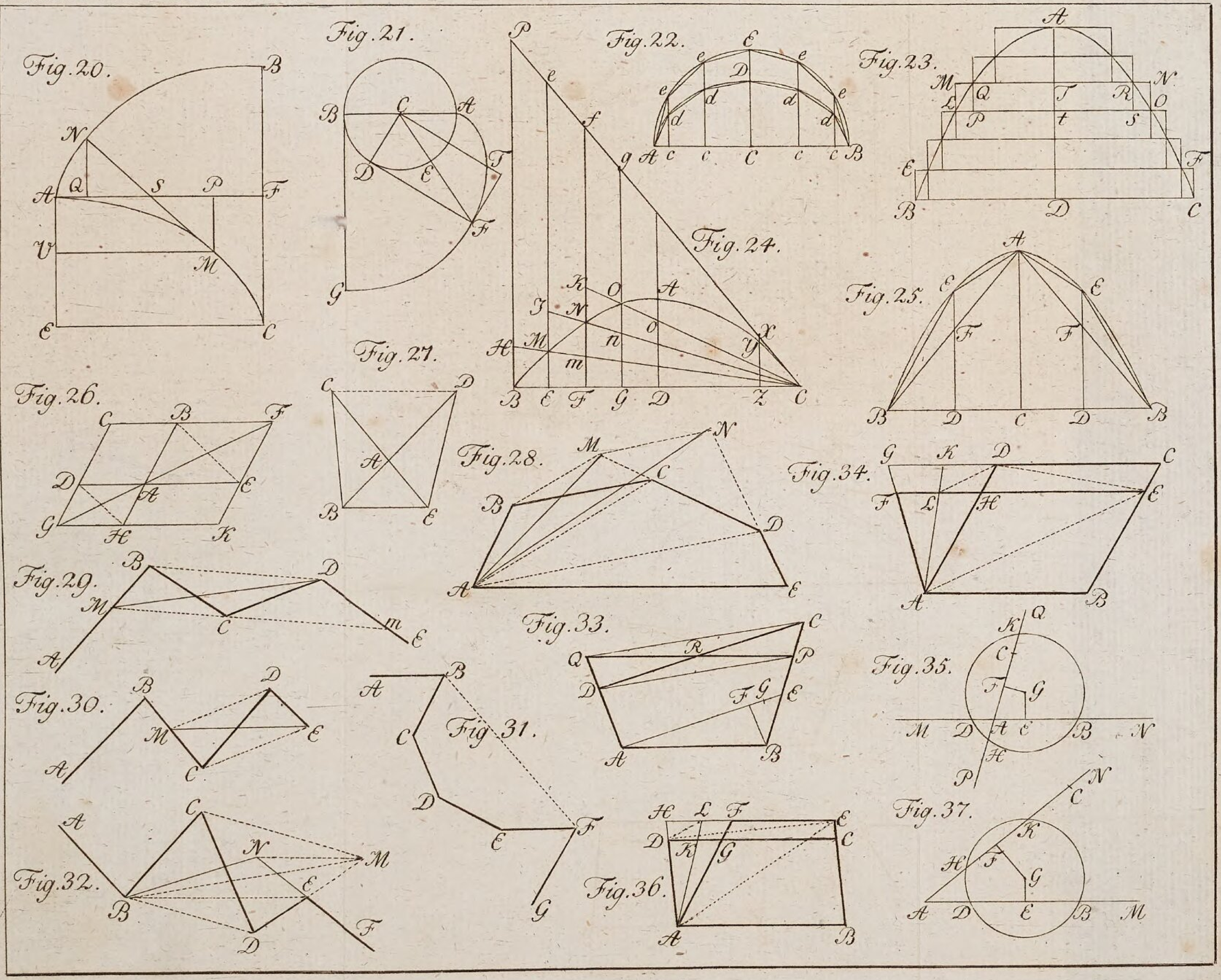


Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.

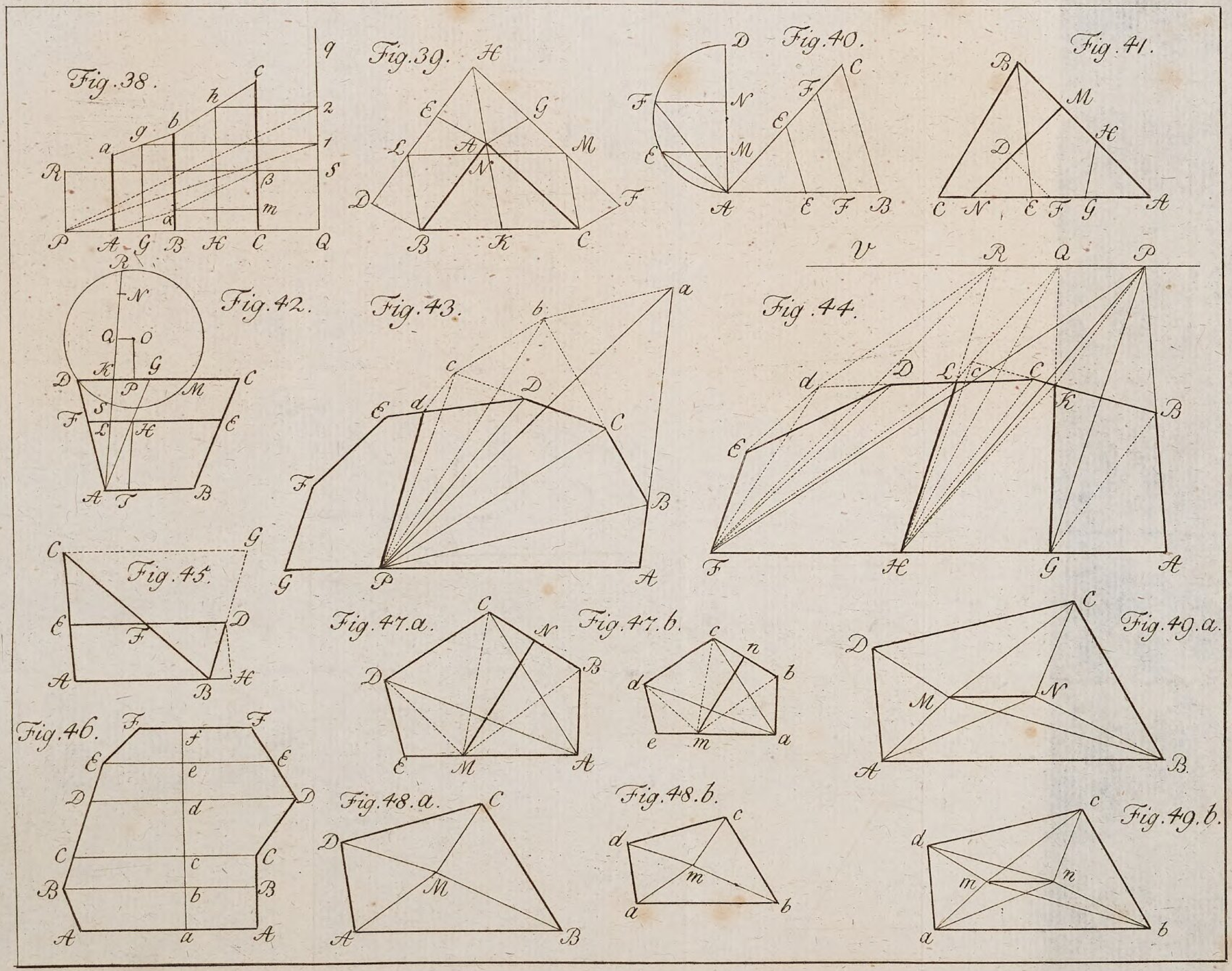


Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47. a.
Fig. 47. b.
Fig. 48. a.
Fig. 48. b.
Fig. 49. a.
Fig. 49. b.

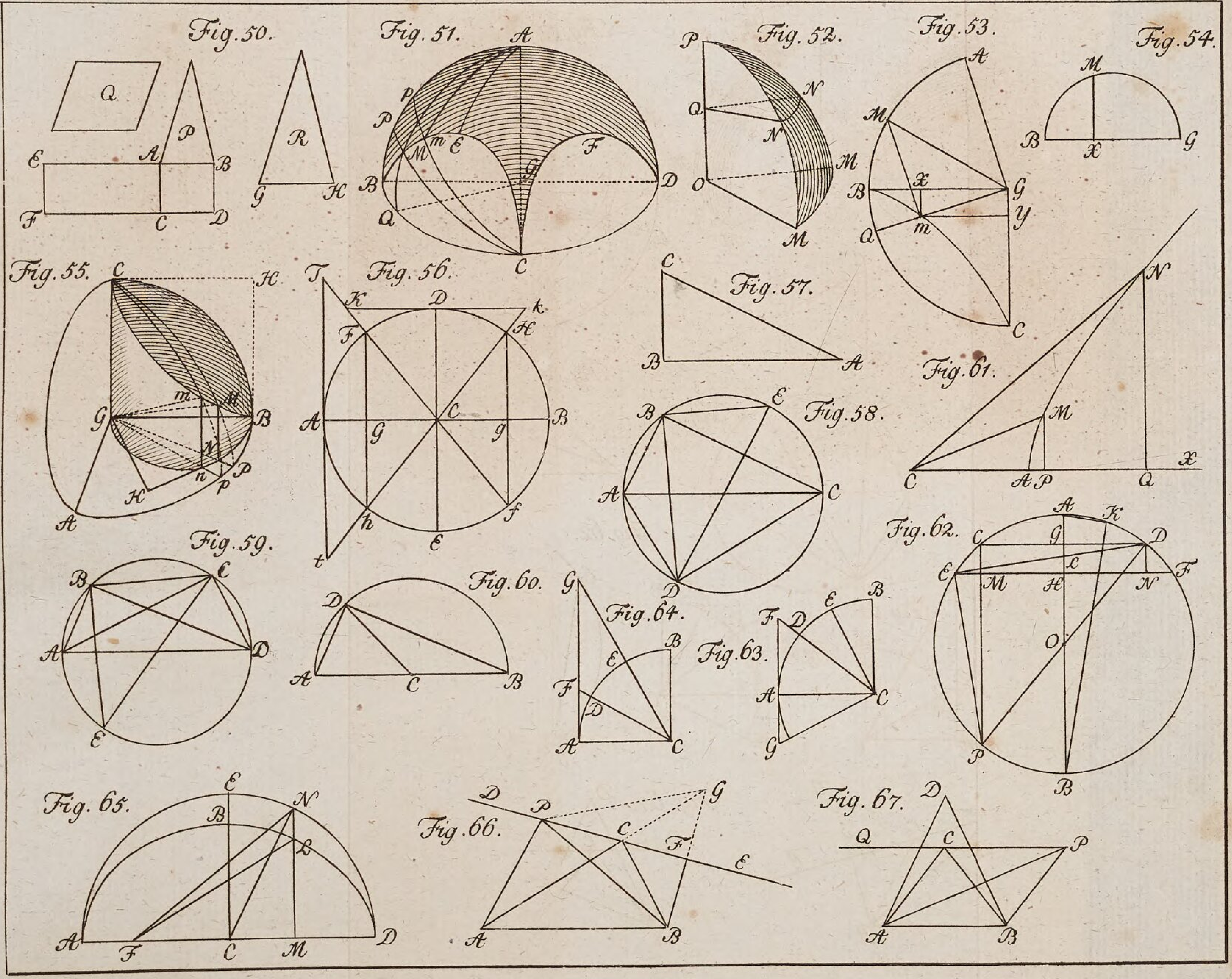


Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.

Fig. 68.

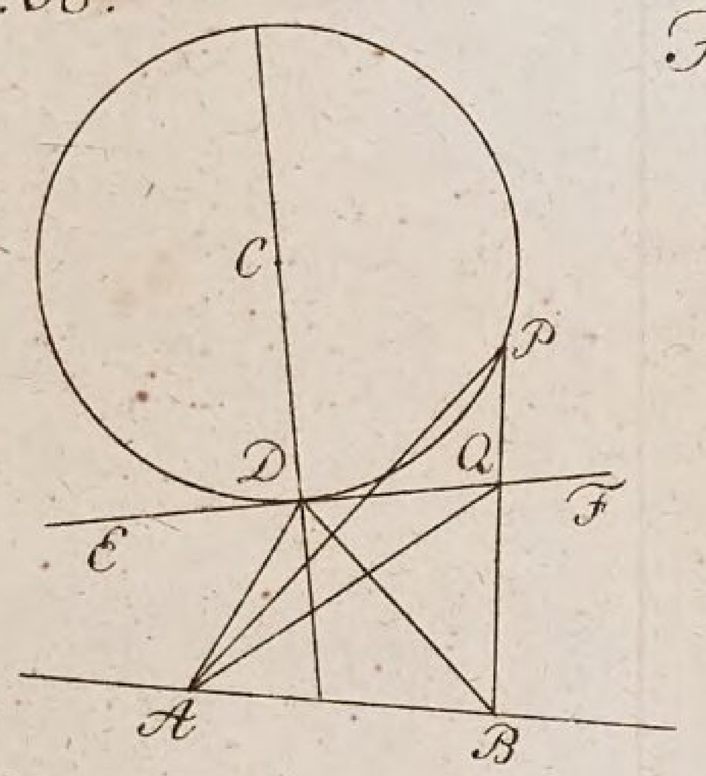


Fig. 69.

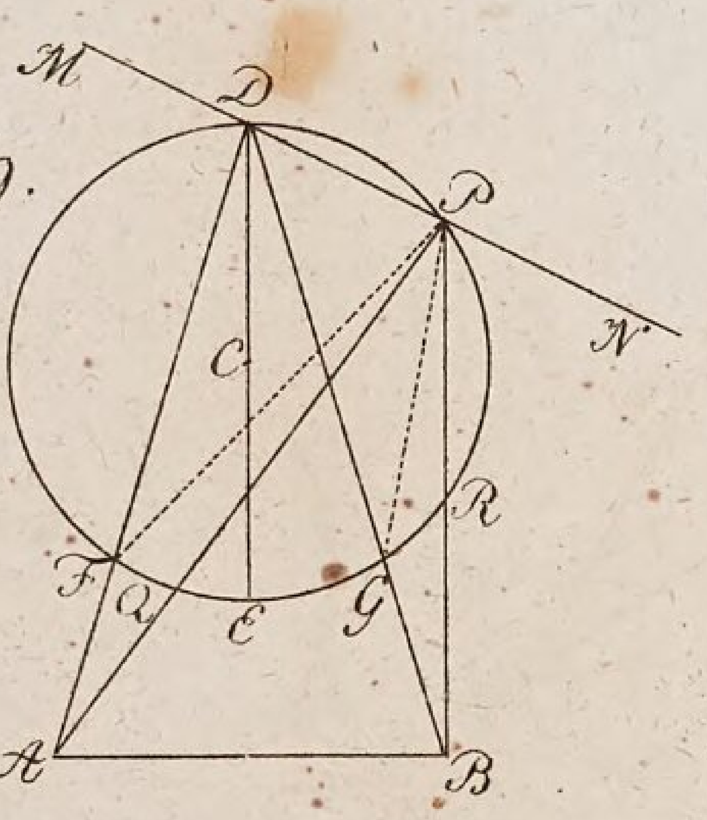


Fig. 70.

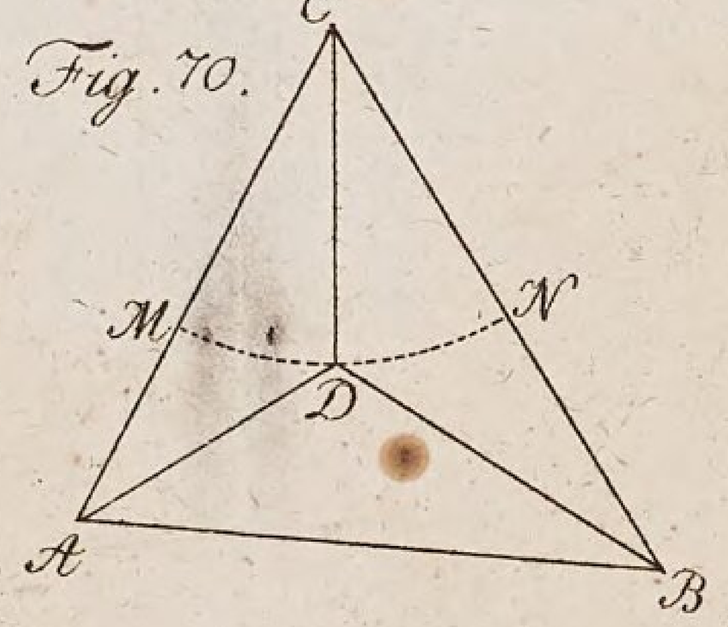


Fig. 71.

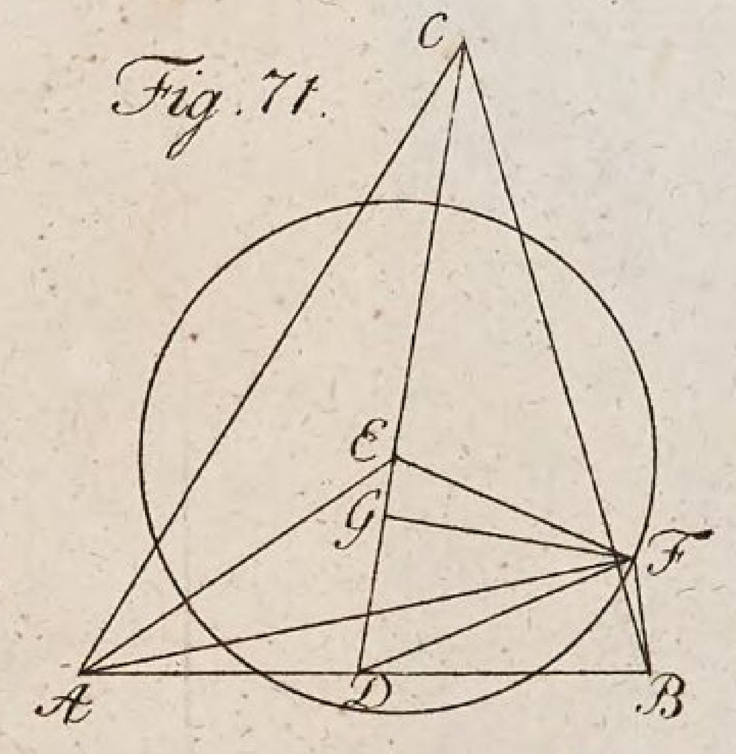


Fig. 72.

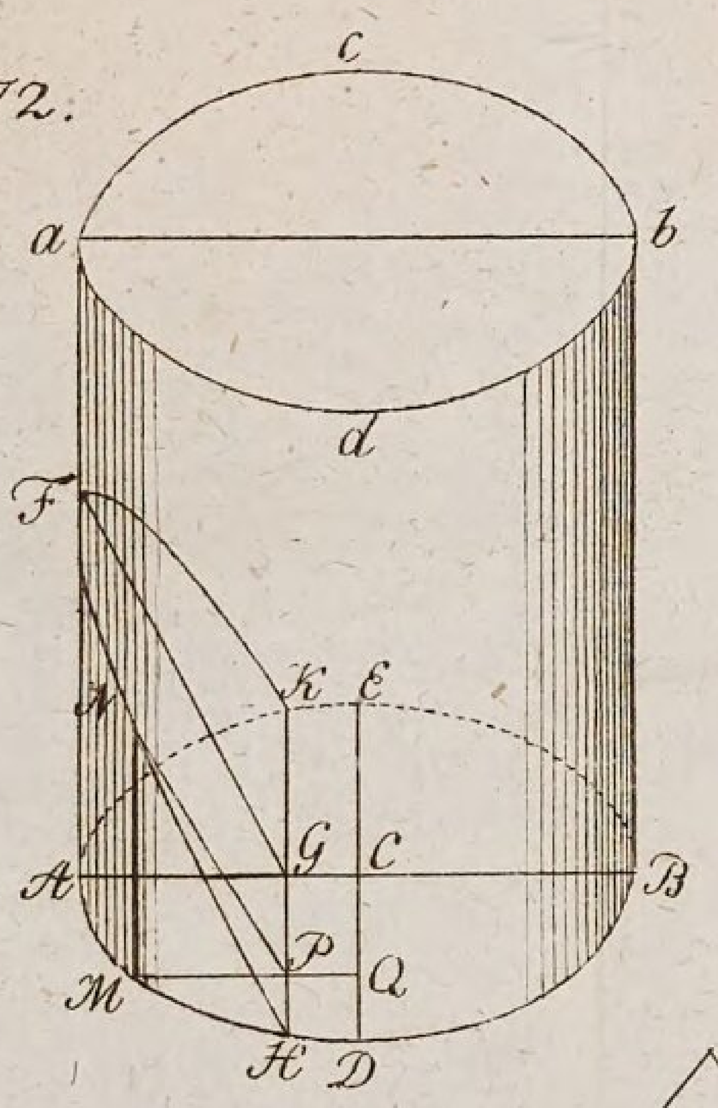


Fig. 74.

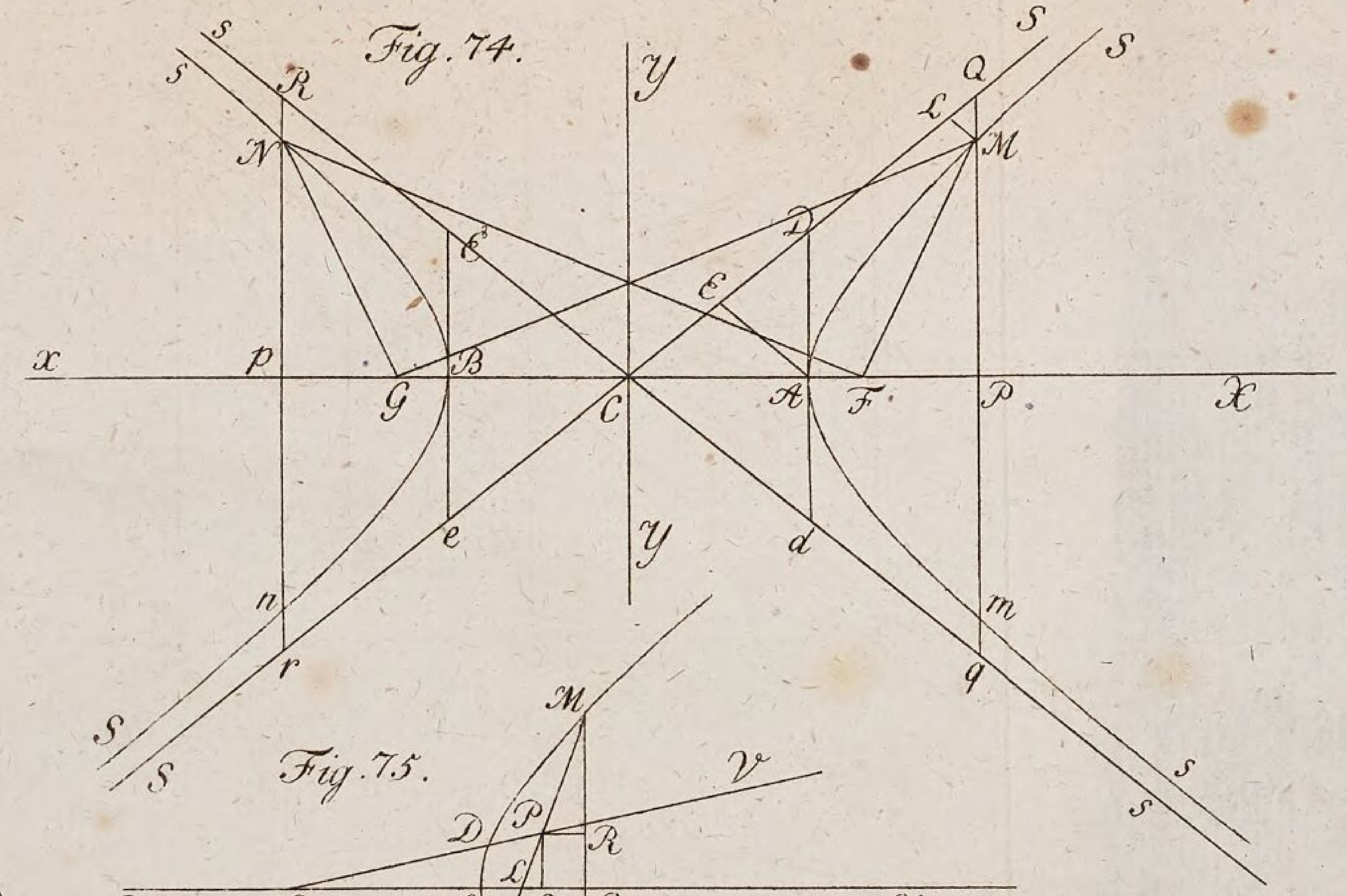


Fig. 73.

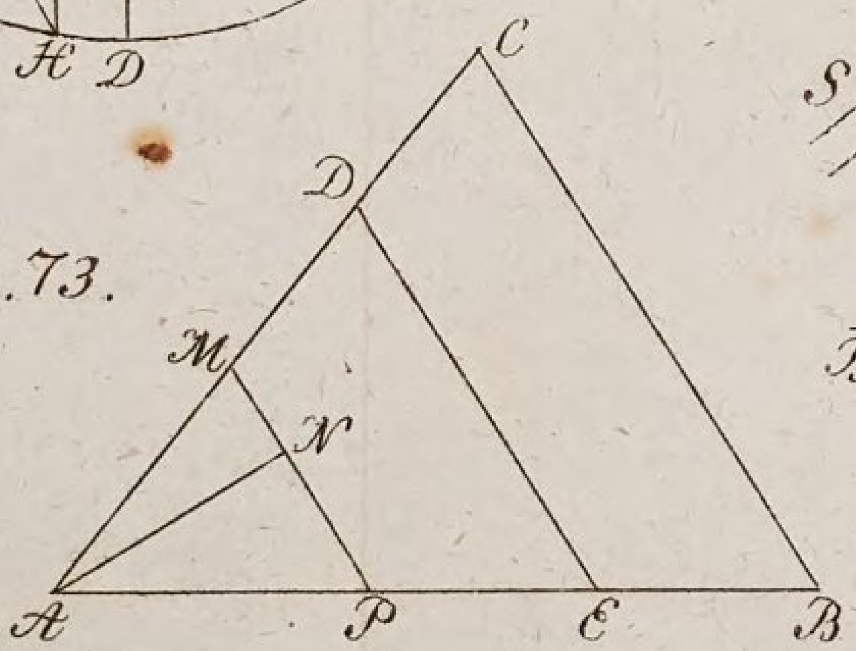


Fig. 75.

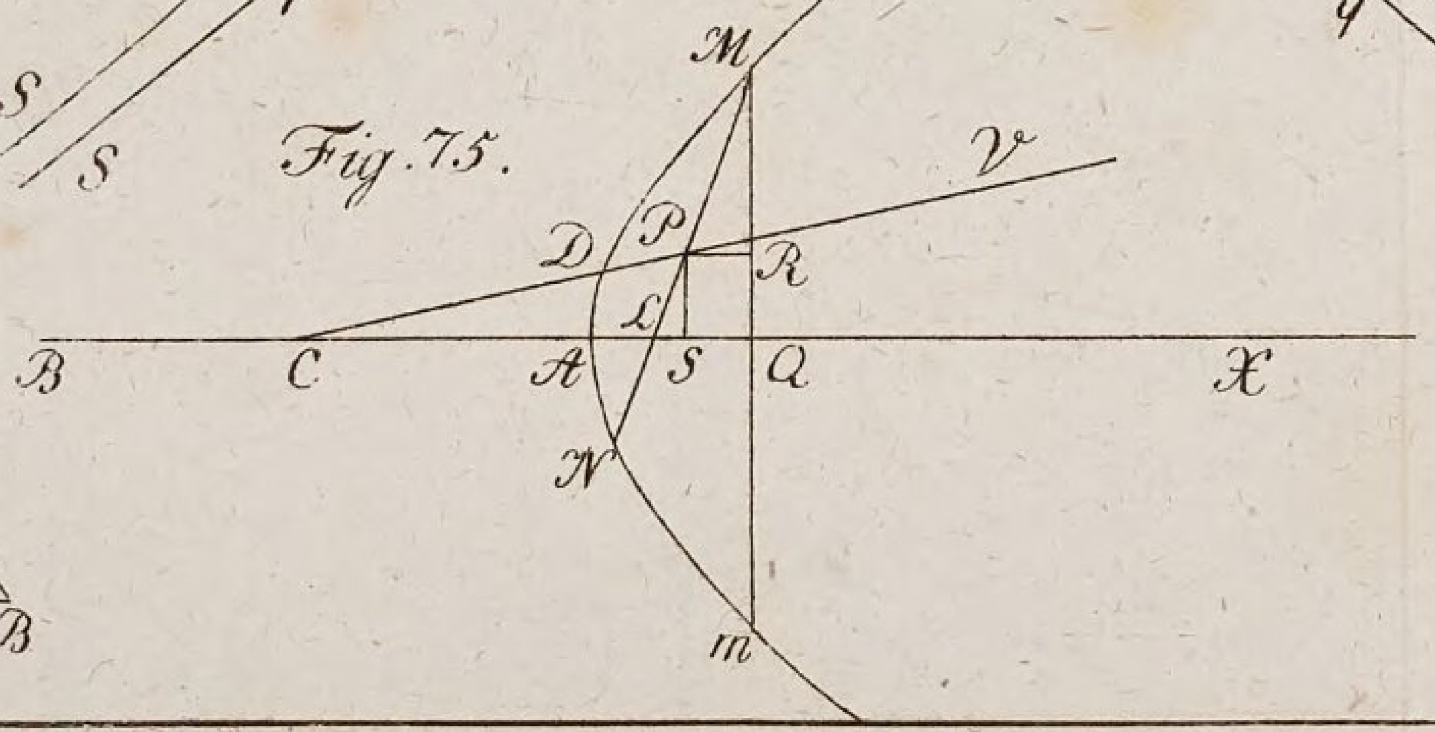


Fig. 76.

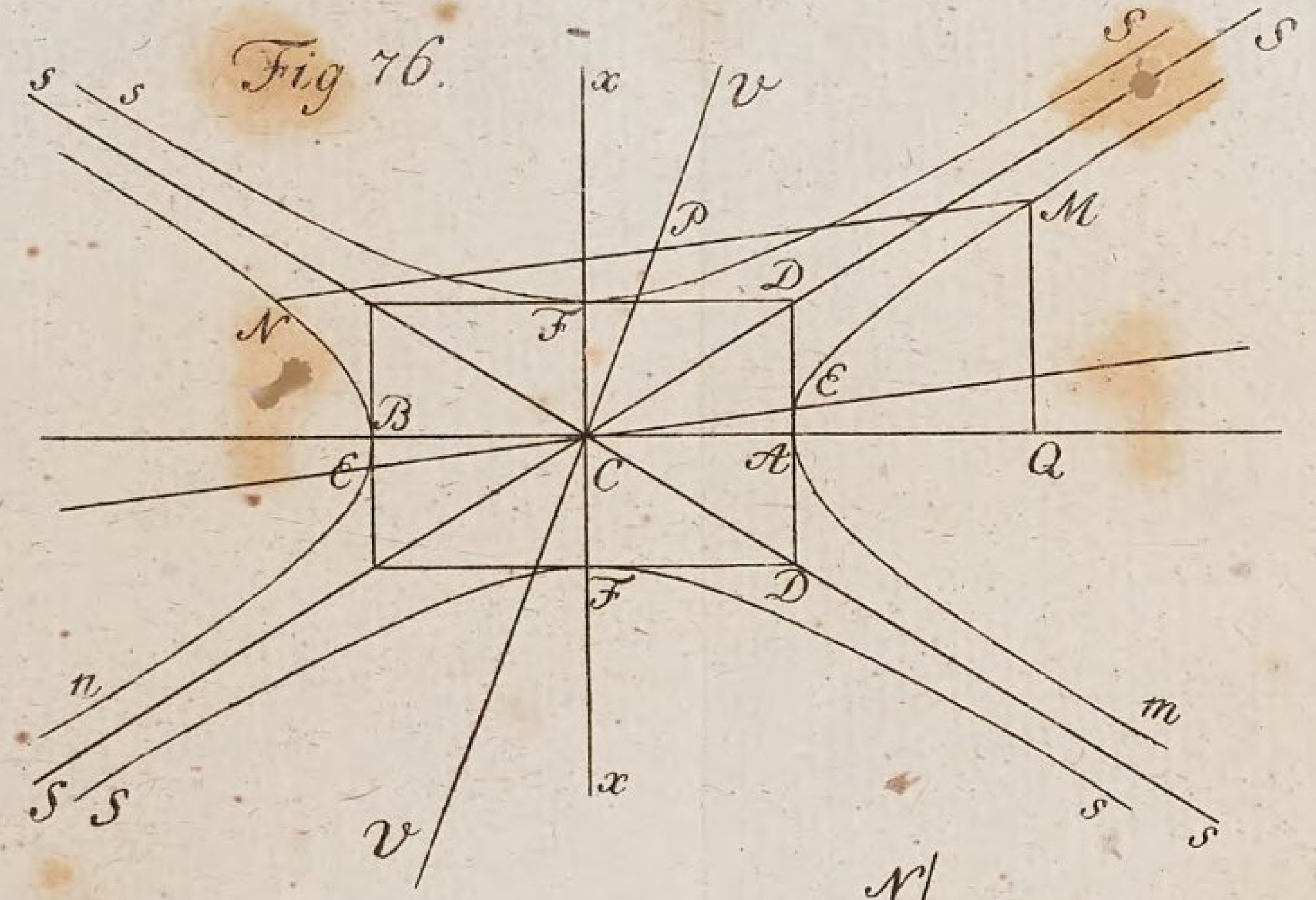


Fig. 77.

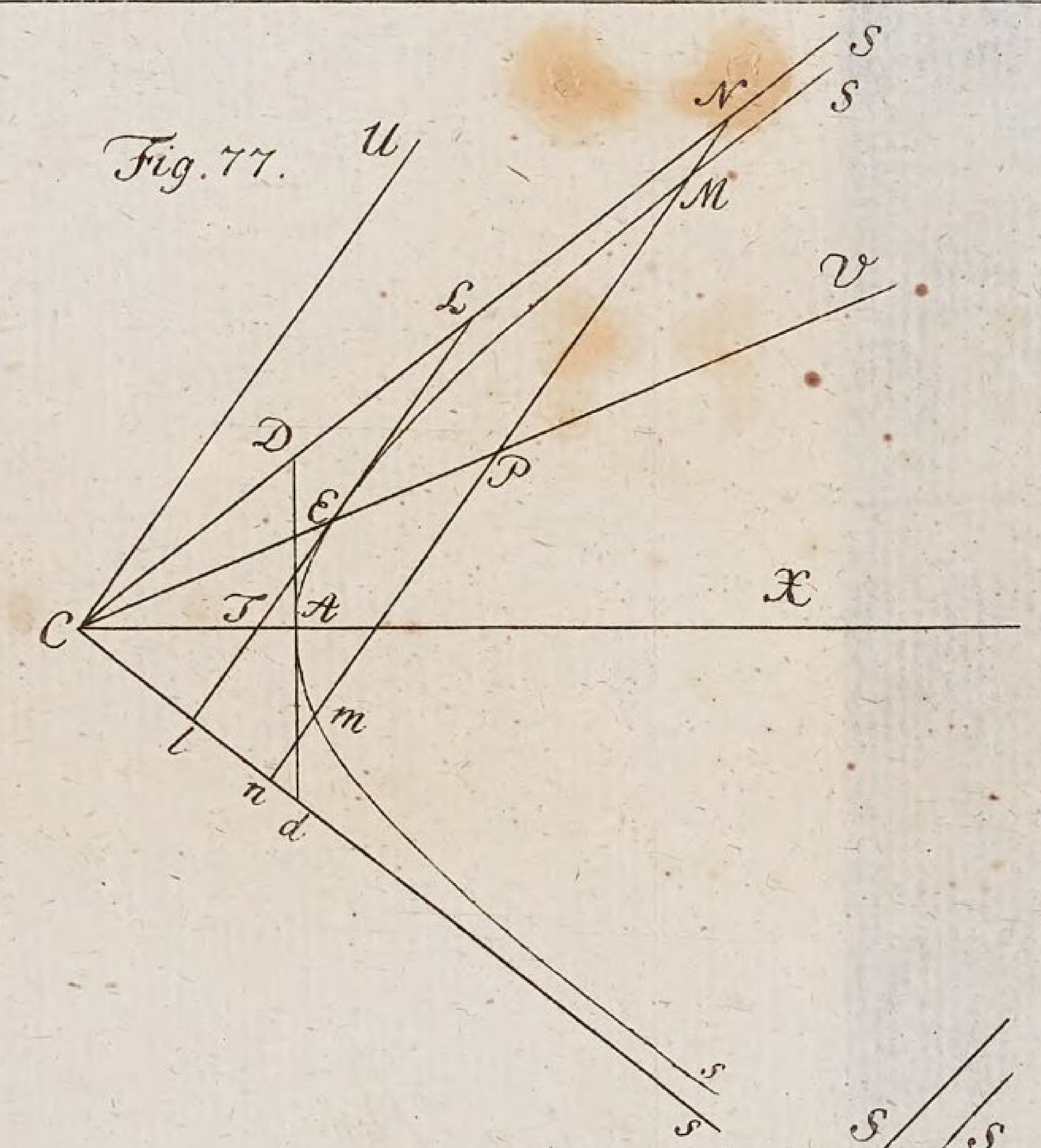


Fig. 80.

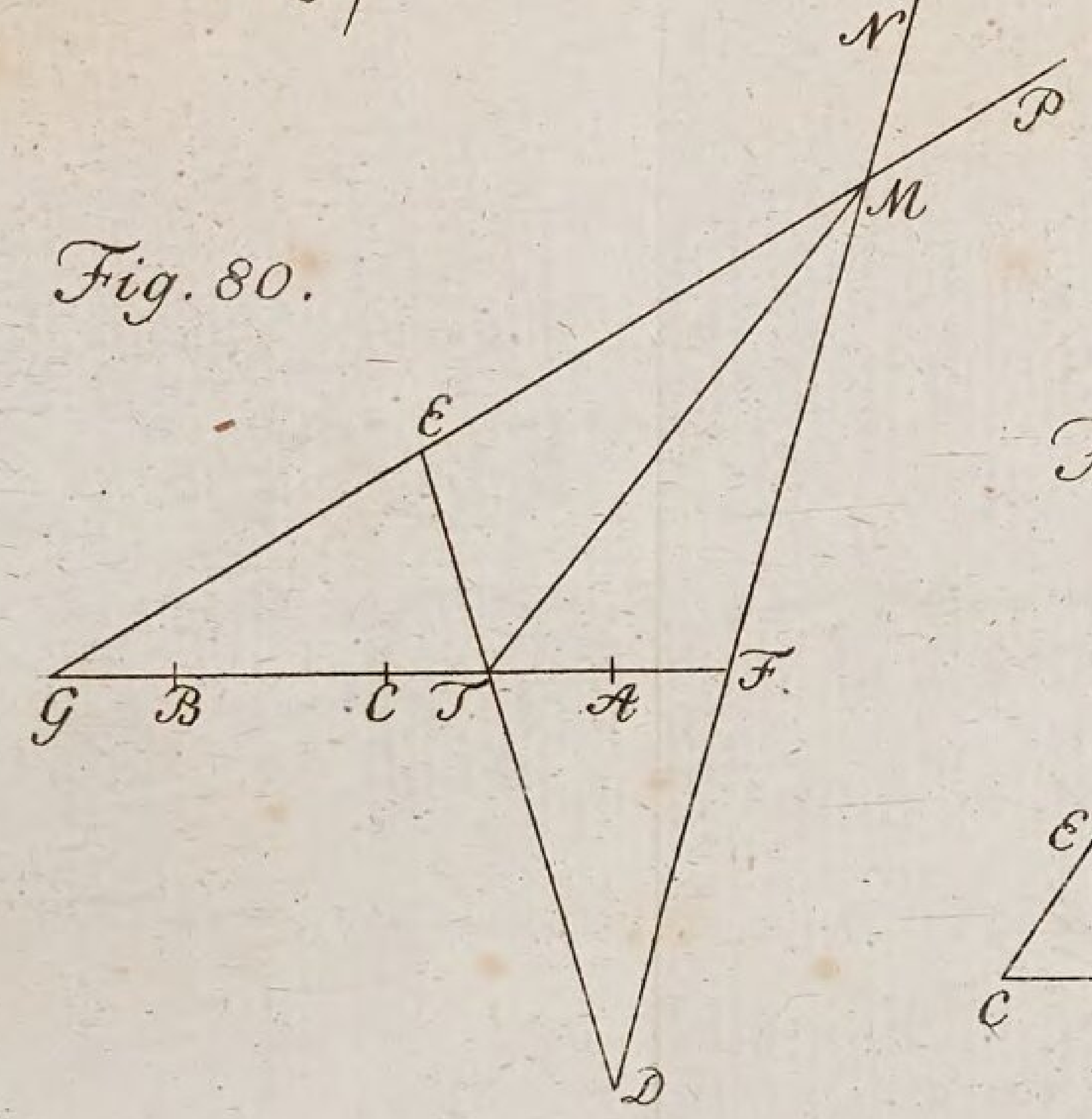


Fig. 79.

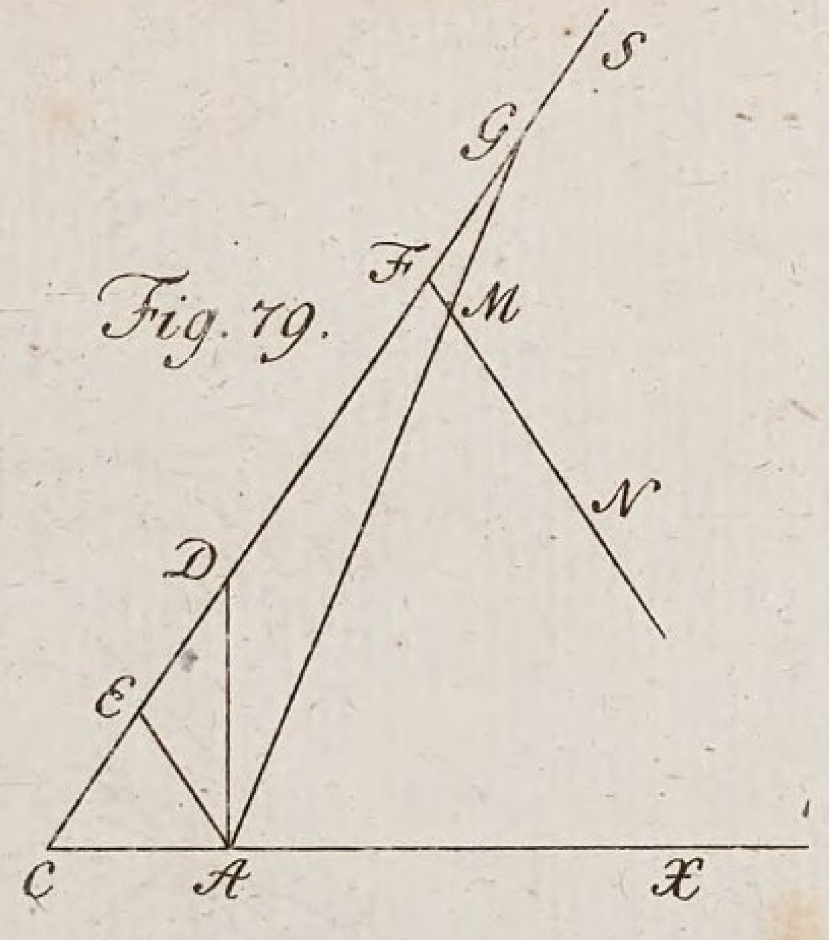


Fig. 78.

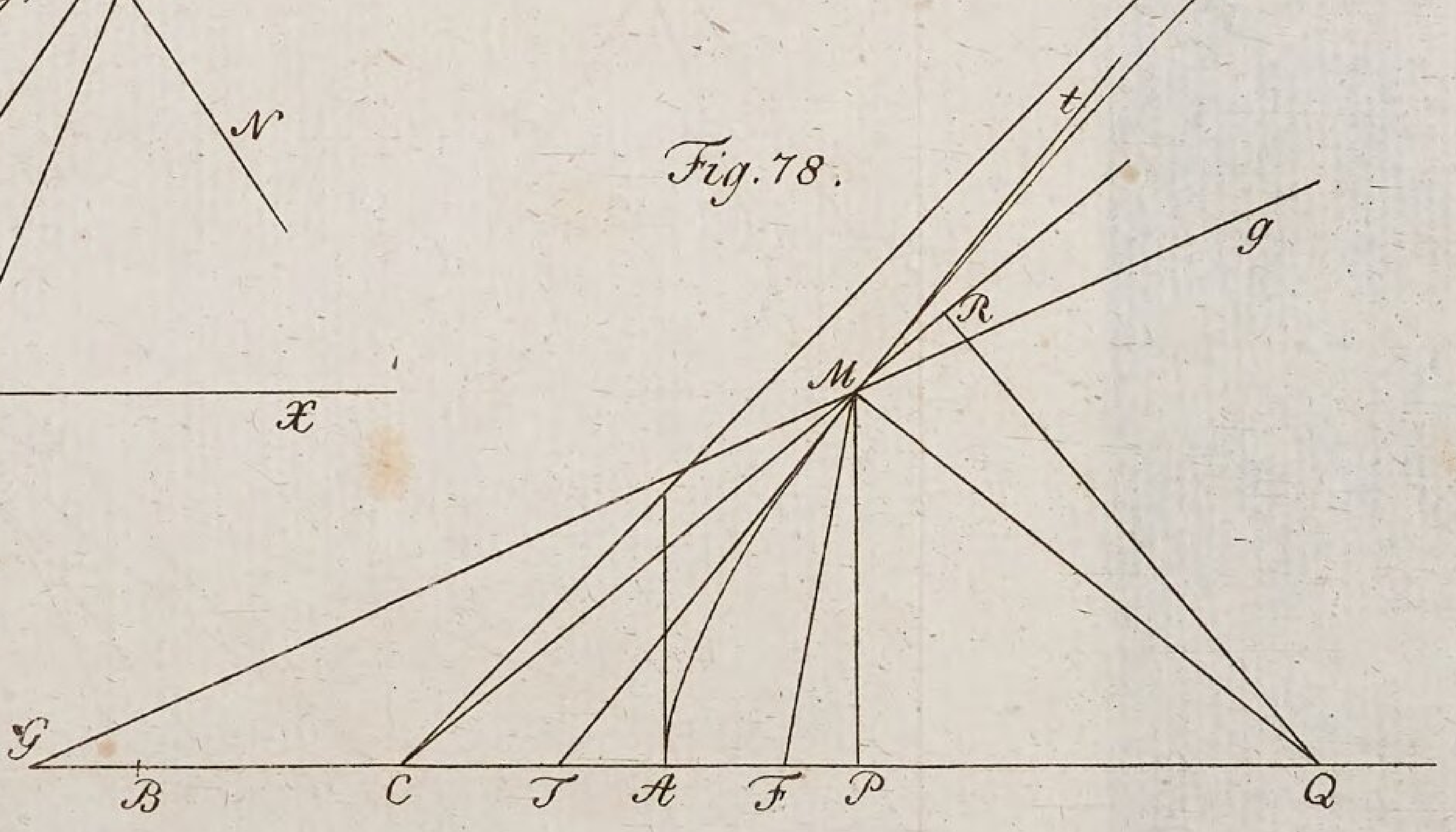
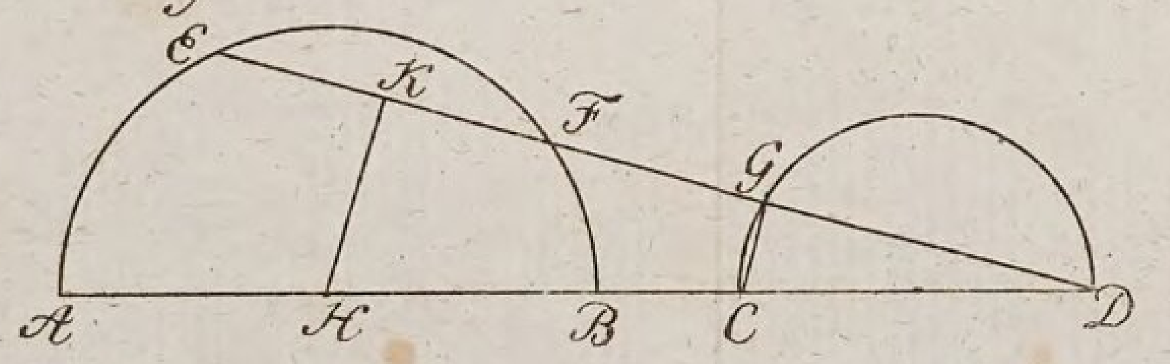


Fig. 81.



Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Klügel, Georg Simon, / Mollweide, Karl Brandan, / Grunert, Johann August,

Mathematisches Wörterbuch oder Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik mit den nöthigen Beweisen und literarischen Nachrichten begleitet ; in alphabetischer Ordnung
Bd.: Zweyter Theil

Leipzig 1805

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.2(2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11739655-9